

Exercice 1 : Forme algébrique

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $Z_1 = \frac{i}{(1+2i)(3-i)}$; b) $Z_2 = (\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - 2i)$; $Z_3 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

2) Déterminer le réel x tel que : $x^2 - 3x + 2 + i(2x^2 + x - 10) = 0$

3) On pose $z = x + yi$ avec x et y réels. Déterminer en fonction de x et y les parties réelle et imaginaire de :

$Z_1 = z^2 - 3z + 2 + i$; $Z_2 = (1 + z)^2 + (1 + z)i$

4) Soit Z le nombre complexe défini par : $Z = 2x + 3i + (ix - 2)(2 - i(x + 4))$

Déterminer le nombre réel x tels que :

a) Z est un nombre réel

b) Z est un nombre imaginaire pur.

5) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $Z = \frac{1+z}{1+i-2z}$, lorsque $z = x + yi$, x et y étant des réels.

Exercice 2 : Module et argument

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $Z = (1 + i)(1 - i\sqrt{3})$; b) $Z = (\sqrt{3} - i)^5$; c) $Z = \frac{25+25i}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$;

d) $Z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10} (2 + 2i)^5$

2) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $Z = \cos \alpha + i \sin \alpha$; b) $Z = \sin \alpha - i \cos \alpha$; c) $Z = -\cos \alpha + i \sin \alpha$

d) $Z = -\cos \alpha - i \sin \alpha$; e) $Z = \tan \alpha + i$; f) $Z = 1 - i \tan \alpha$

g) $Z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$; h) $Z = 1 - \cos \alpha - i \sin \alpha$; i) $Z = \cot \alpha + i$

f) $Z = 1 - i \cot \alpha$; g) $Z = 1 - \sin \alpha + i \cos \alpha$; d) $Z = 1 - \sin \alpha - i \cos \alpha$

3) Soit A, B et C trois points d'affixes respectives 2 ; $2i$ et $(1 + \sqrt{3})(1 + i)$

a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Calculer les distances AB, AC et BC.

c) Quelle est la nature du triangle ABC ?

4) Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives $a = -1 + i$; $b = -1 - i$

$c = 2i$ et $d = 2 - 2i$

a) Calculer les distances BC, BD et CD. Quelle est la nature du triangle BCD ?

b) Déterminer l'affixe w du milieu Ω du segment [CD]. Calculer la distance ΩA .

c) Justifier que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

d) Déterminer l'affixe e du point E symétrique de B par rapport à Ω .

Quelle est la nature du quadrilatère CBDE ?

Exercice 3 : Forme trigonométrique - Forme exponentielle

1) Trouver une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$Z_1 = (1 - i)^2$; $Z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$; $Z_3 = (2 - 2\sqrt{3}i)(-3 - 3i)$; $Z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$

$Z_5 = \frac{1}{1 + i}$; $Z_6 = (1 - i\sqrt{3})^4$; $Z_7 = \frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}}$; $Z_8 = \frac{(1 - i)^4}{(-\sqrt{3} - i)^3}$

$Z_9 = -2e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $Z_{10} = (1 + i)e^{i\frac{\pi}{6}}$; $Z_{11} = (1 - i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$Z_{12} = (-1 - i\sqrt{3})^3 e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $Z_{13} = 5 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

2) Soit θ un réel dans $\left] \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} \right]$, écrire sous forme trigonométrique, chacun des complexes suivants :

a) $-\cos \theta - i \sin \theta$; b) $\sin \frac{\pi}{7} + i \cos \frac{\pi}{7}$; c) $-\cos \theta + i \sin \theta$

d) $-\sin \theta - i \cos \theta$; e) $\cos \theta + i \cos \theta$

3) On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

a) Donner le module et un argument de z_1 ; z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$

b) Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$

c) En déduire que : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4) a) Ecrire sous forme trigonométrique :

$Z_1 = (1 + i)^6$; $Z_2 = (2\sqrt{3} - 2i)^4$; $Z_3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2022}$

b) En déduire les formes algébriques de ces complexes.

5) Soit Z un nombre complexe tel que : $AZ = B$ avec $A = 5\sqrt{2}(1+i)$ et $B = -5(1+i\sqrt{3})$

a) Ecrire Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$

c) Calculer Z^{2022}

6) On pose : $Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

a) Calculer Z^2 puis déterminer son module et son argument

b) En déduire de ce qui précède le module et un argument Z .

7) On pose : $Z = \frac{\sqrt{6-i\sqrt{2}}}{2}$; $Z' = 1-i$

a) Ecrire $\frac{Z}{Z'}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

8) On considère le nombre complexe $Z = (1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i$

a) Ecrire sous forme algébrique z^2

b) Trouver le module et un argument de z^2 , en déduire le module et un argument de z .

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{17\pi}{12}$ et $\sin \frac{17\pi}{12}$.

d) en utilisant ce résultat résoudre pour $x \in]-\pi ; \pi]$ l'équation :

$$(1-\sqrt{3})\cos x - (1+\sqrt{3})\sin x = 2$$

9) On considère le nombre complexe Z défini par :

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \right)$$

1) Calculer Z^2 et Z^4 ; puis en déduire le module et un argument de Z^4 . En déduire le module et argument de Z

2) Démontrer que : $\cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{2} \sin x = -\sqrt{2}$

Exercice 4 : Formule de Moivre et d'Euler

1) Linéariser les expressions :

Linéariser les monômes et polynômes suivants :

a) $\cos^3 x$; $\sin^3 x$; $\cos^4 x$; $\sin^4 x$; $\sin^5 x$; $\cos^5 x$; $\cos^3 \frac{x}{2}$

b) $\sin^2 x \cdot \cos^3 x$; $\cos^4 x \cdot \sin x$; $\cos^4 x \cdot \sin^3 x$; $3 \sin^2 2x + \sin^2 4x$

c) $3 \cos^3 x \cdot \sin^3 x - 2 \cos^4 x \cdot \sin^2 x$; $2 \sin^4 x + 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin x$

2) Ecrire $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

Exercice 5 : Résolution d'équations et systèmes.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $Z^2 + Z + 1 = 0$

b) $Z^2 - 2Z + 1 = 0$

c) $Z + \frac{1}{Z} + 1 = 0$

d) $Z = \sqrt{2} - \frac{1}{Z}$

e) $2Z^2 + 3|Z|^2 - 1 = 0$

f) $iZ^2 + 2\bar{Z} + 2 - i = 0$

g) $-3Z^2 + 2Z + 1 = 0$

h) $Z^2 + 2 \sin \alpha Z + 1 = 0$

i) $Z^2 - 2 \cos \alpha Z + 1 = 0$

j) $-iZ^2 + (2+2i)Z + (10+5i) = 0$

k) $2Z^2 - 2(3+2i)Z + 1+8i = 0$

l) $(-1+2i)Z^2 + (-5+i)Z + 9i+6 = 0$

m) $4Z^2 - 4(1+i)Z - (45+26i) = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

a) $\begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 7 \\ Z_1 + Z_2 = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 9 \\ Z_1 + Z_2 = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} (2+3i)Z - 5Z' = -1 \\ (1-i)Z + 2Z' = 2(1+i) \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5iZ + (2-i)Z' = 1+12i \\ (2-3i)Z + (5-2i)Z' = 39-10i \end{cases}$; e) $\begin{cases} Z + iZ' = 2(1+i) \\ -iZ + Z' = 2(1-i) \end{cases}$

3) a) Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant : $\begin{cases} iz_1 - z_2 = -1 \\ -z_1 + iz_2 = \sqrt{3} \end{cases}$

b) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

c) Calculer $(z_1 \times z_2)^{2000}$. On écrira le résultat final sous la forme algébrique

4) a) Calculer : $e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^2 - Z + 1 = 0$

5) Trouver le complexe p et q tels que l'équation : $z^2 + pz + q = 0$ admette pour solutions les nombres : $1+2i$ et $3-5i$

6) Soit θ est un réel donné

a) Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2 \cos \theta z + 1 = 0$

b) Dans le plan complexe ($O ; \vec{u} ; \vec{v}$), A et B sont les point ayant pour affixe les solutions de l'équation (E). Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral ?

