

Documment

Chadrel Banaka Nziengui

18 juillet 2016

1 LES NOMBRES COMPLEXES

Exercices 1

- 1) Qu'appelle t-on conjugué d'un nombre complexe ?
- 2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) : $Z^3 = 1$
 - a) On donnera les résultats sous forme algébrique
 - b) Justifier que les solutions sont deux à deux conjuguées
- 3) Montrer que $Z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ est solution de (E') : $Z^3 = 8$
- 4) Soit z'_0, z'_1, z'_2 les solutions de (E'), z'_1 et z'_2 sont deux complexes conjugués.
 - a) Utiliser les solutions de (E) pour déduire les solutions de l'équation (E').
 - b) Montrer que $\frac{z'_1}{z'_2}$ est solution de (E).

Exercices 2

On considère le polynome P défini par :

$$P(z) = z^3 - (1 + 5i)z^2 + (i - 5)z + 8i$$

- 1) On pose : $z_0 = 2i$. Calculer $P(z_0)$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$
- 3) On désigne par z_1, z_0 et z_2 ces racines.
 - a) Ecrire z_1, z_0 et z_2 sous forme trigonométrique.
 - b) Montrer que z_1, z_0 et z_2 pris dans cet ordre, sont en progression géométrique

Exercices 3

1) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynome suivant :

$$P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128. \text{ Calculer } P(8). \text{ Que peut-on en déduire ?}$$

- 2) Déterminer trois réels a , b et c tels que :
 $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = (z - 8)(az^2 + bz + c)$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
- 4) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$; $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$; $z_C = 8$
- a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S transformant B en A et laissant C invariant.
- b) En déduire les éléments caractéristiques de S (Centre, rapport et angle).

Exercices 4

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère les nombres suivants :

$$Z_1 = 1 + i; Z_2 = \sqrt{3} + i; \text{ et } Z_3 = (Z_1)^3 Z_2$$

- 1) Ecrire le nombre complexe Z_3 sous la forme algébrique
- 2) Ecrire les nombres complexes Z_1, Z_2, Z_3 sous la forme trigonométrique.
- 3) En comparant les écritures algébriques et trigonométriques, donner les valeurs réelles de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

Exercices 5

Donner la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

- a) $Z' = Z + 1 + i$; b) $Z' = -3Z + 4i$; c) $Z' = Z + 1 + 2i$; d) $Z' = -2iZ + 3i$;
 e) $Z' = -iZ + 1$; f) $Z' = (1 + i)Z + 1$; g) $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}} Z$; h) $Z' = 2e^{i\frac{\pi}{4}} Z$; i)
 $Z' = (1 - i)Z$

Exercices 6

Donner l'écriture complexe des transformations suivantes :

- a) $R(A; \frac{\pi}{3})$; $Z_A = i$; b) $T_{\vec{u}}; \vec{u}(1 + i)$; c) $h(\Omega; 3)$; $\Omega(1 - 3i)$; d) $S(\Omega; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{4}; \omega(i)$

Exercices 7

Soit $A(2-i)$; $B(1-3i)$. Donner l'écriture complexe de $T_{\vec{u}}$, tel que $T_{\vec{u}}(A) = B$

Exercices 8

$$Z_A = 6 + 3i; Z_B = 2 + 4i$$

- a) Donner l'écriture complexe de la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$
b) Déterminer l'affixe du point B' image de B par $R(0; \frac{\pi}{2})$.
c) Déterminer l'affixe du point A' image de A par R.

Exercices 9

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{u}; \vec{v})$. Donner l'écriture complexe de la similitude plane directe dans chacun des cas suivants.

- a) $S(A) = A; S(B) = C; Z_A = 1; Z_B = -2 + i; Z_C = i$
b) $S(O) = A; S(B) = B; Z_A = 1 + i; Z_B = 1 - i$
c) $S(O) = A, S(A) = B, Z_A = 1 + i, Z_B = -i$

Exercices 10

Le plan complexe est rapporté à un repère $(0; \vec{u}; \vec{v})$. $A(i); B(e^{-i\frac{5\pi}{6}})$.

- 1) Soit $R(0; \frac{2\pi}{3})$; le point C est image du point B par R

- a) Déterminer une écriture complexe de R, puis montrer que $Z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$
b) Ecrire les nombres complexes Z_B et Z_C sous forme algébrique, puis placer A, B et C.
2) Soit D le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 2, -1; 2.

