

Exercices d'entraînement

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe: TSE

2025 - 2026

Nombres Complexes

Exercice 1

1. Mets sous algébrique chacun des nombres complexes suivants

$$z_0 = (2 + i)(-1 + i) + (1 + 2i); z_1 = (1 + i\sqrt{3})^3; z_2 = (1 - 2i)^5; z_3 = (1 - i)^{14};$$

$$z_4 = (1 + i)^{13}; z_5 = \frac{2 + i}{3 + 4i} - \frac{3 - 4i}{2 - i}; z_6 = \frac{(1 - i)(2 + i)}{2i(-3 + i)}; z_7 = \sum_{k=7}^{2000} i^k; z_8 = \sum_{k=5}^{2002} (-i)^k$$

2. On donne $z = 2 + i\sqrt{2}$ et $z' = -2 + i$. Ecrire sous forme algébrique les complexes :

$$z_0 = z - \bar{z}'; z_1 = z\bar{z}; z_2 = z^2; z_3 = z'^3; z_4 = z'^5; z_5 = \bar{z}'^4; z_6 = \frac{z}{z'}; z_7 = -3z'^3 \times \frac{z}{z'}$$

3. Montrer que $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = 1$.

4. Soit $z_1 = \frac{3+2i}{-5+7i}$ et $z_2 = \frac{3-2i}{5+7i}$.

Démontre, sans calcul, que $z_1 - z_2$ est un nombre réel et $z_1 + z_2$ un nombre imaginaire pur

Exercice 2

Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe défini par : $z = (x - ix)(3 + 2ix)$

1) Ecris z sous forme algébrique.

2) Pour quelle(s) valeur(s) de x :

a) le nombre complexe z est réel ?

b) le nombre complexe z est imaginaire pur ?

c) le nombre complexe z est nul ?

Exercice 3

A. Soit α et α' deux nombres complexes de module 1. Démontre que :

$$1. \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$2. u = \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha} \text{ est réel.}$$

$$3. v = \frac{\alpha+\alpha'}{1+\alpha\alpha'} \text{ est réel pour } \alpha\alpha' \neq -1.$$

$$4. w = \frac{\alpha-\alpha'}{1+\alpha\alpha'} \text{ est imaginaire pur pour } \alpha\alpha' \neq -1.$$

B. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, on pose $zz_2 = u^2$.

$$\text{On suppose que } \text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{2}.$$

1. En posant $\text{Arg}(z_1) = \theta$, exprime $\text{Arg}(u)$ en fonction de θ .

2. Montre que le nombre $t = \frac{z_1+z_2+i(z_1-z_2)}{u}$ est un réel.

C. Démontre que $\forall n \in \mathbb{Z}, (\sqrt{3} + i)^{2n+1} - (i - \sqrt{3})^{2n+1}$ est réel.

Exercice 4

- A. Détermine les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un réel.
 B. Détermine les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif
 C. Détermine les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit imaginaire pur.

Exercice 5

Complète le tableau suivant :

Formes algébriques	Formes trigonométriques	Formes exponentielles
$-7(1+i\sqrt{3})$		
		$4e^{i(\frac{5\pi}{6})}$
	$2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$	

Exercice 6

Ecris sous forme trigonométrique le nombre complexes z dans les cas suivant :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad z_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad z_3 = (-1 + i\sqrt{3})^8;$$

$$z_4 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i-1}\right)^6; \quad z_5 = \frac{(1-i\sqrt{3})^4}{(-1-i)^3}; \quad z_6 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9(1-i)}{-8(1+i)^2}.$$

Exercice 7

A. Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta; \quad z_2 = 2\cos \theta - 2i\sin \theta; \quad z_3 = -\cos \theta + i\sin \theta; \quad z_4 = -\cos \theta - i\sin \theta$$

$$z_5 = -\sin \theta + i\cos \theta; \quad z_6 = \sin \theta + i\cos \theta; \quad z_7 = 1 + i\tan \theta \text{ avec } \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}; \quad z_7 = \frac{\cos \theta + i\sin \theta}{\cos \theta - i\sin \theta}$$

B. Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -5e^{i\frac{\pi}{5}}; \quad z_2 = 1 - e^{i\alpha}; \quad z_3 = 1 + e^{i\alpha}; \quad z_4 = 1 + e^{-i3\alpha}; \quad z_5 = \frac{1 - \cos \alpha + i\sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i\sin \alpha};$$

$$z_6 = \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}; \quad z_4 = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Où $\alpha \in]0; \pi[$. On discutera suivant les valeurs de α .

C. Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$a) \begin{cases} |z| = 5 \\ \arg((-1+i)z) = \frac{\pi}{3} \end{cases}; \quad b) \begin{cases} |z| \times |2i| = 6 \\ \arg\left(\frac{(1+i\sqrt{3})}{z}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

D. Détermine le module et un argument de

$$Z = \frac{(-1+i\sqrt{3})(\cos \theta + i\sin \theta)}{\cos \theta + \sin \theta + i(\cos \theta - \sin \theta)}; \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8

A. Soient z et u deux nombres complexes tels que :

$$z = \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad u = \sqrt{2}(1+i)$$

On pose : $X = u \times z^2$

- a. Détermine le module et l'argument principal de z et u .
 b. Déduis en le module et l'argument principal de X .