7) On considère l'équation définie par :

$$z^2 + 4z \cos u + 2 + 4 \cos 2u = 0 \text{ où } u \in [-\pi ; \pi]$$

a) Pour quelles valeurs de u les deux solutions sont-elles réelles ?

b) Déterminer le module et l'argument de chaque solution dans le cas où $u = \frac{\pi}{6}$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation définie par:

$$4(1 - \sin \alpha)Z^2 - 2(1 + \cos 2\alpha)Z + 1 + \sin \alpha = 0$$

Déterminer le module et l'argument des solutions en fonction de α

8) Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x - y - iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases}$$

Exercice 6 : Ensemble des points

1) A tout nombre complexe Z ; différent de $-1 + 2i$; on associe le nombre complexe $Z' = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$ Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe Z

vérifie la condition indiquée :

a) Z' soit un nombre réel.

b) Z' soit un nombre imaginaire pur.

c) $|Z'| = 1$; d) $|Z'| = 2$

2) Déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition imposée, de deux manières :

- Algébriquement (en utilisant $z = x + yi$, x et y étant réels)
- Géométriquement, (en interprétant le module en terme de distance)

a) $|z - 2 + i| = 2$; b) $|z + 1 + i| = |z - 2 - i|$

3) Déterminer, en utilisant la méthode géométrique, l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

$$\text{a) } |z - 2 + i| = |\bar{z} + 3i| \quad ; \quad \text{b) } \left| \frac{z+i}{1+i-z} \right| = 1 \quad ; \quad \text{c) } |2iz + 1 - 4i| = 8$$

Exercice 7 : Transformation

I) Déterminer la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

1) f est la translation de vecteur $\vec{u}(-3 ; 2)$.

2) f est l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ et de centre Ω d'affixe $-4 + 3i$.

3) f est la rotation d'angle $\frac{7\pi}{4}$ et de centre O .

4) f est la rotation d'angle $\frac{5\pi}{3}$ et de centre Ω d'affixe $2 + i$.

II) Les points A, B et C ont pour affixes respectives :

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad b = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad c = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

1) Faites une figure que vous complèterez au cours de l'exercice

2) Calculer l'affixe d du point D image de C par l'homothétie h de centre A et de rapport -3

3) Calculer l'affixe e du point E image de C par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

4) a) Calculer le quotient $Z = \frac{d-b}{e-b}$

b) I désigne le milieu du segment $[DE]$ et F le symétrique de B par rapport à I .

Démontrer que $BDFE$ est un carré.

III) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct ($O ; \vec{u} ; \vec{v}$)(unité graphique : 2cm)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$

On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Ecrire a et b sous leur forme exponentielle puis placer leurs images respectives A et B

2) a) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r . Ecrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente

b) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$. Calculer l'afixe b' du point B' image du point B par H . Placer B' sur la figure précédente

3) Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle $OA'B'$ et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'afixe du point C

a) Justifier les égalités suivantes :

$$c\bar{c} = R^2 \quad ; \quad (c - 2i)(\bar{c} + 2i) = R^2 \quad ; \quad \left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2$$

b) En déduire que $c + \bar{c} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ et que $c - \bar{c} = 2i$

c) En déduire l'afixe du point C et la valeur de R

IV) On considère le plan complexe P muni d'un repère orthonormal $(O ; I ; J)$

1) Soit le polynôme P tel que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

Déterminer les réels u et v tels que : $P(z) = (z - 2)(z^2 + uz + v)$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$

2) On note α la solution de l'équation ci-dessus dont la partie imaginaire est strictement positive et β le conjugué de α . Soient A, B et C les points d'afixes respectives α ; β et 2 .

I le milieu de $[AB]$ et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'afixe du point $r(B)$, en déduire la nature du quadrilatère $OACB$.

3) Soit f l'application de P privé du point C dans P qui au point M d'afixe

$$z, (z \neq 2) \text{ associe le point } M' \text{ d'afixe } z' \text{ défini par : } z' = \frac{z - (1+i)}{z - 2}.$$

a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$

b) Déterminer le point E tel que : $(E) = C$

c) Quelles distances représentent les réels $|z - (1 + i)|$ et $|z - 2|$?

En déduire que si M appartient à la médiatrice de $[AC]$, M' appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon

V) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; I ; J)$ unité graphique : $4cm$

B et M_1 sont des points d'afixes respectives i et $Z_1 = \sqrt{3} - 12(1 - i)$

1) Calculer le module et l'argument de Z_1

2) M_2 est le point, d'afixe Z_2 , image de M_1 par la rotation c de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Trouver le module et l'argument de Z_2 .

En déduire que le point M_2 est sur la droite d d'équation $y = x$.

3) M_3 est le point d'afixe Z_3 , image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3} + 2$

a) Vérifier que $Z_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1 + i)$

b) Prouver que les points M_1 et M_3 sont sur le même cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$

4) Construire à l'aide d'une règle et au compas, les points M_1 , M_2 et M_3 , en utilisant les questions précédentes ; préciser les différentes étapes de la construction

5) A tout point M distinct de B , d'afixe Z on associe le point M' d'afixe Z' telle que : $Z' = \frac{1}{i-Z}$

Trouver puis représenter l'ensemble des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1 .

Exercice 8 : Autres équations

4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère le polynôme $P(Z)$ tel que :

$$P(Z) = Z^3 + 9iZ^2 + 2(6i - 11)Z - 3(4i + 12)$$

a) Démontrer que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution réelle que l'on notera Z_1 , dont on déterminera la valeur.

b) Factoriser $P(Z)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

5) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère le polynôme $P(Z)$ tel que :

$$P(Z) = Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1$$

a) Montrer que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.

b) Factoriser $P(Z)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.

6) Soit f la fonction à variable complexe Z telle que :

$$f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$$

a) Prouver que si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes : $\overline{Z_0}$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.

b) Déterminer $f(1+i)$ et en exploitant ce qui précède, trouver toutes les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

7) Soit le polynôme $P(Z)$ définie par :

$$P(Z) = Z^4 - (1 + \sqrt{2})Z^3 + (2 + \sqrt{2})Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + 1$$

a) Vérifier que : $P(Z) = z^2 \left[\left(Z + \frac{1}{Z} \right)^2 - \left(Z + \frac{1}{Z} \right) (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right]$ avec $(Z \neq 0)$

b) En utilisant la question précédente, résoudre l'équation $P(Z) = 0$.

8) Soit le polynôme $P(Z)$ définie par : $P(Z) = Z^4 + 2Z^3 - 2Z + 1$

a) Déterminer les nombres réels a et b tel que $\forall Z \in \mathbb{C}^*$ on a :

$$P(Z) = Z^2 \left[\left(Z - \frac{1}{Z} \right)^2 + a \left(Z - \frac{1}{Z} \right) + b \right]$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$

c) En déduire la résolution de l'équation $P(Z) = 0$

9) Soit $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$

b) Montrer que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution réelle notée Z_0 que l'on déterminera.

c) Déterminer a , b et c trois nombres complexes tels que :

$$P(Z) = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$$

d) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(Z) = 0$

10) On pose pour tout complexe z : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$

a) Vérifier que : $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$

11) Montrer que $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$ puis en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^3 - 1 = 0$.

12) On considère le polynôme : $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

a) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$

13) Pour tout complexe z , on considère : $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$

a) b est réel. Exprimer en fonction de b les parties réelles et imaginaires de $f(ib)$.

b) En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution

c) Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z , $f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$

d) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$

Extrait des sujets du devoir & compos (Adama Traoré)

Exercice 1 :

Soit θ un angle tel que : $0 \leq \theta < \pi$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 4(1 + \cos \theta)z + 8(1 + \cos \theta) = 0$.

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E).

2) Déterminer en fonction de $\frac{\theta}{2}$, le module et un argument de chacun des solutions z_1 et z_2 .

3) Trouver θ pour que le produit $z_1 \times z_2$ soit égal à 8.

