

NOMBRES COMPLEXES ET SIMILITUDE PLANE DIRECTE

Cellule de mathématiques

Classe : TS₂

SERIE D'EXERCICES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

- Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
 - $z_1 = (1-i)(5+i)$
 - $z_2 = (2-3i)^2$
 - $z_3 = \frac{1}{3+2i}$
 - $z_4 = \frac{4-5i}{3+2i}$
- Ecrire en fonction de $\bar{z}$ les conjugués des nombres complexes suivants :
 - $z_1 = 1+i$
 - $z_2 = i(z+3)$
 - $z_3 = \frac{1-z}{1+i}$
 - $z_4 = \frac{1+3z}{i+2z}$
- Déterminer un argument de z dans chacun des cas suivants :
 - $z = -1+i$
 - $z = \sqrt{6} + i\sqrt{6}$
 - $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - $z = (2+2i)(1-i)$
 - $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$
 - $z = (-1-i)^4$

Exercice 2

Le plan est muni d'une repère orthonormé direct.

- Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant :
 - $|z-3| = |z+i|$
 - $|iz+3| = |z+4+i|$
 - $|\bar{z} + \frac{1}{3}i| = 3$
 - $|z - \bar{z} + i| = 2$
 - $|\bar{z} - 2 + i| = |z + 5 - 2i|$
- Pour tout nombre complexe $z \neq -1+2i$, on pose $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que
 - $|Z| = 1$
 - $|Z| = 2$
 - Z soit un réel.
 - Z soit un imaginaire pur.
- Pour tout complexe $z \neq i$, on pose $U = \frac{z+i}{z-i}$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
 - $U \in \mathbb{R}^*$
 - $U \in \mathbb{R}_+^*$
 - $U \in i\mathbb{R}$

Exercice 3

- On pose $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1-i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.
 - Déterminer un argument de z_1 ; z_2 et z_3 .

- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

- On considère les nombres complexes : $a = 1-i$; $b = 1-i\sqrt{3}$ et $Z = \frac{a^5}{b^4}$.
 - Déterminer une écriture trigonométrique de Z .
 - Déterminer une écriture cartésienne de Z .
En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$
 - Calculer Z^{12} et Z^{2012}
 - Pour quelles valeurs de l'entier naturel n :
 Z^n est un réel.
 Z^n est un imaginaire pur.

Exercice 4

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
 - $\bar{z} = i - z$; **b.** $2z + \bar{z} = i - z$; **c.** $z^2 = |\bar{z}|$;
 - $2z^2 - 6z + 5 = 0$ **e.** $z^2 + z + 1 = 0$;
 - $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$; **g.** $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$;
 - $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$; **i.** $4z^2 - 2z + 1 = 0$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes sachant qu'elle admette une solution réelle :
 - $z^3 - (1+i)z^2 - 2(1+i)z + 8 = 0$
 - $iz^3 + (3-5i)z^2 + (16-2i)z + 30i = 0$
- Résoudre chacune des équations suivantes sachant qu'elle admette une solution imaginaire pure :
 - $z^3 - (3+4i)z^2 - 6(3-2i)z + 72i = 0$
 - $z^3 + (5i-1)z^2 - (4i+7)z + 3-3i = 0$

Exercice 5

Soit l'équation (E) : $z^3 - 2(1+2i)z^2 + 7iz + 3(1-3i) = 0$

- Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
- Résoudre l'équation (E)
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points $A; B; C$ et D d'affixes respectifs $z_A = 3i$; $z_B = 1-i$; $z_C = 1+2i$ et $z_D = i$
 - Placer ces points.
 - Quelle est la nature du triangle ACD ?
 - Soit $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, -2)\}$.
Démontrer que les points A, D et G sont alignés.

Exercice 6

- Résoudre l'équation : $2(1 - \cos 2\alpha)z^2 - 2\sin(2\alpha)z + 1 = 0$; où α est une valeur de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
- Déterminer le module et un argument des solutions z_1 et z_2 .
- Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Déterminer α pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O

Exercice 7

Soit $(E) : z^3 + (3+2i)z^2 - (9+i)z + 14 - 18i = 0$.

- Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure à préciser puis achever la résolution de l'équation (E) .
- Dans le plan complexe, on considère les points $A(Z_0 = -2i)$; $B(z_1 = 2+i)$ et $C(z_2 = 5-i)$.
 - Déterminer le module et un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$
 - En déduire la nature du triangle ABC .
- On pose $Z = \frac{z - z_0}{iz - \bar{z}_2}$ avec $M(z)$ et $K(1-5i)$.
 - Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$
 - Déterminer géométriquement et représenter dans chaque cas l'ensemble des points $M(z)$ tels que :
 - $|Z| = 1$
 - $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