2. a. Ecris X sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
b. Déduis en les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.
c. Calcule X^{12} .

Exercice 9

Soient les complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

1. Met sous forme trigonométrique z_1 ; z_2 ; $\frac{z_2}{z_1}$; $z_1 \times z_2$
2. Déduis en que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
3. On considère l'équation d'inconnue réelle x

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$$

Résolvez cette équation dans $\mathbb{R}$; puis placez les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 10

- A. Détermine la forme algébrique de : $A = (1 + i)^{2011}$; $B = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{20}$.
B. Exprime $\cos 5x$, $\sin 5x$, $\cos 5x$, $\sin 5x$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.
C. Linéarise : $\cos^3 2x$; $\sin^5 \frac{2}{3}x$; $\cos^3 x \times \sin^3 x$; $\cos^3 2x \times \sin^2 5x$; $\cos^2 3x \sin^3 \frac{2}{3}x$; $\cos^3 \frac{2}{5}x \sin^2 \frac{2}{3}x$

Exercice 11

- A. Détermine sous forme algébrique les racines 4^{ème} de l'unité. Place les points image de ces racines sur le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
B. Détermine sous forme algébrique les racines 6^{ème} de l'unité. Place les points image de ces racines sur le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
C. Détermine les racines 5^{ème} de l'unité. Place les points image de ces racines sur le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
D. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a) $z^3 = 8i$ b) $z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$; c) $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$; d) $z^4 = 2(-1 + i\sqrt{3})$

Exercice 12

On pose : $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ et $u = z^2$.

- a. Calculer u puis déterminer son module et ses arguments.
b. En déduire de ce qui précède le module et un argument z .
c. Déduis en les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$; $\sin \frac{5\pi}{12}$; $\cos \frac{\pi}{12}$; $\sin \frac{\pi}{12}$.
d. On considère l'équation d'inconnue réelle x : $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cos x + \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sin x = 1$
Résous cette équation dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13

On pose : $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

1. Calculer z^2 puis déterminer son module et ses arguments.

- En déduire de ce qui précède le module et un argument z .
- Déduis en les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$; $\sin \frac{5\pi}{12}$; $\cos \frac{7\pi}{12}$; $\sin \frac{7\pi}{12}$.
- On considère l'équation d'inconnue réelle x : $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cos x - \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sin x + \sqrt{2} = 0$
Résous cette équation dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14

On pose : $z = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \right)$ et $u = z^4$

- Calculer u puis détermine son module et ses arguments.
- En déduire de ce qui précède le module et un argument z .
- Déduis en que $\cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$; $\sin \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$.
- On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$\frac{\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}}{2} \sin x = -\sqrt{\sqrt{2}}$$

Résous cette équation dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15

A. Résous dans $\mathbb{C}^2$ les équations suivantes :

$$a) \begin{cases} 5iz + (2 - i)z' = 1 + 12i \\ (2 - 3i)z + (5 - 2i)z' = 39 - 10i \end{cases} ; b) \begin{cases} 2iz + (1 - 3i)z' = 14 + 6i \\ (1 - i)\bar{z} + (5 - 2i)\bar{z}' = 4 - 18i \end{cases} ; c) \begin{cases} 2z_1z_2 = 3 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

B. Résous dans $\mathbb{C}^3$ les équations suivantes : $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 1 \\ z_1z_2z_3 = 1 \end{cases}$

Exercice 16

On considère le polynôme f défini par : $f(z) = iz^3 + (4 - 3i)z^2 - (8 + 3i)z + 5i$; $z \in \mathbb{C}$

- Montre que f admet une racine imaginaire pure z_0 à déterminer.
- Détermine les nombres complexes a , b et c tels que :
 $f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$
- Résous l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 la racine non imaginaire pur ayant la plus grande partie réelle et z_2 la troisième.
- Dans le plan rapporté au repère $(o ; \vec{u} ; \vec{v})$ orthonormé (unité graphique : 3cm), on considère les points M , A et L d'abscisses respectives z_2 ; z_1 ; z_0 .
 - Place les points M , A , L . (1 pt)
 - Calcule MA , ML , AL et $MES(\vec{MA}, \vec{ML})$. Déduis en la nature du triangle MAL .
 - Détermine z l'abscisse du point I tel que le quadrilatère $MALI$ soit un parallélogramme. Place le point I .

Exercice 17

On considère le polynôme $P(z)$ suivant : $P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$

- Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1

- 2) Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z - z_1) Q(z)$.
- 3) Démontrer que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2 .
- 4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- 5) On note z_3 la 3^{ème} solution de l'équation $P(z) = 0$. Démontrer que les points du plan complexe A, B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 sont alignés.

Exercice 18

On considère le polynôme $P(z) = z^4 + (5 - 2i)z^3 + (8 - 10i)z^2 + (6 - 16i)z - 12i$

- 6) Démontre que $2i$ et -3 sont racines de P .
- 7) Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z - 2i)(z + 3)Q(z)$.
- 8) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 19

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16.$$

1. Trouver les réels a et b tels que $f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$
3. Placer dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o; \vec{u}; \vec{v})$ les images A ; B ; C ; D des solutions de $f(z) = 0$; puis préciser que ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 20 : (composition TSE 2014-2015 R.G.)

