

**Exercice 1:**

Soit le complexe $U = -\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

- 1) Calcule le module et un argument U^2 .
- 2) En déduis le module et un argument de U .
- 3) Détermine les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 4) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin x = -2\sqrt{2}$

Exercice 2:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on donne les points A, M , et M' d'affixes respectives 1 ; z et z' tels que $z' = \frac{iz^2}{z-1}$.

Partie A :

- 1) Pour quelles valeurs de z , le point M' existe ?
- 2) a. Exprime $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AM}$
 b. Montre que pour tout M différent de A et O , on a :
 (1) : $\text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + \text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + \text{mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}) + 2k\pi$
 (2) $\text{mes}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \text{mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- 3) a. Quel ensemble décrit M lorsque M et M' appartiennent à un même cercle de centre O ?
 b. Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tels que O appartienne à la droite (MM') privée de M et M' .

Partie B :

Dans cette partie, on suppose que z est un nombre complexe de module et d'argument $\theta \in]-\pi; \pi[$

- 1) Exprime $\frac{z'}{z}$ sous la forme ae^{ib} où a et b sont des réels et a non nul.
- 2) En déduis les valeurs de θ pour les quelles le triangle OMM' est isocèle en O .
- 3) Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, écris $\left(\frac{z'}{z}\right)^{2026}$ sous forme algébrique.

Partie C :

Soit dans $(\mathbb{C})$ l'équation $(E_n): \left(\frac{z'}{z}\right)^n$ où n est un entier naturel.

- 1) Montre que (E_n) peut s'écrire sous la forme $\left(\frac{iz}{z-1}\right)^n$.
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_4)
- 3) a. Montre que si z est solution de (E_n) alors $|z| = |z-1|$.
 b. En déduis que les solutions de (E_n) sont de la forme de $\frac{1}{2} + bi$.
- 4) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_n)