

EXERCICES NOMBRES COMPLEXES

TSE LBF 2022-2023

Exercice1 : I) Ecrire sous forme algébrique les produits :

$$(2+i)(1+i)^2(4-3i); \quad (1-i)(1+i)i; \quad \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

II) A tout nombre complexe z , on associe le nombre complexe Z défini par : $Z = iz^2 - (1+i)z + 1$

- Calculer Z pour successivement : $z = 1$; $z = -i$; $z = 1-i$ et $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$
- On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels .déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que $Z \in \mathbb{R}$. Représenter E

Exercice2 1) Soient les nombres complexes

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$$

a) Déterminer le module et un argument de chacun des deux nombres complexes z_1 et z_2

b) En déduire la forme algébrique de : $z_1 z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $z_2^6 \cdot \frac{z_1^5}{z_2^4}$

2) a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z' = \frac{2i}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}}$

3) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } \frac{1+i}{1-i} e^{-2i\frac{\pi}{3}} \quad \text{b) } \frac{1+i\sqrt{3}}{e^{3i\frac{\pi}{3}}} \quad \text{c) } \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}} \quad \text{d) } \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$$

Exercice3 : Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique:

5cm), on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

- Donne la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B .
- Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in]0; 2\pi[$. On considère l'application f qui à tout point M de (C) , associe $f(M) = MA \times MB$.
 - Montre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha} \sin \alpha$.
 - Montre l'égalité suivante : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) e^{i\alpha} \right|$.
 - En déduis l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2 \sin \alpha\right)^2}$.
- En utilisant 2.c., montre qu'il existe deux points M de (C) , dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.
 - En utilisant 2.c., montre qu'il existe un seul point M de (C) , dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.

Exercice4 : I) Soit $A(3+i)$, $B(2i)$, $C(2-2i)$

- Placer les points A , B , et C et démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle
- Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer le point D
- Déterminer l'affixe du point E , symétrique de A par rapport au milieu de $[B, C]$

II) Soit les points $A(-1+i)$, $B(-1-i)$, $C(2i)$ ET $D(2-2i)$

- Étudier la nature des triangles ACD et BCD
- Démontrer que les points A , B , C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice5 : Z_0, z_1, z_2 , et z_3 quatre nombre complexes tel que : $Z_1 = iZ_0$, $Z_2 = iZ_1$ et $Z_3 = iZ_2$

1) Vérifier que $Z_2 = -Z_0$ et $Z_3 = -Z_1$

2) On pose $Z_0 = 1+i$

- Écrire z_1, z_2 , et z_3 sous la forme $x + iy$ où x et y sont des réels
- Calculer les modules de z_0, z_1, z_2 , et z_3



II 1) On donne le complexe $z = \frac{3+7i}{2-5i}$.

a) Ecrire z sous forme algébrique.

b) Déterminer les racines cubiques de z .

2) On considère maintenant le complexe $f(z) = \frac{\bar{z}}{2-i}$ où $\bar{z}$ est le complexe conjugué de z .

a) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels.

Déterminer en fonction de x et y la partie réelle X et la partie imaginaire Y de $f(z)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = \frac{13-i}{5}$.

Exercice 13 : I) Soit les points $\Omega \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ et $A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right)$. dans chacun des cas suivants :

.Donner l'écriture complexe de la transformation

.Déterminer l'image de A par la transformation

a) Symétrie de centre Ω

b) Homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$

c) Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$

II) Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

1) Déterminer puis construire les ensembles de point M du plan dont l'affixe z vérifie les conditions données (avec $k \in \mathbb{Z}$):

a) $|z + 5 - 2i| = |\bar{z} - 2 + i|$; b) $|2z - 6 + 8i| = |2iz + 4i|$; c) $\left| \overline{1 + i\sqrt{3}} \right| = |iz - 1 + i|$;

d) $\arg(3i - z) = 2k\pi$; e) $\arg\left(\frac{1}{z+2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; f) $\arg\left(\frac{2-\sqrt{5}}{\bar{z}}\right) = k\pi$; g) $\arg(\bar{z} + 3 - i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$;

h) $\arg(-2i\bar{z}) = k\pi$.