On considère le polynôme f défini par : $f(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que : $f(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$ (0,75 pt)
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. (1 pt)
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = -i\sqrt{3}$; $z_C = 3 - 2i\sqrt{3}$; $z_D = \bar{z}_C$.
 - a) Placer les points A, B, C, D. [la figure complète (1,5 pts)]
 - b) Quelle est la nature du triangle ACD ? (0,5 pt)
 - c) Montrer que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. Donner une équation de (C). (1,5 pts)
4. On note E le symétrique de C par rapport à O.
Préciser l'abscisse de E et déterminer la nature du triangle BED. (0,75 pt)

Exercice 21

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives :
 $z_A = \frac{3}{2} + 6i$; $z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$; $z_P = 3 + 2i$
Soit le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\vec{w} = -1 + \frac{5}{2}i$
 - a) Déterminer l'abscisse z_Q du point Q image du point B par la translation du vecteur $\vec{w}$.

- b) Déterminer l'afixe z_R du point R image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$
- c) Déterminer l'afixe z_S du point S image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
- d) Placer les points P, Q, R et S .
3. a) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$.
- b) Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$. En déduire la nature précise du parallélogramme $PQRS$.
- c) Montrer que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 22

On considère l'application t de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par: $t(z) = 9z^2 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41$.

- Montrer que si z_0 est une racine de t , alors $(\overline{z_0})$ est aussi une racine de t .
- Vérifier que i est une racine de t et en déduire une autre racine de t .
- Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que $\forall z \in \mathbb{C}$,
 $t(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $t(z) = 0$.
- Le plan complexe est rapporté à un repère
($O, \vec{u}, \vec{v}$) (Unité graphique : 3 cm). On désigne par A, B, C et D les points d'affixes
Respectives $z_A = -i, z_B = i, z_C = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i$ et $z_D = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$.
- Placer les points A, B, C et D .
- Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$ et $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in i\mathbb{R}$ où $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs.
- En déduire la nature exacte des triangles ACD et CBD .
- Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 23 : Extrait du Bac 2013 T. S.Exp (Mali)

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
 $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$; $z + \frac{1}{z} = 1$; $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$
- Soit le polynôme de la variable complexe z telque :
 $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$.
- Vérifier que pour tout z non nul on a :
 $\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$
- En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation $P(z) = 0$

Exercice 24

On considère le polynôme suivant : $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$

- Ecrire $1 + i$ sous forme trigonométrique.
- Calculer $p(1 + i)$.
- Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$
- Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $\bar{z}_0$ est aussi une solution de cette équation.

5. Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $z_0 \neq 0$ et $\frac{1}{z_0}$ est aussi une solution de cette équation.
6. Déterminer toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
7. Détermine les réels a, b, c et d tels que $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + cz + d)$

Exercice 25

A. Soit $\alpha \in]0 ; 2\pi [$. On considère l'équation d'inconnue complexe z .

$$(E): z^2 - (2^{\alpha+1} \cos \alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$$

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). Donne la forme trigonométrique de chaque solution.

B. Soit $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$. on considère l'équation d'inconnue complexe z .

$$(F): (\cos^2 \beta)z^2 - (4 \cos \beta)z + 5 - \cos^2 \beta = 0$$

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (F). Précise pour quelle valeur de β l'équation (F) admet une solution double. Donne la valeur de cette racine double.

Exercice 25

Soit l'équation (E): $z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$.

1. Montre que si z_0 est une solution de (E) alors $\bar{z}_0$ est aussi une solution de (E).
2. a. détermine les nombres réels a et b tels que :

$$(E) \Leftrightarrow z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right] = 0.$$

- b. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $Z, Z^2 + aZ + b = 0$ puis l'équation (E).
- c. Démontre que les points images des quatre solutions de (E) appartiennent à un même cercle (Γ) dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 27

Soit f l'application du plan P dans P qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que :

$$f(z) = z' = \frac{z - 2 + i}{z + 1 - i}$$

- 1) Détermine les nombres complexes pour lesquels f est définie.
- 2) On pose $z = x + iy$ avec x et y réels.
Ecris z' sous forme algébrique
- 3) Détermine et construis l'ensemble des points $M(z)$ tels que :
 - a) (E_1): z' soit un réel.
 - b) (E_2): z' soit un nombre imaginaire pur.
 - c) (E_3): M' parcourt le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 28

Pour tout nombre complexe $z = x + iy \neq i$; on pose $z_0 = \frac{z+i}{z-i}$

Détermine et représente les ensembles de points M du plan dont l'axe z vérifie condition indiquée.

1. z_0 est un réel strictement positif.
2. z_0 est un réel strictement négatif.