Montrer que $Z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

- 3) Soit $h(A; 2)$ et $h(D) = E$. Donner l'écriture complexe de h, puis montrer que $Z_E = \sqrt{3}$

Exercices 11

I) Déterminer la nature et caractéristique de la transformation f définie par :

a) $Z' = -3Z + 2i$

b) $Z' = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})Z + \frac{1}{2}$

II) 1) Dans le plan complexe on définit le polynome P par :

$$P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i$$

- Montrer que P admet une racine imaginaire pure
- Factoriser P(z), puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
- Soit A, B, C les points du plan complexes ayant pour affixe respective Z_A racine imaginaire pure, Z_B la racine dont la partie réelle est 1, Z_C la troisième racine de $P(z)=0$. Soit S la similitude plane directe de centre A et qui transforme C en B.

Déterminer l'angle et le rapport de S.

- Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = (1-i)z + i$$

- Caractériser la transformation T du plan complexe qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$. On note w le point invariant par T.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = z^2$ placer dans le plan les points images des solutions transformés par T. Montrer que la figure formée par ces points est un triangle rectangle isocèle.

Exercices 12

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$. Ecrire les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

- Placer les images A et B des solutions, A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est négative. Quelle est la nature du triangle OAB ?

- Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$.

- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f
- Déterminer sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique l'affixe du A' , image de A par f. En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercices 13

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^4 = 1$$

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$$

- Soit n un entier naturel non nul, a un nombre complexe et l'équation (E) :

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = a.$$

on désigne par P, Q et M les points d'affixes respectives i, -i et a.

- a) Démontrer que si z est solution de (E) alors : $\frac{MP}{MQ} = \sqrt[3]{|a|}$. b) Démontrer que si (E) admet au moins une solution réelle, alors : $|a| \leq 1$.
 c) En déduire que si (E) admet au moins une solution réelle, alors toutes ses solutions sont réelles.

Exercices 14

Soit l'équation (E) :

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0 (z \in \mathbb{C}).$$

1) Démontrer que si z_0 est solution de (E), alors $\bar{z}_0$ est solution de (E).

2) a) Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$(E) \Leftrightarrow z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} + b \right) \right] = 0$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$, puis l'équation (E)

3) Démontrer que les images des quatre solutions de (E) appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercices 15

Soit l'équation (E) : $z^5 = 1$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et représenter les images des solutions.

2) Démontrer que la somme des solutions de (E) est nulle et en déduire que :

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$$

3) Démontrer que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation :

$$4X^2 + 2X - 1 = 0.$$

En déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

4) Soit l'équation $E' : (z-1)^5 = (z+1)^5; (z \in \mathbb{C})$.

a) Démontrer que si z_0 est solution de E' , alors : $\left| \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} \right| = 1$.

En déduire que les solutions de E' sont imaginaires pures.

b) Résoudre E'

Exercices 16

Soient les complexes $Z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{-\sqrt{3} + i}$ et $Z_2 = \frac{4i}{1 - i\sqrt{3}}$

1) Déterminer le module et un argument de chacun de ces complexes.

2) Déterminer sous la forme exponentielle les complexes Z_3 et Z_4 sachant que :

$$Z_1 \times Z_3 = 2 \cos \frac{\pi}{6} - 4i \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \text{ et } Z_2 \times Z_4 = -\frac{1}{4i}$$

Exercices 17

Dans le plan complexe orienté rapporté à un repère orthonormé $(0, u, v)$ directe. On l'application f qui au point $M(x, y)$ associe le $M'(x', y')$ définie par :

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

- 1) Trouver l'expression de l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M .
- 2) En déduire la nature de f .

Exercices 18

- 1) Déterminer le module et l'argument principal du nombre complexe

$$Z = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

- 2) En déduire la valeur de $\left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4} \right)^{-12}$

Exercices 19

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue Z suivant :

$$(E) : Z^3 - 2(5 + 3i)z^2 + (17 + 40i)z + 10(4 - 5i) = 0$$

- 1) Démontrer que (E) admet une racine imaginaire pour que l'on déterminera et que l'on désignera par z_0 .
- 2) Acheter la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E), sachant que ses autres racines seront désignées par z_1 et z_2 telles que $\text{Im}(z_2) > \text{Im}(z_1)$.
- 3) Placer dans un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 , puis en déduire l'étude de la nature du triangle ABC.