2) Déterminer puis construire chacun des ensembles de points suivants :

a) $(E) = \left\{ M(z) \in P / \arg\left(\frac{z-i+2}{z+2i}\right) = \pi \right\}$ b) $(F) = \left\{ M(z) \in P / \arg\left(\frac{z+3-2i}{z}\right) = \frac{\pi}{2} \right\}$

c) $(G) = \left\{ M(z) \in P / \arg\left(\frac{z-2i}{z+i}\right) = 0 \right\}$

Exercice 14 : I) soit $z = \sqrt{3} + i$ un nombre complexe. comment doit on choisir l'entier relatif n pour que z^n soit un nombre imaginaire pur

II) Résoudre dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ le système
$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

NB : on utilisera $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$

Exercice 15 : Pour tout nombre complexe z , on pose

$f(z) = z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i$; $A(0, -1)$ d'affixe z_A

1) Vérifier que z_A est une solution de l'équation $f(z)=0$

2) a) Trouver les réels p et q tel que $f(z) = (z - z_A)(z^2 + pz + q)$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

3) On note P le plan complexe muni d'un repère orthonormé et z_A ; z_1 ; z_2 les solutions de l'équation $f(z) = 0$. soit B et C les points de P d'affixes respectives z_1 , z_2 ; quelle est la nature du triangle ABC

Exercice 16 : Soit les nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$

1) Déterminer le module et un argument des complexes z_1 ; z_2 et z_3 . En déduire que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 appartiennent à un même cercle que l'on déterminera. Faire la représentation graphique

2) On pose $z_4 = -2z_1 \left(\frac{z_2}{z_3} \right)^2$. mettre z_4 sous la forme algébrique

3) Déterminer les racines carrées de z_4

4) On pose $z_5 = -4z_1 z_3$. Déterminer les racines quatrièmes de z_5 . Faire la représentation graphique dans le plan

5) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$

b) Ecrire chacune des solutions sous forme exponentielle

Exercice17 : Le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et C désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $a = -1 + 3i$; $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

2) Déterminer l'affixe du point B' , image de B par la transformation f . Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux.

3) Soit $M(x; y)$ où x et y sont des entiers relatifs et M' son image par f . Montrer que les $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 2y = 2$.

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $x+3y = 2$ et en déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont les entiers appartenant à $[-5; 5]$.

Exercice18 : 1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$.

Ecrire les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b) Placer les images A et B des solutions, A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est négative. Quelle est la nature du triangle OAB ?

2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f .

b) Déterminer sous forme trigonométriques, puis sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par f . En déduire les valeurs de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice19 : On considère le nombre complexe Z défini par $Z = \frac{z^2}{z+i}$

où $z = x + yi$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1°/ On note $Z = X + Yi$ avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Ecrire X et Y en fonction de x et y .

2°/ Au complexe z on associe le point $M(x, y)$ d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul.

3°/ Mettre sous forme de produit de deux facteurs du 1^{er} degré le polynôme suivant :

$z^2 + 2z - 2$ (où $z \in \mathbb{C}$).

4°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2z - 2 = 0$. Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ) .

Exercice20 : I°/ On veut déterminer trois nombres complexes Z_1, Z_2 et Z_3 ; les modules de ces complexes forment une suite géométrique de raison $q = 2$ et leurs arguments une suite arithmétique de raison $r = \frac{2\pi}{3}$.

Déterminer ces trois nombres sachant que leur produit est $Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 4 + 4i\sqrt{3}$ et l'argument de Z_1 appartient à $]0; \frac{\pi}{2}[$. On donnera les résultats sous forme trigonométrique.

II°/ Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: $2 - 4i, -i,$

z et z' avec $z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z+i}$

1°/ Exprimez les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M .

2°/ Déterminez et représentez l'ensemble des points M tels que :

a) z' soit réel.

b) z' soit imaginaire pur.

3°/ On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifiez que $ZZ' = -3 + 4i$.

Puis calculez $|ZZ'|$.

4°/ a) Déterminez l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.

b) Déterminez r pour que M et M' soient sur le même cercle.

Exercice21 : 1- Pour tout nombre complexe, on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

a) Calculer $P(-1)$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait : $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

- 2) Le plan est muni d'un repère ortho normal direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 2cm). On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives $z_A = -1, z_B = 2 + i\sqrt{3}, z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $z_G = 3$
- Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G
 - Calculer les distances AB, BC , et AC . En déduire la nature du triangle ABC .
 - Calculer un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. En déduire la nature du triangle GAC

Exercice22 : On considère les nombres complexes : $a = -\sqrt{3} + i$; $b = 3 + 2i$ et $c = 7 - 2i$.

1.a) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a . En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

b) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre réel.

c) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre imaginaire pur.