3. z_0 est un nombre imaginaire pur.
4. $|z_0| = 1$
5. $|z_0| = 3$

Exercice 29

1. Détermine les nombres complexes z dans les cas suivants :
 - a. $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z - 1|$.
 - b. $|z| = |z - 2|$ et $\arg(z) = \arg(z + 3 + i)$.
 - c. $z + |z| = 1 + 2i$.
2. Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition proposée
 - a) $|z + 1 + 2i| = |z - 4|$; b) $|z - 3i| = 2$; c) $|\bar{z} - 2 + i| = 1$;
 - d) $|z + \bar{z} - 1| = 4$; e) $|z - \bar{z} - 1 + i| = 2$; f) $z^2 - (1 - 2i)^2 = \bar{z}^2 - (1 + 2i)^2$
3. Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition proposée
 - a) $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$; b) $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$; c) $\arg(z - 1 - i) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$;
 - d) $\arg(z - 1 - i) \equiv -\frac{\pi}{3} [\pi]$; e) $\arg(3i - z) \equiv 0 [2\pi]$; f) $\arg(\bar{z} - 3 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$

Exercice 30 : (composition TSE 2014-2015 R.D.)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(0 ; \vec{u} ; \vec{v})$ (unité graphique 2cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $b = \bar{a}$ et $c = 3$.

Partie A :

1. Place les points A, B et C .
2. Démontre que le triangle ABC est équilatéral.
3. Ecris les nombres complexes a, b et c sous forme exponentielle.

Partie B :

Soit f l'application qui, à tout point M de P d'affixe z associe le point M' d'affixe z' :

$$z' = f(z) = \frac{1}{3}iz^2$$

On note A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points A, B et C .

1.
 - a. Détermine la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C' .
 - b. Démontre l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A' .
 - c. Place les points A', B' et C' .
2. Détermine les points invariants par f , c'est-à-dire les points d'affixe z tels que $z' = z$. On donnera leurs affixes sous forme algébrique.
3. Démontre que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.

Exercice 31 : Extrait du Bac Asie 2001

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(0 ; \vec{u} ; \vec{v})$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq -1$) associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$f(z) = z' = \frac{-iz - 2}{z + 1}$$

Soient A, B et C les points d'affixe respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$.

1. Soit C' l'image du point C par f . Donne l'abscisse c' du point C' sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
2. Calcule l'abscisse d du point D ayant pour image par f le point D' d'abscisse $d' = \frac{1}{2}$.
3. Pour tout nombre complexe z différent de -1 , on note p le module de $z + 1$ (c'est-à-dire $|z + 1| = p$) et p' le module de $z' + i$ (c'est-à-dire $|z' + i| = p'$).
 - a. Démontre que pour tout nombre complexe z différent de -1 , on a : $pp' = \sqrt{5}$.
 - b. Si le point M appartient au cercle (r) de centre A et de rayon 2, montre qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle (r') , dont on précisera le centre et le rayon.
4. Pour tout nombre complexe z différent de -1 , on considère le nombre complexe $\omega = \frac{z-2i}{z+1}$.
 - a. Interprète géométriquement le module et l'argument du nombre complexe ω .
 - b. Montre que $z' = -i\omega$.
 - c. Détermine géométriquement l'ensemble (F) des points M d'abscisse z telle que z' soit un réel non nul. Donne une équation de (F) .
 - d. Vérifie que le point D appartient aux ensembles (r) et (F) .
 - e. Représente les ensembles (r) et (F) et (r') en prenant 4 cm pour unité graphique.

Exercice 32

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$ on considère le point M d'abscisse $z = x + iy$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. Soit f la fonction de P dans P définie par $f(z) = (iz - 2)(\bar{z} - 1)$.

1. Détermine l'abscisse du point C' , l'image de $C(3 - 2i)$ par f . (0, 5 pt)
2. Montre que $f(z) = (-2x + y + 2) + i(x^2 + y^2 - x + 2y)$. (0, 75 pt)
3. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 2$. (0, 75 pt)
4. Détermine l'ensemble (E_1) des points $M(z)$ tels que : $f(z)$ soit un réel. (0, 75 pt)
5. Détermine l'ensemble (E_2) des points $M(z)$ tels que : $f(z)$ soit un nombre imaginaire pur. (0, 75 pt)
6. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. Vérifie que les points images des solutions de $f(z) = 0$ appartiennent aux ensembles (E_1) et (E_2) . (1, 5 pt)
7. Soit A et B les points d'abscisses respectives $-2i$ et 1.
 - a. Exprime $|f(z)|$ en fonction de AM et BM . (0, 25 pt)
 - b. Donne une interprétation géométrique l'argument de $f(z)$. (0, 25 pt)
 - c. Détermine l'ensemble (E_3) des points $M(z)$ tels que : $f(z)$ soit un réel strictement positif. (0, 25 pt)
8. Construis (E_1) , (E_2) et (E_3) dans le même repère $(o; \vec{u}; \vec{v})$. (0, 75 pt)

Exercice 33 : Extrait du Bac Inde 2001

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z différent de 1, associe le nombre complexe $f(z) = \frac{2-iz}{1-z}$.

L'exercice étudie quelques propriétés de f .

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, dans lequel seront représentés les ensembles trouvés aux questions 1 et 2.

A est le point d'abscisse 1 et B celui d'abscisse $-2i$.

1. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels.