Exercice 2 :

Soit les complexes $z_1 = x - 3i$ et $z_2 = 2 + yi$ où x et y sont des réels.

1) Trouver une relation entre x et y pour que $z_1 \times z_2$ soit réel.

2) Trouver une relation entre x et y pour que $\frac{z_1}{z_2}$ soit imaginaire pur.

3) Déterminer x et y pour que $2\overline{z_1} + 3z_2 - 2z_1z_2 = 12i$.

Exercice 3 :

Soit l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$; $iz^3 + (4 - 3i)z^2 - (8 + 3i)z + 5i = 0$.

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 , à déterminer.

2) Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que :

$$iz^3 + (4 - 3i)z^2 - (8 + 3i)z + 5i = (z - i)(az^2 + bz + c).$$

3) Résoudre l'équation (E).

4) Le plan complexe est muni d'un repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Soit les points A , B , C d'affixes respectives i ; $1 + 2i$ et $2 + i$.

a) Placer les points A , B , C .

b) Calculer AB , AC , BC , $\arg(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AB})$.

En déduire la nature du triangle ABC .

c) Déterminer z l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer le point D .

Exercice 4 :

1) Résoudre le système d'inconnues x et y : $\begin{cases} 2ix - y = 1 + 2i \\ x + (1 + i)y = 2 - 3i \end{cases}$

On donnera x et y sous forme algébrique.

2) Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$

a) Calculer les modules et arguments de z_1 et z_2 .

b) Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique du produit $z_1 \times z_2$.

En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 5 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$

1) a) Résoudre l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

b) On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2 . Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.

c) Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que le quadrilatère $MNPO$ est un carré.

2) Soit R le symétrique de P par rapport à O . E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$. Placer les points sur la figure.

Calculer les affixes de R et S . Montrer que S appartient au segment $[MN]$.

3) On pose $a = 2 - \sqrt{3}$.

a) Montrer que $1 + a^2 = 4a$ et que $1 - a^2 = 2a\sqrt{3}$

b) Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$.

c) Montrer que $|Z| = |Z'|$ et $\frac{Z}{Z'} = e^{\frac{\pi}{3}i}$

d) Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS .

Exercice 6 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé directe $(O ; \vec{u} , \vec{v})$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $-i$ et $2i$. On note P^* l'ensemble des points de P distincts de A .

Soit $f : P^* \rightarrow P$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z tel que : $Z = \frac{z-2i}{z+i}i$

1) Soit M_1 le point d'affixe i et M_2 le point d'affixe $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

Déterminer $f(M_1)$ et $f(M_2)$.

2) Déterminer le point M tel que $f(M) = O$ puis le point M de P^* tel que $f(M) = N$ où N a pour affixe $2 - i$.

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M tel que $f(M)$:

a) a pour affixe un imaginaire pur.

b) a pour affixe un réel.

Exercice 7 :

1) a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $x^2 + 6x + 13 = 0$

b) Déterminer les complexes $z = x + yi$ vérifiant : $\begin{cases} z + \bar{z} = -6 \\ z\bar{z} = 13 \end{cases}$

2) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ on pose $Z = \frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$

a) Exprimer Z sous la forme $a + bi$ où a et b sont des réels.

b) Calculer Z^2 et Z^3 puis Z^{15} . En déduire que Z^{3n} ($n \in \mathbb{N}$) est un réel.

c) Calculer $|Z|$ et $\arg(Z)$. En déduire la forme trigonométrique de Z .

Exercice 8 :

1) On considère l'équation dans $\mathbb{C}$; $Z^4 - 6Z^3 + 23Z^2 - 34Z + 26 = 0$

a) Montrer que, si Z_0 est une solution de cette équation alors son conjugué $\bar{Z}_0$ est solution.

b) Résoudre l'équation après avoir vérifié $1 + i$ est solution de l'équation.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$; les équations suivantes :

a) $\left(\frac{z-2}{z-4i}\right)^2 - 6\left(\frac{z-2}{z-4i}\right) + 13 = 0$

b) $Z^2 - (3 \cos \theta + \sin \theta) + 2 = 0$; $\theta \in \mathbb{R}$

Exercice 9 :

Soit l'application f qui, à tout nombre complexe z , associe le nombre complexe :

$$f(z) = (-1 + i\sqrt{3})z + 2(\sqrt{3} - 1) + (4 + \sqrt{3})i$$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = z$.

Cette équation a une racine unique z_0 que l'on mettra sous la forme $x + yi$ où x et y sont des nombres réels.

2) Calculer $Z_0 = z_0^2$; $\bar{Z}_0$; $\frac{1}{z_0}$; donner leurs formes algébriques.

3) Représenter dans le plan complexe les points d'affixes z_0 ; $\bar{Z}_0$; $\frac{1}{z_0}$.

Exercice 10 :

Soit z un nombre complexe distinct de 1, soit Z tel que $Z = \frac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}}$

1) Déterminer les parties réels et imaginaires de Z en fonction de celle de z .

2) Montrer que l'ensemble des points $M(Z)$ du plan, tels que Z soit réel est une droite privée d'un point.

3) Montrer que l'ensemble des points $M(Z)$ du plan tels que Z soit un imaginaire pur ou zéro, est un cercle privé d'un point dont vous donnerez une équation.

Exercice 11 :

1) Déterminer sous forme algébrique, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) :

$$Z^2 + Z + 1 = 0.$$

2) On note j la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive. Vérifier que $j^2 = -j - 1$.

3) Vérifier que $j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}$ et que $j^3 = 1$.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $Z^3 = (\sqrt{3} - 2i)^3$.

Exercice 12 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soient A , B et C les points d'affixes respectives :

$$Z_A = \sqrt{3} + i ; Z_B = -1 - i\sqrt{3} ; Z_C = -2$$

1) a) Mettre Z_A et Z_B sous forme trigonométrique.

b) Placer le point C et construire les points A et B .

c) Déterminer la nature du triangle ABC .

2) On pose $a = \frac{Z_A}{Z_B}$

a) Ecrire a sous forme trigonométrique.

b) On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = Ze^{\frac{5\pi i}{6}}$. Caractériser géométriquement l'application f .

3) a) Déterminer les images des points A et B par f .

b) En déduire l'image de (AB) par f .

Exercice 13 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ d'unité 1 cm.

1) a) a et b sont deux nombres complexes, factoriser $a^4 - b^4$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z \in \mathbb{C} ; (z - 2)^4 = (z + 1 - i)^4$

2) On considère les points $A(+2)$; $B(-1 + i)$; $C(-i)$ et $D(1 + 2i)$

a) Placer ces points dans le repère $(O ; I ; J)$

b) Montrer que $ADBC$ est un carré.

3) A tout point M du plan d'affixe $z = x + yi$ distinct de C on associe le complexe Z défini par : $Z = \frac{z-1-2i}{z+i}$

a) Exprimer $Re(Z)$ et $Im(Z)$ en fonction de x et y .

b) Caractériser et représenter dans le plan :

- l'ensemble (E_1) des points M tels que Z soit un réel

- l'ensemble (E_2) des points M tels que $|Z| = 1$

Exercice 14 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z , $4z^2 + 8z + 29 = 0$.

2) Représenter dans le plan complexe les images A et B des solutions de l'équation précédente, ainsi que le point C d'affixe $2 - \frac{3}{2}i$.

3) Démontrer que le triangle ABC est isocèle.

Exercice 15 :

Soit $z = x + yi$ un nombre complexe distinct de -1 . Soit $Z = \frac{2iz-i}{z+1}$ (x et y sont des réels).

1) Calculer $\bar{Z}$; $Re(Z)$; $Im(Z)$; $|Z|$ en fonction de x et y .

2) Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixes Z tels que $|Z| = 1$.

3) Déterminer l'ensemble E_2 des points M d'affixe Z tel que Z soit imaginaire pur.

4) Déterminer les points d'intersection de E_1 et E_2 .

Exercice 16 :

1) Soit $p(z) = z^3 - 2 - 11i$

a) Déterminer les racines cubiques de l'unité.

b) Calculer le complexe $u = (2 + i)^3$.

c) En déduire les solutions de l'équation $z \in \mathbb{C} ; p(z) = 0$ puis placer les points images des solutions dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé.