2. Déterminer et construire les ensembles de point M d'affixe z tels que :

a) $|z - b| = |z - c|$ b) $2|z - b| = |a|$.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.

a) Démontrer que f admet un point invariant (Ω).

b) Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre Ω . Préciser l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie.

a) Déterminer et construire les images par f des ensembles déterminés à la question 2.

Exercice23: On considère l'équation d'inconnue complexe z , (E): $z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0$.

1°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

3°/ Achever la résolution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation (E).

4°/ En désignant par z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la 4^{ème} solution de (E), montrer que z_0, z_1, z_2 et z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

5°/ Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E)

Exercice24 : 1) Déterminer et construire les ensembles de points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée. a) $|z + \bar{z} - 1| = 4$, b) $|z - \bar{z} + 1 - i| = 2$, c) $|z + 5 - 2i| = |z - 2 + i|$, d) $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z - 1|$.

2) Pour tout nombre complexe $z \neq i$, on pose $Z = \frac{z+2}{z-i}$.

1°/ On pose $z = x + iy$.

a) Mettre Z sous forme algébrique

b) Préciser la partie réelle et la partie imaginaire de Z .

2°/ Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que Z soit réel

3°/ Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

4°/ Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$

Exercice25: Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée : a) $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 3 = 0$, b) $(z\bar{z})^2 - z\bar{z} - 6 = 0$, c) $(z - 1 - i)(\bar{z} - 1 + i) = 5$, d) $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$, e) $z^2 - (1 - 2i)^2 = \bar{z}^2 - (1 + 2i)^2$.

Exercice26: Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$.

a) Trouver les deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait :

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b).$$

b) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

c) Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O; u, v)$ les images A, B, C, D des solutions de l'équation précédente, puis montrer que les quatre points sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

Exercice27 : Pour $z \neq -i$ on pose $Z = \frac{z+2i}{1-iz}$ avec $z = x + iy$ où x et y sont des réels.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1°/ Z est réel

2°/ Un argument de Z est $-\frac{\pi}{2}$.

3°/ Le point N d'affixe Z est sur le cercle de centre A d'affixe i et de rayon $\frac{1}{2}$.

4°/ Les points $A(i)$, $M(z)$ et $N(Z)$ sont alignés.

5°/ $M = N$.

Exercice28 : Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

a) Démontrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et déduire que α et β sont des solutions de l'équation $(E): Z^2 + Z - 1 = 0$

b) Exprimer α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

c) Résoudre (E) et en déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

2. On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives $1, z_0, z_0^2, z_0^3$ et z_0^4 .

a) Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec la droite de repère $(O, \vec{e}_1)$.

Démontrer que l'affixe du point H est $\cos \frac{2\pi}{5}$.

b) Soit (Γ) le cercle de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i .

(Γ) Coupe la droite du repère $(O, \vec{e}_1)$ en M et N ; M étant le point d'abscisse positive.

Démontrer que M et N ont pour affixes respectives α et β et que H est le milieu de $[O, M]$.

c) En déduire une construction simple d'un pentagone régulier dont on connaît le centre et un sommet A_0 .

Exercice29 I) On donne le nombre complexe $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$

1) vérifier que $z^5 - 1 = 0$. En déduire la relation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

2) a) Exprimer z^2, z^3 , et z^4 sous forme trigonométrique.

b) Démontrer les égalités suivantes :

$$z + z^4 = 2 \cos \frac{2\pi}{5} \text{ et } z^2 + z^3 = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$$

3) Utiliser les résultats des questions 1 et 2 pour trouver une relation entre $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$ puis montrer que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est racine de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$, En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$

II) Soit θ un nombre réel tel que $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 + \cos 2\theta)z^2 - 2 \sin 2\theta z + 2 = 0$

Déterminer le module et un argument de chaque solution

Exercice30 : Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -1 + 3i$, $z_B = -2$ et $z_C = -\frac{3-3i}{2}$.

Soit f l'application du plan privé de A dans le plan qui, à tout point M d'affixe z distinct de z_A , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$.

1. Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 3iz - 2 = 0$.

2. Détermine les affixes des points invariants par f .

3. Détermine l'ensemble des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.

4. En posant $z = x + iy$, détermine $\text{Im}(z')$ en fonction de x et y . Déduis-en l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.

5. a. Montre que pour tout $z \neq -1 + 3i$, on ait l'équivalence :

$$\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z - z_C)(\overline{z - z_C}) = \frac{5}{2}.$$

b. Déduis-en l'ensemble des points M tels que M' ait une affixe imaginaire pure.