- Ecris $f(z)$ sous forme algébrique. Déduis en l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel.
 - Vérifie que A et B appartiennent à (E) et représente (E) .
2. On pose $z' = f(z)$.
- Vérifie que i n'a pas d'antécédent par f et exprime, pour z' différent de i , z en fonction z' . f est-elle bijective ?
 - M est le point d'affixe z (z différent de 1) et M' celui d'affixe z' (z' différent i).
Montrer que $OM = \frac{M'C}{M'D}$ ou C et D sont les point d'affixes respectifs 2 et i .
 - Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A , son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement.
 - Montrer que si M est un point de l'axe réel, différent de O et de A alors M' appartient à la droite (CD) .

Exercice 34

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé on considère les points A et B d'affixe respectives 1 et -2 . On appelle (τ) le cercle de diamètre $[AB]$ et I le milieu $[AB]$.

- Soit C le point d'affixe $c = \frac{1+4i}{1-2i}$. Détermine la forme algébrique de c et prouve que le point C appartient à (τ) .
- Soit D le point de (τ) tel que $(\widehat{IA, ID}) = \frac{\pi}{3}$. On désigne par d l'affixe de D .
 - Détermine le module et un argument de $d + \frac{1}{2}$.
 - Déduis-en d .
 - Détermine le réel x telque $\frac{1+2xi}{1-xi} = \frac{1}{4} + i \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
- Soit E un point d'affixe $e = \frac{1+2yi}{1-yi}$ où y est un réel non nul. On pose $Z = \frac{e-1}{e+2}$. Calcule Z et déduis en la nature du triangle ABE .
- Soit F un point de (τ) autre que B et f son affixe. Démontre qu'il existe un réel t tel que

$$f = \frac{1+2ti}{1-ti}.$$

Exercice 35

- Détermine les solutions dans $\mathbb{C}$ de : $u^4 = -4$ Sous forme algébrique.
- Résous alors dans $\mathbb{C}$: $(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0$ Sous forme algébrique.

Exercice 36

- Résous dans $\mathbb{C}$:

$$a) u^4 = 1 ; \quad b) u^4 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Résous alors dans $\mathbb{C}$: $16z^8 + (-1+i\sqrt{3})z^4 - 8 - 8i\sqrt{3} = 0$.

Exercice 37

Résous dans $\mathbb{C}$: $z^6 + (1-2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$.

Placer les points images de ses solutions dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Exercice 38

A. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.

a. Détermine les complexes z qui vérifient $z^{2n} = 1$.

b. Détermine les complexes qui vérifient $z^n = -1$.

B. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z + 1)^5 - (z - 1)^5 = 0$.

C. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z + i)^5 - (z - i)^5 = 0$.

D. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$. Où $n \in \mathbb{N}^*$.

E. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z + i)^n - (z - i)^n = 0$. Où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 39

Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

1. Démontre que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$.

2. Calcule les réels $\alpha + \beta$ et $\alpha \times \beta$. Déduis - en que α et β sont solutions de l'équation (E): $z^2 + z - 1 = 0$.

3. Exprime α et β en fonction respectivement de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$. Puis précise le signe de α et celui de β .

4. Résous (E) et déduis en les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

Exercice 40

A. Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z .

(E): $(1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha)$

1. Soit z une solution de (E).

a. Montre que $|1 + iz| = |1 - iz|$.

b. Déduis-en que z est réel.

2. Exprime $\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

3. Pour tout $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on pose $z = \tan \varphi$.

a. Ecris l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre.

b. Détermine les solutions z_1, z_2, z_3 de (E).

Exercice 41

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On note A le point d'affixe -2 . On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes $\alpha, \frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que $\alpha \notin \mathbb{R}^*$

2. Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).

3. Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes $\alpha, \frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère précédent les points A, M, N et P.

b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4. a) Montrer que si α est un solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E).
- b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice 42

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. On se propose de démontrer l'inégalité triangulaire c'est-à-dire que : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

1. On pose $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$. Démontre que $|\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)| \leq r_1 r_2$.

2. Déduit en que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

(Indication : On pourra utiliser $|z_1 + z_2|^2$).

3. Trouve une relation entre α_1 et α_2 pour qu'on ait $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

Quelle conséquence pour les points $O, M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$?

Exercice 43

Soit α un nombre réel.

1) Montre que l'équation $(E_1): z^2 - (2 \cos \alpha)z + 1 = 0$ d'inconnue z admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions complexes conjuguées, z_1 et $\bar{z}_1$. Donner leur expression en fonction de α . Quel est le module de z_1 ? (1 pt)

2) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On note de même z_2 et $\bar{z}_2$ les solutions de l'équation $(E_2): z^2 - (2 \cos \beta)z + 1 = 0$. Calculer en fonction de $\cos \alpha$ et $\cos \beta$ les coefficients a, b, c et d du polynôme $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$ soit identique au polynôme $Q(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2)$ (1 pt)

3) On considère l'équation $(E_3): X^2 + \frac{a}{2}X + \frac{b-2}{4} = 0$ où a et b sont les coefficients réels de la question 2).

a) Montrer que $\cos \alpha$ et $\cos \beta$ sont solutions de (E_3) . (0, 5 pt)

b) Ecrire les inégalités que doivent vérifier a et b pour qu'il existe deux réels α et β répondant à la question. (0, 5 pt)

4) Application : Soit $(E_4): z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0$. Déterminer α et β et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_4) . (2 pts)

Exercice 44

Pour chacune des transformations S suivantes, donner la nature et les éléments caractéristiques (le rapport, l'angle et le centre éventuel).