Exercice 17 :

a) Développer $(1 + \sqrt{3})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (1 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$.

c) On note A et B les images dans le plan complexe $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ des solutions de l'équation.

Déterminer la nature du triangle OAB .

Exercice 18 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ unité graphique 2 cm

1) a) Développer $(1 + \sqrt{3})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (1 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$.

2) On pose $z_1 = \frac{-(1+\sqrt{3})}{2}(1-i)$ et $z_2 = \frac{-(1+\sqrt{3})}{2}(1+i)$.

A et B sont les points d'abscisses respectives Z_1 et Z_2 .

a) Ecrivez Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique.

b) Quelle est la nature du triangle OAB ?

3) On désigne par C le point d'abscisse 1.

a) Ecrivez le complexe $\frac{1-Z_1}{Z_2-Z_1}$ sous forme trigonométrique.

b) En déduire la nature du triangle ABC et placer les points A , B et C .

Exercice 19 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on associe au point m d'abscisse z le point M d'abscisse Z tel que $Z = \frac{8}{\bar{z}}$ (où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z).

1) En posant $z = re^{i\theta}$, calculer le module et un argument de Z en fonction de r et θ . Que peut-on conclure pour les points m , M et O ?

2) On pose $z = x + yi$, $Z = X + Yi$; i désignant le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Calculer X et Y en fonction de x et y . En déduire les coordonnées des points M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4

Associés respectivement aux points

$m_1(2 ; 0)$, $m_2(2 ; 1)$, $m_3(2 ; 2)$, $m_4(2 ; 3)$.

3) Vérifier par calcul que M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4 sont sur un cercle de centre $A(2 ; 0)$.

Représenter graphiquement les différents points.

Exercice 20 :

Soit le polynôme $f(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 + (39i - 14)z + 50$.

1) Montrer que $f(z) = 0$ admet une racine imaginaire pure z_0 .

2) Mettre $(z - z_0)$ en facteur dans $f(z)$, puis résoudre l'équation $f(z) = 0$.

Placer dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, les images des solutions de l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 21 :

Soit dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes d'équation

$$(E) : z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2(1 - i) = 0$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure z_0 .

2) Montrer que les trois racines forment une progression géométrique de premier terme z_0 dont on déterminera la raison q .

3) Calculer le 15^{ième} terme de cette suite.

Exercice 22 :

On considère le nombre complexe $Z = (1 - \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3})i$

1) Ecrire sous forme algébrique z^2 .

2) Trouver le module et un argument de z^2 , en déduire le module et un argument de z .

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{17\pi}{12}$ et $\sin \frac{17\pi}{12}$.

4) En utilisant ce résultat, résoudre pour $x \in]-\pi ; \pi]$ l'équation :

$$(1 - \sqrt{3}) \cos x - (1 + \sqrt{3}) \sin x = 2$$

Exercice 23 :

1) écrire sous forme algébrique les solutions de l'équation : $Z^6 = -1$.

En déduire les solutions de l'équation : $(z - i\sqrt{3})^6 = i^2(\sqrt{3}z - 2i)^6$.

2) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x)$

Exercice 24 :

- 1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\text{Arg}\left(\frac{z-2}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2}$
- 2) Démontrer que quels que soient les nombres complexes U et U' de module 1 vérifiant $UU' + 1 \neq 0$, le nombre $Z = \frac{u+u'}{1+uu'}$ est réel.

Exercice 25 :

Soit l'équation $(E) : z^3 - 2iz^2 - 4z + 8i = 0$

- 1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 qu'on déterminera.
 - 2) Résoudre (E) .
 - 3) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M , d'affixe t , tels que t^2 soit un réel.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C} : \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$

Exercice 26 :

Z est un nombre complexe différent de 1. On pose $z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}$ et $r = \frac{z'+1}{z'-1}$

- 1) Comparer $|z-1|$ et $|\bar{z}-1|$
- 2) Déterminer $|z'|$
- 3) On appelle A, B, M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives $1, -1, z$ et z' .

Calculer r en fonction de z et $\bar{z}$. En déduire que r est un réel.

Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$? On justifiera la réponse.

Exercice 27 :

- 1) Trouver les nombres complexes z et t tels que :

$$\begin{cases} (2+i)z + (3+i)\bar{t} = 6 - \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} - 1) \\ (1+3i)\bar{z} + (1+2i)t = \sqrt{3}(3-i) + 6i \end{cases}$$

- 2) Ecrire sous leurs formes trigonométriques z, t et $\frac{z}{t}$

En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 28 :

- 1) Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1-i$
- 2) En déduire le module et un argument de $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
- 3) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 29 :

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^2 - (9+2i)z + 26$$

- 1) Déterminer les nombres complexes U tels que $U^2 = -3+4i$ puis résoudre l'équation $f(z) = 0$.
- 2) On pose $z = x + yi$. Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan complexe, tels que $f(z)$ soit un réel. Préciser la nature de cet ensemble.
- 3) Soit les nombres complexes a et b définis par :
 $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $b = -\sqrt{3} + i$. Ecrire $a; b; \frac{b}{a}$ sous forme trigonométrique.

Exercice 30 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère le polynôme complexe :

$$f(z) = z^3 - 4z + 6z - 4$$

- 1) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres solutions (où z_1 est la solution complexe dont la partie imaginaire est positive).
- 3) Représenter dans le plan complexe les points $M_0; M_1; M_2$ d'affixes respectives $z_0; z_1; z_2$. Montrer que le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle.
- 4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = z_1$. On donnera les solutions sous forme algébrique et trigonométrique. En déduire les valeurs exactes de :
 $\cos \frac{\pi}{8}; \sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$.
- b) Calculer $(z_1)^{20}$.

Exercice 31 :

Soient les nombres z et Z tels que $z \neq -3$ et $Z = \frac{z+1-i}{z+3}$.

On désigne par A , B et M les points d'affixes respectives -3 ; $-1 + i$ et z .

Déterminer et construire :

- L'ensemble E_1 des points M tels que $|Z| = 1$.
- L'ensemble E_2 des points M tels que Z soit un réel négatif.
- L'ensemble E_3 des points M tels que Z soit imaginaire pure.

Exercice 32 :

1) a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe i sous forme trigonométrique et algébrique.

b) En déduire la solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $[(1 - 2i)z]^3 - i = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 + iz^3 = 0$.

Placer les points images de ces solutions dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

3) Linéariser l'expression : $\cos^3 x \cdot \sin^2 x$

4) a) Déterminer une forme trigonométrique du complexe : $z = -3 + 3i$

b) Soit z_0 le complexe d'image ponctuelle M_0 tel que $z = 3\sqrt{2} z_0$ et u l'affixe d'un point M du plan ; tel que les images ponctuelles de z_0 et u soient les sommets d'un triangle rectangle en M_0 .

c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes u .

Exercice 33 :

1) Soit k un réel positif non nul et un nombre complexe $z_k = k - 1 - 2i$.

Calculer $|z_k|$ en fonction de k . Déterminer k pour que zk vérifie :

$$|z_k| - z_k = 1 + 2i.$$

2) Soient u un nombre complexe et (E) l'équation d'inconnue z : $|z| - z = u$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs de u telles que l'équation : $|z| - z = u$ admette une solution ; puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

b) Soit $u = r(\cos \theta + i \sin \theta)$; $r \in \mathbb{R}_+^*$; $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Exprimer le module et un argument de la solution de l'équation à l'aide de r et θ .

3) Soient les complexes z et z' tels que :

$$z = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha \quad \text{et} \quad z' = \cos 2\alpha' + i \sin 2\alpha' \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Calculer le module et un argument du nombre complexe $u = \frac{1-z}{1-z'}$.

Exercice 34 :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Soient A le point d'affixe $-2 + 3i$, B le point d'affixe $1 - 3i$, M le point d'affixe z , ($z \neq -2 + 3i$), M' le point d'affixe z' tel que $z' = 2i \left(\frac{z-1+3i}{z+2-3i} \right)$.

1) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $|z'| = 2$;

2) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que z' soit un réel strictement négatif.

Exercice 35 :

1) Déterminer les racines carrées δ_1 et δ_2 du complexe $z = -18i$;

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4iz - 4 + 18i = 0$;

3) Soit le système d'inconnue b , $\begin{cases} b^4 - 12b^2 + 56b - 288 = 0 \\ 4b^3 - 18b^2 + 24b - 64 = 0 \end{cases}$

Montrer que 4 est une solution de chacune des équations du système.

4) Soit $f(z) = z^4 - 4z^3 + 6(2 + 3i)z^2 + 8(3 - 7i)z - 288 - 64i$

Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure notée z_A et une solution réelle notée z_B

5) Déterminer les complexes a , b et c tels que :

$$f(z) = [z^2 - (4 + 4i)z + 16i][az^2 + bz + c]$$

En déduire la résolution de $f(z) = 0$. On notera z_C la solution non réelle et non imaginaire pure dont $\operatorname{Re}(Z) > 0$; puis z_D la quatrième solution dont $\operatorname{Re}(z_D) < 0$.

6) Placer dans le plan complexe les points A , B , C , D d'affixes respectives

z_A ; z_B ; z_C et z_D puis calculer AB^2 ; AC^2 ; AD^2 ; BC^2 ; BD^2 et CD^2

Exercice 36 :

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i$$

- 1) Calculer $f(i)$ et en déduire une factorisation de $f(z)$.
- 2) a) Calculer le module et l'argument de chaque solution de l'équation.
- 3) On désigne z_1 ; z_2 et z_3 les solutions de l'équation $f(z) = 0$; z_2 étant celle d'argument $\frac{\pi}{2}$. Vérifier que : $-\frac{1}{2}Z_1Z_2 = Z_3$.

Exercice 37 :

- 1) Linéariser : $\sin^6 x + \cos^6 x$.
- 2) Soit z et Z les nombres complexes définies par :

$$z = \sqrt{1 + \sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1} \quad \text{et} \quad Z = z^4$$

Déterminer les racines quatrièmes de Z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

Exercice 38 :

Soit le nombre complexe $z = -4 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$.

- 1) Ecrire z sous forme algébrique.
- 2) a) L'écriture $z = -4 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$ est-elle une forme trigonométrique ? Justifier votre réponse.
- b) Donner la forme trigonométrique de z utilisant l'argument principal.

Exercice 39 :

Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^4 = (1 - i)^4$.

Construire les images dans le plan complexe.

Exercice 40 :

- 1) Linéariser l'expression : $\left[\cos^2 \left(\frac{3}{2}\theta \right) - \sin^2 \left(\frac{3}{2}\theta \right) \right] \times \cos 3\theta$
- 2) Déterminer le module et un argument du nombre complexe z tel que : $z = (1 + \cos x + \cos 2x) + i(\sin x + \sin 2x)$

Exercice 41 :

- 1) Calculer le module et un argument du nombre $U = \frac{1}{1 + i \tan \theta}$ (On discutera suivant les valeurs de θ)
- 2) Linéariser : $\sin^3(2\theta) \cdot \cos^2(2\theta)$

Exercice 42 :

Pour chaque réel $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$, on définit l'application f_α de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f_\alpha(z) = z^2 \cos^2 \alpha - 2z \cos \alpha + 1 + \sin^2 \alpha$$

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On désigne par E l'ensemble des points M d'affixe z telle qu'il existe $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$, vérifiant $f_\alpha(z) = 0$.

$\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$, vérifiant $f_\alpha(z) = 0$.

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f_\alpha(z) = 0$.
- b) Si le point $M(z)$ appartient à E , que peut-on dire du point M' d'affixe $\bar{z}$?
- 2) Pour fixer, on pose : $Z = \frac{1}{2}i(z' + z'') \cos \alpha$, où z' et z'' sont les solutions de l'équation $f_\alpha(z) = 0$.

Déterminer les racines quatrièmes de Z et représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 43 :

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, soit M le point d'affixe z , on pose $z = x + yi$, $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$. Soit A le point d'affixe $-3i$ et M' d'affixe z' avec $z' = x + 3iy$.

- 1) Quelle condition doit vérifier z pour que l'on ait $M \neq A$ et $M' \neq B$?
- 2) Cette condition étant vérifiée, démontrer que :

$$[(AM) \parallel (BM')] \Leftrightarrow \left[\frac{z-i}{z'+3i} \in \mathbb{R}_+^* \right]$$

En déduire l'ensemble (E) des points M tels que $(AM) \parallel (BM')$.

- 3) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que B , M et le point d'affixe iz soit alignés.

Exercice 44 :

Soit le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 + (39i - 14)z + 50$$

- 1) Montrer que $P(z)$ admet une racine z_0 imaginaire pure.
- 2) Résoudre l'équation $P(z) = 0$. On notera z_1 la racine non imaginaire pure ayant la plus petite réelle ; et z_2 la troisième racine.
- 3) Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_0 ; z_1 ; z_2$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$.

Exercice 45 :

On considère l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^2 - (9 + 2i)z + 26$$

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 la solution de $f(z) = 0$ qui a la plus grande partie réelle et z_2 l'autre racine.
- 2) Soit A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .
Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = 2$.
- 3) On pose $z = x + yi$. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe tels que $f(z)$ soit un réel. Préciser sa nature.

Exercice 46 :

A) Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 - (1 + i)z^2 - 4 + 4i.$$

- 1) Vérifier que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 que l'on déterminera.
- 2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
b) Calculer le module et l'argument principal des trois solutions de l'équation $f(z) = 0$. On désignera par z_3 la troisième solution.
- 3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on désigne par $M_1 ; M_2$ et M_3 les points d'affixe respectives $z_1 ; z_2$ et z_3 .
Placer ces points. Préciser la nature du triangle $M_1M_2M_3$.

B) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : $mz^2 - (m^2 + 4)z + 4m = 0$ (1) où m est un paramètre complexe.

- 1) Résoudre l'équation (1) pour $m = 1 + i$. En désignant par z_1 et z_2 les solutions obtenues ; montrer que : $z_2 = \frac{4}{z_1}$.
Pouvait-on prévoir ce résultat ?
- 2) Donner la forme générale des solutions de l'équation (1) dans $\mathbb{C}$.
- 3) On se place dans le cas où les deux solutions de l'équation (1) sont des nombres conjugués. Déterminer leur module.
- 4) Montrer que si l'équation $z^2 - Sz + 4 = 0$ admet deux solutions conjuguées, alors S est un réel vérifiant : $-4 \leq S \leq 4$.
- 5) Calculer les solutions z_0 et $\bar{z}_0$ lorsque $S = -2$.
Donner leur forme trigonométrique. Représenter les solutions dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
- 6) Calculer z_0^5 et $\bar{z}_0^5$ puis montrer que : $\frac{z_0^5}{16} = \bar{z}_0$ et $\frac{\bar{z}_0^5}{16} = z_0$.

Exercice 47 :

Soit le polynôme complexe P tel que :

$$P(z) = \sqrt{6}(z^4 + 1) - 2(1 + 2i)(z^3 - z) - 2\sqrt{6}z^2$$

Calculer $P(1)$ et $P(-1)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 48 :

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : $-z^3 + (4 + i)z^2 + (8 + 6i)z + 4 + 28i = 0$.

- 1) Montrer que cette équation admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.
- 2) Trouver les nombres complexes α et β tels que l'équation puisse s'écrire : $(z - z_0)(-z^2 + \alpha z + \beta)$
Déduez-en les autres solutions z_1 et z_2 de cette équation. (on désignera par z_1 la solution dont la partie réelle est négative et z_2 la troisième solution).
- 3) On considère un plan P rapporté à un repère orthonormé. On désigne par A, B, C les points de P d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 . Placer les points A, B, C et déduire la nature du triangle ABC .

4) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points $M(x ; y)$ du plan P tels que : $MA^2 + MB^2 - MC^2 = 3$

Exercice 49 :

On considère le nombre complexe $X = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

- 1) Mettre X sous la forme trigonométrique.
- 2) z étant un nombre complexe donné, on considère la suite (U_n) définie par : $U_1 = z$ et $U_n = U_{n-1} \times x$ pour $n \geq 2$.
- a) Calculer $U_1 ; U_2 ; U_3$ sachant que $U_1 \times U_2 \times U_3 = 2(1 - i)$ on prendra $\arg(z) \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$.
- b) Montrer que U_1, U_2, U_3 forment une progression géométrique dont on déterminera la raison.
- c) Montrer que les arguments de U_1, U_2, U_3 forme une progression arithmétique dont on déterminera la raison.

Exercice 50 :

Soit P le polynôme tel que, pour tout z complexe :

$$P(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 - (14 - 39i)z + 50.$$

- 1) Montrer que $P(z) = 0$, admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on calculera.
- 2) Résoudre alors $P(z) = 0$, on note z_1 la solution non imaginaire pure ayant la plus petite partie réelle ; z_2 la troisième solution.
- 3) Soit A, B, C les points du plan euclidien d'affixes respectives $z_0 ; z_1 ; z_2$. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$.

Exercice 51 :

- 1) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$Z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; \quad Z_0 = -\sqrt{3} + i ; \quad Z = \frac{z_1}{z_0}$$

$$2) \text{ Calculer } A = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{36}.$$

- 3) Linéariser $\cos^6 x$.

4) Résoudre $z \in \mathbb{C}$; l'équation : $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$. (On écrira les solutions sous forme trigonométrique).

Exercice 52 :

Soit le polynôme complexe $f(z) = z^3 - (1 + i)z^2 - 4 + 4i$

- 1) Vérifier que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle $z_0 = 0$ et une solution imaginaire $z_1 = bi$ que l'on déterminera.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.
- 3) Calculer le module et un argument de chacune des solutions de $f(z) = 0$.

Exercice 53 :

- 1) a) Linéariser $\cos 2x \cdot \sin x$
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = -i$
- 2) Soient a et b les nombres complexes définis par : $a = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$ et $b = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{3\sqrt{6}}{2}i$
a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $q = \frac{b}{a}$
b) Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes a, b, q .
c) Dédire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 3) Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z^3 + (4 + 8i)z^2 + (-26 + 32i)z - 60 + 32i$.
a) Calculer $f(-2)$. En déduire que $f(z)$ peut s'écrire sous la forme : $f(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont des nombres complexes que l'on déterminera.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. On désigne par z_0 la solution réelle ; par z_1 la solution dont la partie réelle est positive et z_2 la solution dont la partie réelle est négative.
c) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_0 ; z_1$ et z_2 .
On pose : $U = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. Calculer le module et l'argument principal de U , puis en déduire la nature du triangle ABC .

Exercice 54 :

- 1) a) Trouver les racines carrées du nombre complexe $z = -8 - 6i$.
b) En déduire la résolution de l'équation : $z^2 - (1 + i)z + 2i + 2 = 0$.
c) Ecrire les solutions de cette équation sous forme trigonométrique et exponentielle.
- 2) Linéariser : $\sin^4 \frac{x}{2}$.

Exercice 55 :

- I) 1) On donne les nombres complexes :
 $z_1 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$; $z_2 = \frac{5i-1}{3-2i}$ et $z_3 = \sqrt{3} + i$
a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
b) Calculer z_3^{12} .
- II) Soit $f(z) = z^3 - (4 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 7i + 4$
1) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on donnera.
2) Trouver les nombres complexes a , b et c tels que :
 $f(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$
3) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (4 + 2i)z + 7 + 4i = 0$.
b) En déduire la résolution de l'équation $f(z) = 0$.
4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$; on donne les points A , B , C d'affixes respectives $2 - i$; i ; $2 + 3i$.
a) Placer les points A ; B et C .
b) Calculer : AB , AC , BC . En déduire la nature du triangle ABC .
c) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que : $AM^2 + BM^2 = 12$.

Exercice 56 :

- 1) Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
 $T = \frac{-1+i}{2}$; $Z = \frac{-1-i}{2}$; $U = \frac{T}{Z}$.
- 2) Linéariser $\sin^3 x$.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^4 = 8 - 8i\sqrt{3}$. (on mettra les solutions sous forme trigonométrique)

Exercice 57 :

- 1) Soit le polynôme $P(X) = -X^3 - 6X + 20$. Calculer $P(2)$.
- 2) On considère le polynôme complexe $f(z) = z^3 - 6z + 20i$.
Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
- 3) Trouver les nombres complexes P et Q tels que :
 $f(z) = (z - z_0)(z^2 + Pz + Q)$. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de $f(z) = 0$.
(On désignera z_1 la solution nom imaginaire pure dont la partie réelle est négative et z_2 la troisième solution)
- 4) Soient A ; B ; C les images respectives de z_0 ; z_1 ; z_2 . Placer ces points dans le plan complexe et en déduire la nature du triangle ABC .
- 5) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points $M(x ; y)$ du plan tels que :
 $BM^2 + CM^2 \leq 36$.

Exercice 58 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $\frac{2z+1}{2iz+1} = \frac{2iz+3i}{1-z}$
- b) $2z + \bar{z} - iz - 7 - i = 0$
- c) $z^2 + (1 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$

Exercice 59 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les nombres complexes on considère les nombres

$$z_1 = \frac{(2\sqrt{3}+11)+(11\sqrt{3}-2)i}{2+11i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4+2i}{3-i}$$

- 1) a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique
b) Déterminer le module et un argument de chacun des complexes z_1 et z_2 .
- 2) On pose $Z = \frac{z_2}{z_1}$.
a) Ecrire Z sous forme trigonométrique puis algébrique.
b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et de $\sin \frac{5\pi}{12}$.
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin x = 2$

Exercice 60 :

Soient Z_0 ; Z_1 ; Z_2 ; Z_3 quatre nombres complexes tels que :

$$Z_1 = iZ_0 ; Z_2 = iZ_1 \text{ et } Z_3 = iZ_2$$

1) Vérifier que $Z_2 = -Z_0$ et $Z_3 = -Z_1$.

2) On pose $Z_0 = 1 + i$.

a) Ecrire Z_1 ; Z_2 et Z_3 sous la forme $x + yi$ où x et y sont des réels

b) Calculer les modules de Z_0 ; Z_1 ; Z_2 et Z_3 .

c) Montrer que Z_0 ; Z_1 ; Z_2 et Z_3 sont des solutions complexes de l'équation : $(z^2 - 2iz - 2)(z^2 + 2iz - 2) = 0$

d) Placer dans le plan complexe les points A , B , C et D d'affixes respectives Z_0 ; Z_1 ; Z_2 et Z_3 . Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

Exercice 61 :

On considère l'équation (E): $2z^3 - (1 - i)z^2 + (1 + i)z + 2i = 0$.

1) Démontrer que l'équation admet une solution imaginaire pure.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3) Mettre les solutions de (E), sous la forme trigonométrique.

Exercice 62 :

On considère l'équation ; $z \in \mathbb{C}$: $2z^2 + bz + 2 = 0$ où b désigne un nombre complexe.

1) Calculer le nombre b pour que $1 + i$ soit solution de cette équation. Trouver l'autre solution.

2) On désigne par z_1 et z_2 les solutions de cette équation. Calculer $Z_1^4 + Z_2^4$

Exercice 63 :

2) Soit f , l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$$

a) Trouver les deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait :

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$$

c) Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ les images A , B , C , D des solutions de l'équation précédente. Puis

montrer que ces points sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 64 :

1) Soit la suite de points M_n du plan complexe, d'affixes respectives définies par :

$$Z_0 = 8 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} Z_n.$$

a) Calculer le module et un argument de $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.

b) Calculer Z_1 , Z_2 , Z_3 et vérifier que Z_3 est un réel. Placer dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ les points M_0 , M_1 ; M_2 et M_3 .

c) Calculer le rapport $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$. En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que : $|Z_{n+1} - Z_n| = \sqrt{3}|Z_{n+1}|$.

