

NOMBRES COMPLEXES		
Prof : MOHAMED KONTA	Classe: TSE/TSExp	2024 - 2025

EXERCICE 1:

Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$a) \frac{2}{1-i}; \quad b) \frac{-1}{4i}; \quad c) \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)}; \quad d) \frac{(-5+7i)(4-2i)}{(3+4i)(7+5i)}; \quad e) \frac{(1-i)^2}{(1+i)^3};$$

$$f) \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3 \quad g) (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1); \quad i) (1+5i)^5 (-2+i\sqrt{2})^2$$

EXERCICE 2 :

Ecris sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$a) i(-1-i)^2; \quad b) (\sqrt{3}+i)(-1-i\sqrt{3}); \quad c) \frac{i}{1-i}; \quad d) \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{4}}; \quad e) \frac{e^{2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}};$$

$$f) \frac{5-5i}{10e^{i\frac{\pi}{4}}}; \quad g) \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{10}; \quad i) (3-3i)^2 (\sqrt{2}-i\sqrt{2})^6$$

EXERCICE 3 :

$$\text{Soit } J = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad U = 1+J$$

1) Démontrer que : $1+J+J^2=0$

2) Calculer U^n ($n \in \mathbb{N}^*$) en fonction de n

EXERCICE 4 :

$$\text{Soit } Z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$$

a) Ecris sous la forme exponentielle Z_1 et Z_2

b) En déduis la forme algébrique des nombres complexes : $Z_1 Z_2$; $\frac{Z_1}{Z_2}$; $(Z_1)^2$ et $\frac{(Z_2)^6}{(Z_1)^3}$

EXERCICE 5 :

$$\text{On pose } Z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = 1-i$$

1) Ecris Z_1 ; Z_2 et $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous la forme trigonométrique

2) Déduis-en $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

3) Résous dans $[-\pi; \pi]$, l'équation: $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x = 2$

EXERCICE 6 :

Détermine le module et l'argument des nombres complexes :

- a) $Z = \frac{1}{1+itg\alpha}$; $Z_0 = \frac{1}{1+itg\frac{\pi}{4}}$; $Z_1 = \frac{1}{1+itg\frac{2\pi}{3}}$;
- b) $Z = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sin x + i\cos x)}{2(1-i)(\cos x - i\sin x)}$; c) $Z = (1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos \alpha + i\sin \alpha)$
- d) $Z = (1 - i\sqrt{3})(1 - i)(\cos \alpha - i\sin \alpha)$; e) $Z = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{9} + i\sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{4\pi}{9} + i\sin \frac{4\pi}{9}}$
- f) $Z = \frac{(1+i)(\sin x + i\cos x)}{(\sqrt{3}+1)(\sin x - i\cos x)}$; g) $Z = \frac{1 - \cos \theta + i\sin \theta}{1 + \cos \theta - i\sin \theta}$ et $\theta \in [0; \pi[$
- h) $Z = \frac{1}{\cos \theta + i\sin \theta}$; i) $Z = \left(\frac{1+itan\alpha}{1-itan\alpha} \right)^n$; j) $Z = 1 + itan\theta$ et $\theta \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$
- k) $Z = \frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 + e^{\frac{i\pi}{3}}}$; l) $Z = 1 + i + (1-i)\tan \theta$ et $\theta \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$
- m) $Z = -\sin 2\theta + 2i\cos^2 \theta$ et $\theta \in [0; \pi]$
- n) $Z = \cos \theta + i\sin \theta$; o) $Z = -\sin \theta + i\cos \theta$; p) $Z = a \frac{(1+itan\alpha)^2}{1+tan^2 \alpha}$;

EXERCICE 7 :

Complète le tableau suivant :

Formes algébriques de Z	$-5(1+i\sqrt{3})$			
Formes trigonométriques de Z		$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$		
Formes exponentielles de Z			$4e^{\frac{i2\pi}{3}}$	
Formes polaires de Z				$\left[2; \frac{\pi}{4} \right]$

EXERCICE 8 :

Ecris sous forme algébrique I et J

$$I = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^{1999} \quad \text{et} \quad J = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{2001}$$

EXERCICE 9:

Détermine

- a) Les racines carrées de $(-i)$
- b) Les racines cubiques de $4\sqrt{3} - 4i$
- c) Les racines 4è de $Z=8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}i$
- d) Les racines 4è de $Z=1$ (l'unité)
- e) Les racines 5è de $Z=1$ (l'unité)