Exercice 8

Pour tout nombre complexe z , on définit le polynôme

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$$

- Vérifier que le polynôme admet une racine réelle.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 0$.
On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, avec z_1 ayant la partie imaginaire positive.
 - Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.
 - Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2
- Placer dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2cm), les points A d'affixe 2, B et C d'affixes respectifs z_1 et z_2 et I milieu de $[AB]$.
 - Démontrer que le triangle OAB est isocèle. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{OI})$ (1pt)
 - Calculer l'affixe z_I de I puis le module de z_I
 - Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos(\frac{3\pi}{8})$ et $\sin(\frac{3\pi}{8})$

Exercice 9

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation : $(E) : z^4 - (2-i)z^3 - 3iz^2 + (4-i)z + 1 + 3i = 0$

- Montrer que (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2
- Déterminer les autres solutions de (E) .
- On désigne par $A(z_1)$; $B(z_2)$; $C(z_3)$ et $D(z_4)$ avec z_1, z_2, z_3 et z_4 les solutions de (E)
 - Montrer que $Z = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \times \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ est réel.
 - Que peut-on en déduire des points A, B, C et D ?

Exercice 10

Soient les points $A(2i)$, $M(z)$ et $M'(z')$ tels que $z' = \frac{2iz - 5}{z - 2i}$.

- On pose $z = x + iy$.
 - Montrer que $\text{Im}(z) = \frac{2x^2 + 2y^2 + y - 10}{x^2 + (y-2)^2}$
 - Déterminer alors l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit un réel
- Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|2\bar{z} + 4i|$.
- Montrer que $(z' - 2i)(z - 2i) = -9$
 - Montrer que $\overrightarrow{AM'} \times \overrightarrow{AM} = 9$.
 - Montrer que $(\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \pi + 2k\pi$
 - En déduire l'ensemble Δ des points $M(z)$ tels que $\arg(z' - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Exercice 11

- Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^3 = 1$
- Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$
 - Soit l'équation $(E) : z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$.
En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$; déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E) .
- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

Exercice 12

- Ecrire sous forme exponentielle :
 - $z = \frac{1 + e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}$
 - $z = \frac{(1 + i\sqrt{3})(\sin x + i \cos x)}{(1 - i)(\cos x - i \sin x)}$
- Linéariser les expressions suivantes : $\cos^2\theta \sin^2\theta$; $\cos^3\theta$; $\sin^3\theta$; $\sin^4\theta$; $\cos^6\theta$; $\sin^5\theta$

Exercice 13

Soit $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$.
On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.

- Démontrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.
- Calculer $S + T$; ST ; S et T .

Exercice 14

Soit la suite z_n définie par :

$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1+i)z_n + 2i \end{cases}$$

1. Calculer z_1 et z_2
2. On considère la suite (U_n) définie par $U_n = z_n + 2$.
 - a. Montrer que $U_n = (2 + i)(1 + i)^n$
 - b. Exprimer z_n en fonction de n .
3. Soit $M_{n+1}; M_n; A$ et B les points d'affixes respectives : $z_{n+1}; z_n; i$ et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.
Démontrer que $\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$ et que $(\overrightarrow{BM_n}; \overrightarrow{AM_{n+1}}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 15 On considère la suite (z_n) de nombres complexes telle que $z_0 = 0$, $z_1 = i$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2}) \quad (1)$$

1. a. On pose $v_n = z_n - z_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.
Exprimer v_n en fonction de n .
b. En déduire que $z_n = \frac{1-i}{2}(i^n - 1)$.
c. Démontrer que la suite z_n est périodique.
2. On note M_n l'image dans le plan du complexe z_n
 - a. Marquer les points $M_0; M_1; M_2$ et M_3 .
 - b. Que peut-on dire des points $M_{100}; M_{101}; M_{102}$ et M_{103}
 - c. Interpréter en module et argument la relation (1) pour déterminer la nature de $M_n M_{n+1} M_{n+2} M_{n+3}$

Exercice 16

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier naturel n par $\begin{cases} z_0 = 2 + i \\ z_{n+1} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z_n + 1 \end{cases}$
On note M_n le point d'affixe z_n .

1. a. Déterminer l'affixe des points $M_1; M_2; M_3$ et M_4
b. Placer les points $M_1; M_2; M_3$ et M_4
2. On pose $\delta_n = |z_{n+1} - z_n|$
 - a. Vérifier que pour tout $n \geq 1$;
 $z_{n+1} - z_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)(z_n - z_{n-1})$
 - b. En déduire la nature de la suite (δ_n) .
 - c. Exprimer δ_n en fonction de n .
 - d. On note L_n la longueur de la ligne polygonale $M_0 M_1 \dots M_n$, déterminer L_n en fonction de n et la limite (L_n)
3. Pour tout entier naturel n , on pose $\arg(z_n - 1 - i) = \alpha_n[2\pi]$
 - a. Vérifier que $\frac{z_{n+1} - 1 - i}{z_n - 1 - i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
 - b. Montrer que la suite (α_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$

- c. Pour quelles valeurs les points $B(1 + i); M_0$ et M_n sont-ils alignés ?