Pour chacune des transformations S suivantes, donne la nature et les éléments caractéristiques.

1) $z' = z - 1 + 3i$; 2) $z' = 2z + 3i$; 3) $z' = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}z$; 4) $z' = -2iz + 3i$; 5) $z' = -z - 6i$;

6) $z' = -iz + 1$; 7) $z' = -3i\bar{z} + 3 - i$; 8) $z' = \bar{z} - 6i$; 9) $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z$; 10) $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}\bar{z} - 6i$.

Exercice 45

Soient A, B, C et D les points d'affixes :

$Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$.

1. Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D. Détermine l'écriture complexe associée à S puis caractérise S .
2. La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme B en E. Trouve l'affixe de E.

3. L'homothétie de centre A et rapport -2 transforme C en F . Trouve l'affixe de F .
4. La symétrie de centre A transforme C en G . Trouve l'affixe de G .
5. La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-2 + 3i$ transforme A en K . Trouve l'affixe de K .
6. Trouve l'affixe du point T symétrique de A par rapport O .
7. Trouve l'affixe du point L symétrique de A par rapport l'axe réel.
8. Trouve l'affixe du point Q symétrique de A par rapport l'axe imaginaire.

Exercice 46

On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z - 20$

1. Détermine les nombres complexes b et c pour que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = -1 + i$; $z_C = 1 + 3i$; $z_D = 3 + i$
 - a. Faire une figure.
 - b. Démontre que $ABCD$ est carré
4. Soit S la similitude directe de centre A et transformant C en B .
 - a. Détermine l'écriture complexe de S .
 - b. Détermine les éléments caractéristiques de S .
 - c. Détermine l'image du point B par S .
 - d. Construire l'image du carré $ABCD$ par S .
 - e. Détermine l'image de la droite $(C): x^2 - 2x + y^2 - y = 2$ par S .
 - f. Détermine l'image de la droite $(D): x - y = 2$ par S .

Exercice 47

Soit la similitude directe plane S de centre $A(1; 1)$; de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{6}$ par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformé le point M' d'affixe Z' . Exprime Z' en fonction de Z .

Exercice 1:

Soit a un nombre complexe.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1 + i)z^2 - 2i(a + 1)z - (i - 1)(a^2 + 1) = 0$
2. Soient z_1 et z_2 les solutions de cette équation.
Trouver entre z_1 et z_2 une relation indépendante de a .
3. Caractériser la transformation f du plan complexe qui à tout point M_1 d'affixe z_1 associe le point M_2 d'affixe z_2 .
4. On pose $z_1 = x + iy$ et $z_2 = x' + iy'$
 - a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
 - b) Quelles est l'image par f de la droite (D) d'équation : $x + 2y - 1 = 0$.

Bac complexe TSE et STI de 2025 à 1999

Bac 2025 (Mali)

On considère l'équation $(E): z \in \mathbb{C}, z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0$.

- a. Démontre que (E) admet une solution imaginaire pure que tu détermineras.
b. Résous, dans, l'équation (E) .
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + 2i$, $3i$ et $-2 + 3i$.
Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.
a. Détermine puis écris sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.
b. Démontre que les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont les termes d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.
c. Déduis-en qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Détermine les éléments caractéristiques de cette similitude.

Bac 2024 (Mali)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

S est la similitude plane directe de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' avec $M' = S(M)$.

- Exprime z' en fonction de z .
- On définit la suite des points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante : $\begin{cases} M_0 \text{ d'affixe } z = 1 + i \\ (M_n) = S(M_{n-1}) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$
 z_n est l'affixe de M_n , pour tout entier naturel n .
a. Détermine les affixes des points M_1, M_2 et M_3 .
b. Trouve une relation entre z_n et z_{n+1} pour $n \geq 1$ puis exprime z_n en fonction de z_0 et n . c. Soit $a_n = |z_n|$. Prouve que a_n est le terme général d'une suite arithmétique dont tu préciseras la raison et le premier terme.
d. Etudie la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bac 2023 (Mali)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On donne les points A et B d'affixes respectives : $Z_A = 2 + 2i$ et $Z_B = (1 + \sqrt{3}) + i(3 + \sqrt{3})$

- Ecris le nombre complexe $\frac{Z_A}{Z_B}$ sous sa forme algébrique.
- a) Calcule les distances OA et AB.
b) Compare $4 + 2\sqrt{3}$ et $(1 + \sqrt{3})^2$ puis calcule la distance OB.
c) Détermine en radian, la mesure principale de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OA})$ puis celle de $(\vec{u}; \overrightarrow{OB})$. Déduis-en une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.
- En utilisant les questions précédentes, donne les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.
- a) Détermine l'affixe du point D image de A par la rotation de centre O et d'angle $\alpha = 2(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.
b) Quelle est la nature du quadrilatère OABD? Justifie ta réponse.