Exercice 65 :

$\mathbb{C}$ désignant le corps des nombres complexes, soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 - 3(1 + i)z^2 + (3 + 10i)z + 3(1 - 3i)$$

1) Calculer les nombres complexes a , b , c pour que :

$$f(z) = (z - 1 - i)(az^2 + bz + c).$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3) Montrer que les points images dans le plan complexe, des solutions de cette équation sont alignés.

Exercice 66 :

1) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On donne les points A , B et C d'affixes respectives :

$$z_B = 2 + 2i\sqrt{3} ; z_C = 2 - 2i\sqrt{3} \text{ et } z_A = \frac{z_C - z_B}{2}$$

a) Vérifier que B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4

b) Calculer z_A et trouver la nature du triangle ABC .

2) a) Effectuer $(1 + 2i)^3$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes d'équation (E): $z^3 + 11 + 2i = 0$

Exercice 67 :

A) On donne $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$

1) Vérifier que $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

b) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique.

B) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On donne les complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - i; \quad z_2 = \sqrt{3} + i; \quad z_3 = 2i$$

1) Représenter dans le plan les points $M_1; M_2$ et M_3 d'affixes respectives $z_1; z_2$ et z_3 .

2) Montrer que ces trois points appartiennent à un même cercle de centre O

3) Montrer que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange.

Exercice 68 :

Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$f(z) = z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i$$

On considère le point $A(0; 1)$ d'affixe z_A

1) Vérifier que z_A est une solution de l'équation $f(z) = 0$

2) a) Trouver les réels p et q tels que $f(z) = (z - z_A)(z^2 + pz + q)$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

3) On note P le plan complexe muni d'un repère orthonormé. Soient z_A et z_1 (de partie imaginaire positive) et z_2 les solutions de $f(z) = 0$.

Soit B et C les points de P d'affixes respectives z_1 et z_2 . Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 69 :

On considère le polynôme P de la variable complexe z définie par :

$$P(z) = z^3 + iz^2 - 3z + 5i$$

a) Calculer $P(i)$ puis déterminer toutes les racines de $P(z) = 0$. On notera z_1 la racine dont la partie réelle est négative et z_2 l'autre racine.

b) Ecrire sous la forme trigonométrique le nombre complexe $T = \frac{z_1 - i}{z_2 - i}$

c) Dans le plan complexe muni du repère $(0; \vec{u}, \vec{v})$ on désigne par A, B et C les

images respectives de i, z_1 et z_2 .

Déduire de la question précédente la nature du triangle ABC

Exercice 70 :

On considère le polynôme f définie par $f(z) = z^3 - 4z^2 + 13z + 50$

1) a) Calculer $f(-2)$

b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que :

$$f(z) = (z + 2)(z^2 + az + b)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

3) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-2; z_1$ et z_2

(la solution de l'équation $f(z) = 0$ dont la partie imaginaire est négative est notée z_1 et z_2 l'autre équation)

Calculer $AB; AC$ et BC . En déduire la nature du triangle ABC

Exercice 71 :

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 16 = 0$

b) Vérifier que pour tout nombre complexe z :

$$(z + 4)(z^2 - 4z + 16) = z^3 + 64$$

c) En déduire les solutions de l'équation $z^3 + 64 = 0$

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_1 = 2 + 2i\sqrt{2}; \quad z_2 = -4 \quad \text{et} \quad z_3 = 2 - 2i\sqrt{2}$$

a) Ecrire $z_1; z_2$ et z_3 sous forme trigonométrique et exponentielle.

b) Placer les points A, B et C dans le plan.

c) Calculer les longueurs AB, AC et BC . En déduire la nature du triangle ABC

3) a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $z = -5 + 12i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (2 - 3i)z - 6i = 0$

Exercice 72 :

1) Déterminer les racines cubiques de $z = -i$ sous forme trigonométrique et algébrique.

2) On donne les nombres complexes $z_1 = \frac{7-3i}{5+2i}$ et $z_2 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$. Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.

Exercice 73 :

Soit dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 32$

- 1) Vérifier que $z_0 = 4$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$
- 2) Factoriser $P(z)$ et déterminer les deux autres solutions z_1 et z_2 de l'équation $P(z) = 0$
- 3) Ecrire z_0 ; z_1 et z_2 sous forme trigonométrique et exponentielle.
- 4) Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives z_0 ; z_1 et z_2 . On pose $Z = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$

Calculer le module et un argument de Z . En déduire la nature du triangle ABC .

- 5) Linéariser $\sin^3 x$, en déduire une linéarisation de $\sin x \cos^2 x$

Exercice 74 :

I) soit la fonction polynôme $P(z) = z^3 - (3 + 5i)z^2 + (10i - 6)z + 8$

- 1) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.
- 2) a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $U = 2i$
 - b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. Soit z_1 et z_2 les deux autres solutions de $P(z) = 0$ telles que $R_e(z_1) < R_e(z_2)$.
 - c) Ecrire z_0 ; z_1 et z_2 sous forme trigonométrique et exponentielle.
 - d) Vérifier que $z_1 \times z_2 = 2z_0$
- 3) Soit A, B et C les points d'affixes respectives z_0 , z_1 et z_2 . Donner la nature du triangle ABC
- II) Linéariser : $\cos^3 2x$; $\sin^2 x \cdot \cos x$

Exercice 75 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$
- 2) Ecrire sous la forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_2 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$$
- 3) On donne $z = 1 - i\sqrt{3}$, calculer z^{18} .
- 4) $\forall z \in \mathbb{C}$, on pose : $f(z) = z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i$.

a) Vérifier que $f(-i) = 0$

b) Vérifier que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (z + i)(z^2 - 16z + 89)$.

c) Résoudre l'équation : $f(z) = 0$

Exercice 76 :

On considère le nombre complexe $z = (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3})$

- 1) Calculer sous forme algébrique z^2
- 2) Trouver le module et un argument de z^2 ; en déduire le module et un argument de z .
- 3) en déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{17\pi}{12}$ et $\sin \frac{17\pi}{12}$
- 4) En utilisant ce résultat, résoudre pour $x \in]-\pi ; \pi]$ l'équation : $(1 - \sqrt{3}) \cos x - (1 + \sqrt{3}) \sin x = 2$

Exercice 77 :

Au nombre complexe z de module 1 et d'argument θ , on associe le nombre complexe $T = z + 1 + \frac{2z+1}{z^2+z+1}$

- 1) Pour quelles valeurs de z , T est-il défini ?
- 2) $\bar{z}$ étant le conjugué de z , montrer que T peut s'écrire : $T = z + 1 + \frac{2+\bar{z}}{z+\bar{z}+1}$
En déduire, en fonction de θ , la partie réelle X et la partie imaginaire Y de T
- 3) a) Déterminer θ pour que T soit réel
b) T peut-il être imaginaire pur ? justifier ta réponse.

Exercice 78 :

A tout nombre réel α l'équation $(E_\alpha) : \alpha z^2 - 2z + 1 = 0$.

- a) Pour quelles valeurs de α l'équation (E_α) n'a-t-elle pas de racine dans $\mathbb{R}$? Exprimer alors en fonction de α les racines de (E_α) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexe.
- b) Résoudre les équations E_0 ; E_1
- c) Déterminer l'ensemble S des valeurs de α pour lesquelles E_α a deux racines réelles, distinctes ou confondues $\alpha z_2 \leq \alpha z_1$

Exercice 79 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0 ; \vec{u} ; \vec{v})$

1) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(z + \frac{1}{2} + i\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$

2) On donne les points $A(-1 ; -5)$ et $B\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{6}\right)$. A tout point M d'affixe z ,

$(z \neq -1 - 5i)$, on associe le point M' d'affixe z telle que : $Z = 3i \left(\frac{z - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}i}{z + 1 + 5i} \right)$

- Déterminer l'ensemble (Γ) des nombres complexes tels que $Z = z$;
- Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $|z| = 3$
- Déterminer l'ensemble (Δ) des points M tels que M' décrit le cercle de centre, l'origine O du repère et de rayon 1
- Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que M' décrit le demi axe $[O ; u[\text{privé de } \{0\}]$

Exercice 80 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, le polynôme complexe :

$$f(z) = z^3 - 2(2 + 3i)z^2 - 4(1 - 5i)z + 16(1 - i)$$

a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle $z_0 = a$.