EXERCICE 10 :On pose $Z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

- a) Calcule Z^2 puis déduis sa forme trigonométrique
- b) En déduis la forme trigonométrique de Z
- c) Déduis de ce précède les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$; $\sin \frac{7\pi}{12}$; $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

EXERCICE 11 :On considère le nombre complexe $Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

- 1) Détermine le module et un argument de Z^2
En déduis le module et l'argument de Z
- 2) Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$
- 3) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)\sin x = \sqrt{2}$

EXERCICE 12 :On donne les nombres complexes Z et U définis par : $Z = -8\sqrt{3} + 8i$ et $U = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

- 1) Ecris Z sous forme trigonométrique le nombre Z
Détermine les racines carrées de Z sous forme trigonométrique
- 2) Calcule U^2 . Utilise ce résultat pour exprimer les racines carrées de Z sous leur forme algébrique
- En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

EXERCICE 13:

A tout nombre complexe Z ; différent de $2-i$; on associe le nombre complexe $Z' = \frac{Z+3-2i}{Z-2+i}$
Détermine l'ensemble des points M du plan dont l'affixe Z vérifie la condition indiquée, pour que :

- a) Z' soit un nombre réel
- b) Z' soit un nombre imaginaire pur

EXERCICE 14 :

On considère la somme : $S = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$

a) Ecris la formule permettant de mettre $\cos p + \cos q$ sous forme de produit et transforme :

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$$

b) Ecris la formule exprimant $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$. En remarquant que $\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$,

Calcule $\cos \frac{3\pi}{5}$ en fonction de $\cos \frac{\pi}{5}$

c) En utilisant les résultats précédents, démontre l'égalité $1 + S = 4 \left(\cos \frac{\pi}{5} \right)^2 - 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1$

d) Soit $S' = \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5}$

Démontre que $S + iS'$ est la somme des termes d'une suite géométrique et en déduis que $1 + S = 0$. Calcule alors $\cos \frac{\pi}{5}$

EXERCICE 15 :

Détermine tous les nombres complexes Z non nuls ; tels que Z^2 et Z^6 soient conjugués

EXERCICE 16 :

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$. Montre que $\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$

EXERCICE 17:

1. Soient Z_1, Z_2, Z_3 trois nombres complexes ayant le même cube.

Exprime Z_2 et Z_3 en fonction de Z_1 .

2. Donne, sous forme polaire (forme trigonométrique) les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$Z^6 + (7-i)Z^3 - 8 - 8i = 0$$

Indication : poser $Z = z^3$ et calculer $(9+i)^2$.

EXERCICE 18 :

Détermine le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $Z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ b) $Z = \sin \alpha - i \cos \alpha$ c) $Z = -\cos \alpha + i \sin \alpha$

d) $Z = -\cos \alpha - i \sin \alpha$ e) $Z = \tan \alpha + i$ f) $Z = 1 - i \tan \alpha$

g) $Z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ h) $Z = 1 - \cos \alpha - i \sin \alpha$ i) $Z = \cot \alpha + i$

j) $Z = 1 - i \cot \alpha$ k) $Z = 1 - \sin \alpha + i \cos \alpha$ l) $Z = 1 - \sin \alpha - i \cos \alpha$

EXERCICE 19:

Linéarise les expressions suivantes : $\sin^2 x \cdot \cos x$; $\sin^3 x \cdot \cos^2 x$; $\sin^3 x + \cos^2 x$

$$\cos^5 x$$
 ; $\sin^7 x$; $\cos^3 \frac{x}{2}$; $\sin^2 3x \cdot \cos^3 2x$; $\sin 3x \cdot \cos 7x$; $\sin^4 x$; $\sin^3 x \cdot \cos^3 x$; $\cos^3 2x$

EXERCICE 20:

1. Montre que $(1 + i)^6 = -8i$.

2. En déduis une solution de l'équation (E) : $z^2 = -8i$.

3. Ecris les deux solutions de l'équation (E) sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

4. Déduis de la question 1) une solution de l'équation (E_0) : $z^3 = -8i$.

EXERCICE 21:

1.) Résous dans $\mathbb{C}$, $Z^3 = 1$

2.) a) Développe $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$

b) Soit l'équation (E): $Z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$

En posant $u = \frac{Z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, détermine sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E).