Pour la construction de la figure, prends $\sqrt{3} = 1,7$.

Bac 2022 (Mali)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -1 + 3i$, $z_B = -2$ et $z_C = -\frac{3-3i}{2}$.

Soit f l'application du plan privé de A dans le plan qui, à tout point M d'affixe z distinct de z_A , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$.

1. Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 3iz - 2 = 0$.
2. Détermine les affixes des points invariants par f .
3. Détermine l'ensemble des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.
4. En posant $z = x + iy$, détermine $\text{Im}(z')$ en fonction de x et y . Déduis-en l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.
5. a. Montre que pour tout $z \neq -1 + 3i$, on ait l'équivalence :

$$\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z-z_C)(\bar{z}-\bar{z}_C) = \frac{5}{2}$$

- b. Déduis-en l'ensemble des points M tels que M' ait une affixe imaginaire pure.

Bac SE 2021 (Mali)

Soit la fonction polynôme p de l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, dans $\mathbb{C}$ définie pour tout nombre complexe z par : $p(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 + (-14 + 39i)z + 50$.

1. Démontre que la fonction polynôme p admet une racine imaginaire pure notée z_0 .
2. Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$. On note z_1 et z_2 les solutions non imaginaires pures avec $\text{Re}(z_1) < \text{Re}(z_2)$.
3. Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 .
- a. Détermine l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$ puis écris z_G sous la forme exponentielle.
- b. Détermine puis construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$.
- c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCG$?

Bac SE 2020 (Mali)

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$, et pour tout nombre complexe plan complexe z différent de z_B , on pose $Z = \frac{z-z_A}{z-z_B}$.

1. Détermine, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ tel que :
 - a. Z soit un réel ;
 - b. Z soit un imaginaire pur (éventuellement nul) ;
 - c. Z soit de module 1.
2. Calcule $|Z - 1| \times |z - z_B|$ et en déduis que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R , les points d'affixes Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Bac SE 2019 (Mali)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

- 1) Donne la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B .
- 2) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0; 2\pi[$. On considère l'application f qui à tout point M de (C) , associe $f(M) = MA \times MB$.
 - a) Montre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha} \sin \alpha$.
 - b. Montre l'égalité suivante : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right) e^{i\alpha} \right|$.
 - c. En déduis l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2 \sin \alpha \right)^2}$
- 3)
 - a) En utilisant 2)c), montre qu'il existe deux points M de (C) , dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.
 - b) En utilisant 2)c), montre qu'il existe un seul point M de (C) , dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.

Bac SE 2018 (Mali)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 1 cm). On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0.$$

Partie A

- 1) Montre que $-i$ est solution de (E) .
- 2) Détermine les nombres réels a, b, c tels que :
$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c)$$
- 3) Résous l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Partie B

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4 + i; 4 - i; -i$.

1. Place les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = iz - 2i + 2$.

Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r .
Calcule l'affixe s de S .
3. Démontre que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Trace $\mathcal{C}$.
4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.
 - a. Détermine les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C .
 - b. Vérifie que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P , d'affixe i . Détermine son rayon et trace $\mathcal{C}'$.
 - c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprime $|z' - i|$ en fonction de z .
 - d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontre que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.
 - e. En déduis à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points du cercle $\mathcal{C}$.

Bac SE 2017 (Mali)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes : $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

- 1) Exprime Z_{n+1} en fonction de Z_n , puis Z_n en fonction de Z_0 et n .
- 2) Donne Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- 3) Place les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité : 4cm).
- 4) Détermine la distance OM_n en fonction de n .
- 5) a) Montre que $M_n M_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$ (c'est-à-dire $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_n M_{n+1}$).
Détermine L_n en fonction de n , puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.
- 6) Détermine une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}; \overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n .
- 7) Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ?

Bac SE 2016 (Mali)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique 1cm. On considère les points B, D et C définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que $ABCD$ soit un rectangle.

- 1°) Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
- 2°) Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Détermine l'affixe Z_E de E . Construis E .
- 3°) Détermine les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $Z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients a, b et 1.
- 4°) On considère la similitude directe S qui transforme A en E et B en F .
 - a) Exprime Z' en fonction de Z où Z' est l'affixe du point M' image de M par S .
 - b) Détermine le centre Ω , l'angle θ et le rapport k de la similitude S .
 - c) Détermine les images de C et D par S .
 - d) Calcule l'aire de l'image par S du rectangle $ABCD$.

Bac SE 2015 (Mali)

I. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives

$$a = -1 + 3i, b = -4 + 2i \text{ et } c = 1 + 4i.$$

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f .
2. Déterminez l'affixe du point B' image de B par la transformation f . Vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux.
3. Soit $M(x; y)$ où x et y sont des entiers relatifs et M' son image par f . Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
4. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$ et en déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5; 5]$.

Bac STI 2015 (Mali)

On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

- 1) Calcule z^2 et z^4 .
- 2) Calcule le module et un argument de z^4 . En déduis le module et un argument de z .
- 3) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit $M(x; y)$ un point du plan d'affixe le complexe $a = x + iy$. Détermine l'ensemble des points M du plan tels que le module de az soit égal à 8 où z est le complexe défini précédemment.