Exercice 17

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $2cm$. On considère l'équation $(E) : z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

1. Résoudre l'équation (E)
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n(\frac{\pi}{6})}$ pour tout $n \geq 1$
 - a. Vérifier que z_1 est solution de (E) .
 - b. Ecrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
 - c. Placer les points $M_1; M_2; M_3$ et M_4 et tracer les segments $[M_1 M_2]; [M_2 M_3]$ et $[M_3 M_4]$
3. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{(-1)^n}{2} \right)$
b. Calculer les longueurs $M_1 M_2$ et $M_2 M_3$
4. Par suite, on admet que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $M_n M_{n+1} = 2^n \sqrt{3}$.
On note $l_n = M_1 M_2 + M_2 M_3 + \dots + M_n M_{n+1}$
 - a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $l_n = 2^n \sqrt{3}(2^n - 1)$.
 - b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $l_n \geq 1000$

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe

$$z_n \text{ défini par } \begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4} \right) z_n \end{cases} \quad \text{On définit la}$$

suite (r_n) par $r_n = |z_n|$

1. Donne la forme exponentielle de du complexe $\frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$
2. a. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b. En déduire r_n en fonction de n .
c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Démontrer que le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} .
4. On admet que $z_n = r_n e^{in\frac{\pi}{6}}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

SIMILITUDE PLANE DIRECTE

Exercice 19

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

1. $z' = (\sqrt{3} + i)z$
2. $z' = (\sqrt{3} - i)z + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$
3. $z' = -2z + i$
4. $z' = -iz + 1 - 2i$

Exercice 20

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture complexe de f .
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

Exercice 21

Soit S la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = (i - \sqrt{3})z + 3 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} + 1)$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S .
2. Déterminer l'expression analytique de S .
3. Déterminer l'image par S de la droite passant par le point $A(1 - 2\sqrt{3}; 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(\sqrt{3}; 1)$

Exercice 22

Soit S la similitude directe d'écriture complexe

$$z' = (1 + i)z + 2$$

1. Déterminer les éléments caractéristiques de S .
2. Soit Ω le centre de S . Quelle est la nature du triangle $M\Omega M'$ où M' est l'image de M par S .
3. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $OM = OM'$
4. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\vec{OM} \cdot \vec{OM'} = 0$

Exercice 23

On considère les points $A_1; A_2$ et A_3 d'affixes respectives $z_1 = 1; z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_3 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{4}$.

1. a. Donner une écriture complexe des nombres $z_2 - z_1$ et $z_3 - z_1$.
b. Donner une écriture algébrique et une écriture trigonométrique de $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.
c. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$
2. Soit S la similitude directe transformant A_2 en A_3 et laissant A_1 invariant.
a. Préciser les éléments caractéristiques de S .
b. On désigne par M' le point d'affixe z' et image par S de M d'affixe z . Exprimer z' en fonction de z .
c. En déduire l'image par S du point B d'affixe $1 - 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 24

1. On considère l'équation $(E) : z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 12i)z - 9 - 45i = 0$
a. Déterminer une solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E) .

b. Acheter la résolution de l'équation (E)

2. Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points $A; B$ et C d'affixes respectives $3i; 3 + 3i$ et $3 - 2i$.

- a. Placer les points $A; B$ et C dans le repère.
- b. Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduire la nature du triangle ABC .

3. Soit f la similitude directe qui laisse invariant B et qui transforme A en C .

- a. Donner une écriture complexe de f .
- b. Donner les éléments caractéristiques de l'application f .

Exercice 25

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe z associe le complexe z' défini par $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$.

1. Montrer que le nombre complexe $\omega = 1 + i$ est invariant par f .
2. Montrer que $z - \omega = (1 + i\sqrt{3})(z - \omega)$.
3. Soit $M; M'$ et Ω les points d'affixes respectives $z; z'$ et ω .
a. Calculer le module et un argument de $\frac{z - \omega}{z' - \omega}$.
b. Montrer que M' est l'image de M par la composée d'une rotation dont on précisera le centre et l'angle, et d'une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
c. Faire une figure représentant les points $\Omega; M$ et M' .
d. Montrer géométriquement que le triangle $\Omega MM'$ est un triangle rectangle.
4. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\left(\frac{z - \omega}{z' - \omega}\right)^n$, où n est un entier naturel.

Exercice 26

Considérons les points $A; B; C$ et D du plan tels que $A(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}); B(-1 + i); C(-1 - i)$ et $D(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$

1. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. Soit r la rotation de centre le point Ω d'affixe 1 qui transforme A en D .
Déterminer l'écriture complexe de r .
3. Quelle est la nature du triangle ΩAD ?
4. Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD .
5. On pose $u_n = (z_A)^n, n \in \mathbb{N}^*$ où z_A est l'affixe du point A .
Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle u_n est un réel.
6. Donner la forme algébrique de u_{2019}