3.) En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

EXERCICE 22:

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E): Z^3 + (1 - 8i)Z^2 - (23 + 4i)Z - 3 + 24i = 0$$

1.) Montre que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera ;

2.) Montre que $1+2i$ et $-2+3i$ sont solution de (E)

3.) Donne l'ensemble des solutions de (E)

EXERCICE 23:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Au point m d'affixe $z = x + iy$, avec z différent de i ; on associe le point M d'affixe $Z = \frac{z+3}{z-i}$

1) Exprime les coordonnées X et Y de M à l'aide des coordonnées x et y de m .

2) Détermine l'ensemble des points m du plan tel que :

a.) Z soit un nombre réel

b.) Z soit un nombre imaginaire pur.

EXERCICE 24:

Ecris sous forme algébrique les nombres complexes suivants en précisant $\text{Re}(Z)$ et $\text{Im}(Z)$

$$Z_1 = i^{66} + i^{67} + i^{68} + i^{69} ; Z_2 = \sum_{k=0}^{2000} i^k ; Z_3 = (3 + 2i)(1 - i) - (2 - 2i)^2 + \overline{\left(\frac{5-5i}{1+2i}\right)}$$

$$Z_4 = \frac{-1}{i} + \frac{2-i}{2+i} - \frac{4i}{3-i} + \frac{2+3i}{1-i} (1 + i) ; Z_5 = \frac{1+i}{-1+i} ; Z_6 = \frac{(1-i\sqrt{3})^4}{(1+i)^3} ; Z_7 = i^{5323} ;$$

$$Z_8 = i^{25} + i^{26} + i^{27} + i^{28} ; Z_9 = (1 + i)^{10} ; Z_{10} = \frac{3+i}{1-i} + (1 + i)^4 - 2(-1 + i) - i\sqrt{3}$$

$$Z_{11} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{1+i} ; Z_{12} = \left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) - i \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right] (1 + i\sqrt{3}) ; Z_{13} = \left[3; \frac{2\pi}{3} \right] \times \left[2; \frac{\pi}{4} \right]$$

EXERCICE 25:

Ecris sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les nombres complexes suivants

$$Z_0 = \sum_{k=0}^{2000} i^k$$

$$Z_1 = (1+i)^{10}; \quad Z_2 = \frac{3+i}{1-i} + (1+i)^4 - 2(-1+i) - i\sqrt{3}$$

$$Z_3 = \frac{\cos(\frac{\pi}{12}) - i \sin(\frac{\pi}{12})}{1+i}; \quad Z_4 = \left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) - i \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right] (1+i\sqrt{3}); \quad Z_5 = \left[3; \frac{2\pi}{3} \right] \times \left[2; \frac{\pi}{4} \right]$$

$$Z_6 = \frac{(1+i\sqrt{3})^6}{(5+5i)^4}; \quad Z_7 = \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

EXERCICE 26 :

Soit le nombre complexe $z = \frac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i}$

- 1) a) Mets z sous sa forme algébrique
- b) Calcule le module et un argument de z
- 2) Calcule $\bar{z}^6$; $\bar{z}^8$ et $\bar{z}^{2005}$

EXERCICE 27 :

On pose $P(Z) = Z^4 - 6Z^3 + 23Z^2 - 34Z + 26$

- 1) α désigne un nombre complexe quelconque
Démontre que $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$. Déduis-en que si $P(\alpha) = 0$ alors $P(\bar{\alpha}) = 0$
- 2) Calcule $P(1+i)$. Indique deux solutions complexes de l'équation $P(Z) = 0$
- 3) a) Calcule $Q(Z) = [Z - (1+i)][Z - (1-i)]$
b) Vérifie que $P(Z)$ est le produit du polynôme $Q(Z)$ et d'un polynôme $Q_1(Z)$ du second degré. Détermine $Q_1(Z)$
c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.

EXERCICE 28 :

On considère le polynôme défini par : $f(Z) = Z^3 - (6+12i)Z^2 - (36-48i)Z + 90+27i$

- 1) Calcule $f(3i)$. En déduis une factorisation de $f(z)$
- 2) Résous l'équation : $Z^2 - (6+9i)Z - 9+30i = 0$. En déduis les racines Z_0 ; Z_1 et Z_3 de $f(z)$
- 3) M_0 ; M_1 et M_3 sont les points images des racines z_0 ; z_1 et z_3
Mettre le nombre complexe $\frac{Z_1 - Z_0}{Z_2 - Z_0}$ sous la forme trigonométrique. En déduis la nature du triangle $M_0M_1M_3$.