En déduire les autres solutions de $f(z) = 0$

- Représenter dans le plan complexe, les images des solutions de cette équation.
- Démontrer que les solutions de $f(z) = 0$, constituent les trois premiers termes d'une suite géométrique dont le premier terme est u_0 et dont on donnera la raison. Calculer le 17^{ème} terme u_{16} et écrire le terme général u_n de cette suite. Déterminer n pour que u_n appartienne à $\mathbb{Z}$.

Exercice 81 :

Dans le plan complexe, on considère les points $A ; B ; C$ et M d'affixes respectives : $2 + 3i ; -4 + 3i ; 2 - 3i$ et $x + yi$

1) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que :

$$|z + 4 - 3i| = |z - 2 + 3i|$$

2) Soit $z = \frac{z-2-3i}{z-2+3i}$ ($z \neq 2 - 3i$). Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que Z soit un imaginaire pure positif.

3) Soit k , le point d'affixe $(-iz)$; déterminer l'ensemble (E_2) des points M pour que $A ; M$ et K soient alignés.

4) a) Calculer $(2 + 3i)^4$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -119 - 120i$

Exercice 82 :

Soit P l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$P(z) = 2z^3 - (1 + 2i)z^2 + (25i - 1)z + 13i$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

- Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle (α) que l'on déterminera.
- Transformer $P(z)$ en un produit de deux facteurs, l'un du 1^{er} degré, l'autre du second degré

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On appelle b et c les autres solutions autre que a ; b étant celle dont la partie réelle est positive.

3) Soit $A ; B$ et C affectés des coefficients 10 ; β et γ ; d'affixe respectives $a ; b$ et c . Déterminer les points réels β et γ tels que : O soit le barycentre

Exercice 83 :

1) soit P le polynôme de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 - 3(1 - 4i)z + 9$$

a) Calculer $P(3)$

b) Montrer que pour tout z dans $P(z) = (z - 3)(z^2 - 4iz - 3)$

c) On pose $z = u + 2i$. Ecrire $z^2 - 4iz - 3$ sous forme $Q(u)$, avec Q un polynôme de degré 2.

d) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Q(u) = 0$

e) Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$

2) On pose : $Z = \frac{1}{1+i \tan \alpha}$. Calculer le module et un argument de Z . (On discutera suivant les valeurs du réel α)

3) En utilisant les racines cubiques de l'unité, résoudre l'équation d'inconnue z : $z^3 = (1 + i\sqrt{12})^3$

Exercice 84 :

$\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes et $P(z)$ est le polynôme à variable complexe z définie par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10$$

- 1) Vérifier que si z_0 est zéro de $P(z)$, alors son conjugué $\overline{z_0}$ est aussi un zéro de $P(z)$.
- 2) Vérifier que $1 - i$ est un zéro de $P(z)$.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- 4) Représenter dans le plan complexe les points images des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 85 :

A) A tout nombre complexe z on considère le nombre complexe $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$

- a) Déterminer l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles Z est défini.
- b) Déterminer les ensembles des points M dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :

- * $|Z| = 1$
- * Z est un réel ;
- * Z est un imaginaire pur.

B) On pose $E = \mathbb{C} - \{i\}$ où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes ; f l'application de E dans $\mathbb{C}$ définie par :

$z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$. Soit M le point d'affixe z dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$

- 1) Déterminer les coordonnées du point B d'affixe z_0 telle que $f(z_0) = 1 + 2i$.
- 2) Soit z élément de E . On désigne par r le module de $z + i$ et θ une mesure de son argument. Exprimer la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et de θ .
- 3) Soit A le point d'affixe $-i$.
- a) Déterminer l'ensemble C des points M dont l'affixe z vérifie : $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z) - i$
- b) Montrer que B appartient à C et D . Construire C et D .

Exercice 86 :

On considère l'équation $(E) : z^3 + (9i - 4)z^2 - (19 + 24i)z + 36 - 3i = 0$

- 1) Résoudre (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.
- 2) Montrer que les points images des solutions appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
- 3) Soient $A ; B$ et C les points d'affixes respectives $a ; b$ et c
- a) Résoudre le système d'inconnues $a ; b$ et c

$$\begin{cases} a + b + c = 4 - 9i \\ a - b + c = -7i \\ a + b - c = 4 - 3i \end{cases}$$

- b) Calculer $\frac{a-c}{b-c}$, et en déduire la nature du triangle ABC

Exercice 87 :

On considère l'équation $(E) : z^3 - z^2 + 3z + 5 = 0$

- 1) Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera
- 2) En déduire la résolution de (E) . On note z_0 la solution réelle, z_1 la solution dont la partie imaginaire est négative, et z_2 la solution dont la partie imaginaire est positive.
- 3) Soient $A ; B$ et C les points d'affixes respectives $z_0 ; z_1$ et z_2 . Déterminer la nature du triangle ABC .

Exercice 88 :

z est un nombre complexe différent de 1

- 1) Comparer $|z - 1|$ et $|\overline{z} - 1|$
- 2) On pose $z' = \frac{z-1}{\overline{z}-1}$. Déterminer $|z'|$. On appelle $A ; B ; M$ et M' les points du plan complexe d'affixes respectives $1 ; -1 ; z$ et z' .
- 3) Calculer en fonction de z et z' le nombre $r = \frac{z'+1}{z-1}$ et en déduire que r est un réel.
- 4) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.

Exercice 89 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$ (1)

2) Exprimer les solutions z_1 et z_2 de (1) en fonction de $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

- 3) a) Calculer le module et l'argument de a et b
- b) Représenter les points images de a et b dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- c) En déduire une construction des points C et D d'affixes respectives z_1 et z_2 .
- d) Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 .
- 4) Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 90 :

- 1) Soit le polynôme complexe $f(z) = z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i$
- a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
- b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
- 2) Soient les points A, B et C du plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'affixes respectives $z_A = i$; $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = 2 - 3i$
- a) Déterminer l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ qui transforme B en B' .
- b) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B et de rapport 5 qui transforme C en C' .
- c) Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme A en A'

Exercice 91 :

- Soit $P(z) = z^4 + (2i - 9)z^3 + (28 - 18i)z^2 + (56i - 20)z - 40i$
- 1) a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 et une solution réelle z_1 .
 - b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
 - 2) Soient $A; B; C$ et D les points d'affixes respectives :
 $z_A = -2i$; $z_B = 4 - 2i$; $z_C = 4 + 2i$ et $z_D = 1$.
 Placer les points $A; B; C$ et D dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
 - 3) Soit l'application $f: P \rightarrow P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ avec } z' = \frac{z-4-2i}{z+2i}$$

- a) Déterminer les images B' et C' des points B et C par f .
- b) Interpréter géométriquement $|z'|$ et $\arg(z')$.
- c) Montrer que les points $A; B'$ et C' sont alignés.
- d) Quelle est la nature du triangle $B'DC'$?

Exercice 92 :

Soit f l'application de $E = \mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on note M le point d'affixe z .

Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que : $f(z_0) = 1 + 2i$

- 2) Soit z un élément de E . On note r le module de $z + i$ et α une mesure de son argument. Exprimer la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et de α
- 3) soit A le point d'affixe $-i$

- a) Déterminer l'ensemble (C) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble (D) des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z) - i$
- b) Montrer que B appartient à (C) et (D) , et construire (C) et (D) .

Exercice 93 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = (1 + i\sqrt{12})^3$
- 2) Soit l'équation $(E): z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$
- a) Montrer que (E) admet des solutions imaginaires pures. Résoudre (E) .
- b) Soient A, B, C et D les points d'abscisses respectives $-3i$; $2 - i$; $2 + i$ et $3i$. Déterminer l'affixe du centre de gravité de $[A, B, C, D]$.
- c) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 64$