EXERCICE 29 :

Soit S l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M_1 d'affixe Z_1 telle que : $Z_1 = (-1+i)Z + 1+4i$

- 1) Donner la nature de S et ses éléments caractéristiques
- 2) Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x_1 et y_1 du point M_1
- 3) Déterminer les équations des transformées par S de la droite d'équation $x=0$ et de la droite (D) d'équation $y=x-1$.

EXERCICE 30 :

- a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)Z + 2^\theta = 0$ où $\theta \in [0; 2\pi[$

Donne chaque solution sous forme trigonométrique

b) On appelle A et B les images dans le plan complexe des solutions de l'équation précédente. Détermine θ pour que OAB soit un triangle équilatéral.

EXERCICE 31 :

1) Trouve le nombre complexe A, sachant que $|A| = 5$ et $\text{Arg}[(1+i).A] = \frac{\pi}{3}$

2) Soit $Z = a + 2 + i(b + 5)$ et $Z' = 1 + 3i$ deux nombres complexes

Détermine les réels a et b pour que Z et Z' soient égaux.

3) Donne la forme trigonométrique de $\omega = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$ et $B = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$

Puis calcule $\omega^{200}; B^{1999}$ (donne le résultat sous forme algébrique).

EXERCICE 32 :

A- 1) Détermine l'ensemble des points M d'affixe Z tels que $Z\bar{Z} + i(Z - \bar{Z}) - 3 = 0$

2) Soit le nombre complexe $A = \frac{2Z-4}{Z-i}$ avec ($Z \neq i$)

a) Ecris A sous la forme algébrique puis précise $\text{Re}(A)$ et $\text{Im}(A)$.

b) Détermine l'ensemble (E) des points M d'affixe tels que le nombre complexe A soit :

-réel,

-imaginaire pur.

B- Soient Z et U deux nombres complexes tels que :

$$Z = \sqrt{3} + i \text{ et } U = \sqrt{2}(1 + i); \text{ on pose } X = U \times Z^2$$

1) a.) Détermine le module et l'argument principal de Z et U.

b.) Déduis-en le module principal de X.

2) a.) Ecris X sous forme algébrique et sous forme trigonométrique

b.) Déduis-en les valeurs de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

c.) Calcule X^{12} .

EXERCICE 32 :

1. On considère le nombre complexe :

$$z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1).$$

a. Ecris le nombre complexe z^2 sous forme algébrique.

b. Détermine le module et un argument de z^2 . En déduis le module et un argument de z.

c. Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

d. Résous dans IR l'équation : $(\sqrt{3} + 1) \cos x + (\sqrt{3} - 1) \sin x = \sqrt{2}$.

2. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe S dans les cas suivants :

$$a) z' = z - 1 + i ; b) z' - i = 2(z - i) ;$$

$$c) z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z ; d) z' = (-1 - i\sqrt{3})z + \sqrt{3} + i.$$

EXERCICE 33 :

Détermine et représente l'ensemble des points M du plan dont l'affixe Z vérifie la condition indiquée :

- a) $|Z+5-2i|=|Z-2+i|$ b) $|Z+1+i|=|3Z-9-3i|$; c) $|Z+\bar{Z}-1|=4$;
d) $|Z-\bar{Z}-1+i|=2$; e) $\arg(3i-Z) \equiv 0[2\pi]$; f) $\arg(-\bar{Z}-3+i) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$;
g) $\arg\left(\frac{1}{Z+2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$; h) $\arg(Z-3i) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$; i) $\arg(Z^2-4) \equiv \arg(Z+2)[2\pi]$;
j) $\left|\frac{Z-3i}{Z-2+i}\right|=1$; k) $|Z-3+i|=|2Z-4i|$; l) $|\bar{Z}-1+i|=|Z-1|$

Problème 1 :

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 + (1 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$.

- Détermine le nombre réel y tel que iy soit une solution de l'équation $P(z) = 0$.
- Trouve deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait : $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.
- Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.
- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.
 - Place les points A ; B et I d'affixes respectives $z_A = -7 + 5i$; $z_B = -7 - 5i$ et $z_I = i\sqrt{2}$.
 - Détermine l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
 - Place le point C d'affixe $z_C = 1 + i$. Détermine l'affixe du point N tel que ABCN soit un parallélogramme.
 - Place le point D d'affixe $z_D = 1 + 11i$. Calcule le complexe $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Justifie que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduis la nature du quadrilatère ABCD.