Bac SE 2014 (Mali/Bamako)

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: $2 - 4i, -i, z$ et z' avec $z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}$.

1. Exprimez les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M .
2. Déterminez et représentez l'ensemble des points M tels que :
 - a) z' soit réel.
 - b) z' soit imaginaire pur.
3. On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifiez que $ZZ' = -3 + 4i$ puis calculez $|ZZ'|$.
4. a) Détermine l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.
b) Déterminez r pour que M et M' soient sur le même cercle.

Bac SE 2014 (Mali/Région)

On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\forall z \in \mathbb{C}, h_n(z) = z^n(1 - z)$.

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}$ résous l'équation $h_n(z) = h_0(z)$.
- 2) On se propose de résoudre le système suivant : (1): $\begin{cases} h_n(z) = h_0(z) \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$
 - a) Montre que l'équation $|z| = |1 - z|$ a une infinité de solutions.
 - b) Soit z_0 l'une de ces solutions, calcule, en fonction du module ρ et l'argument θ de z_0 l'argument de $1 - z_0$; le module et l'argument de $z_0^n(1 - z_0)$.
 - c) En déduis que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$. Quel est l'ensemble des solutions du système ?

Bac STI 2014 (Mali)

- 1) Soit l'équation $(E): z^2 - 6z + 12 = 0$ où z est l'inconnue complexe.
 - a) Montre que (E) admet deux solutions complexes conjuguées u et $\bar{u}$, u étant celle dont la partie imaginaire est positive.
 - b) Calcule le module et un argument de u . En déduis le module et un argument de $\bar{u}$.
 - c) Ecris $u - 4$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
 - d) Calcule le module et un argument de $\frac{u}{u-4}$.
En déduis le module et un argument de $\frac{\bar{u}}{\bar{u}-4}$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -3$; $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 7i$

- a) Construis le triangle ABC .
- b) Calcule les distances AB et BC .

c) Ecris le nombre complexe $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme trigonométrique.

d) Dédus des questions a) et b) la nature du triangle ABC .

Bac SE 2013 (Mali) (pas de nombres complexes)

Bac SE 2012 (Mali)

On considère le complexe Z défini par $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

- 1) On note $Z = X + iY$, $(X; Y) \in \mathbb{R}^2$. Ecris X et Y en fonction de x et y .
- 2) Au complexe z on associe le plan $M(x; y)$ d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Détermine l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul.
- 3) Résous dans l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$. Montre que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ) .

BAC SE 2011 (Mali) (pas de nombres complexes)

Bac SE 2010 (Mali)

On considère l'équation d'inconnue complexe z ,

$$(E) : z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0.$$

1°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera. (1pt)

2°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera. (1pt)

3°/ Achever la résolution dans l'ensemble des nombres complexes de l'équation (E). (1pt) 4°/ En désignant par z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la 4ème solution de (E), montrer que z_0, z_1, z_2 et z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison. (1pt)

5°/ Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E) (1pt)

BAC SE 2009 (Mali)

z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E) : $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$.

a.) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E).

b.) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

BAC SE 2008 (Mali)

On considère le nombre complexe u définis par $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ($i^2 = -1$).

1. a) Calcule u^2 et u^4 .

b) Calcule le module et un argument de u^4 , déduis-en le module et un argument u .

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. A tout point M de coordonnées $(x; y)$ du plan, on associe son affixe $z = x + iy$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

Détermine l'ensemble des points M du plan pour lesquels le module du produit $u \times Z$ égal à 8.

BAC SE 2007 (Mali) (pas de nombres complexes)

BAC SE 2006 (Mali)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

$$(F): z^4 - 2z^3(1 + \sqrt{3}) + 2z^2(3 + 2\sqrt{3}) - 4z(2 + \sqrt{3}) + 8 = 0.$$

8. Démontrer que si le complexe z_0 est une solution de (F) alors il en est de même pour son conjugué $\bar{z}_0$ (c'est-à-dire que $\bar{z}_0$ est aussi solution de (F)).
9. Vérifier que le complexe $z_0 = 1 + i$ est une solution de l'équation (F). En déduire une seconde solution z_1 de l'équation.
10. Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation (F).
11. Représenter dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (F). (Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1cm).
12. Déterminer la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculer en cm^2 l'aire de sa surface.

BAC SE 2005 (Mali)

1. Déterminer sous forme algébrique les racines sixième de l'unité, c'est-à-dire trouver les nombres complexes u tels que $u^6 = 1$.
2. Calculer $(1 - i)^6$.

En utilisant les questions a) et b) donner la forme algébrique des solutions de l'équation d'inconnue z : $8z^6 + i = 0$.

BAC SE 2004 (Mali)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct. On désigne par f l'application du plan qui à tout point M distinct de O et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{5}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z .

1. Détermine l'affixe du point A' image par f du point A d'affixe $1 + i$. Vérifie que les points O , A et A' sont alignés.
 2. Montre que pour tout point M distinct de O , les points O , M et M' sont alignés.
 3. Trouve l'ensemble (Γ) des points invariants par f .
 4. a) Soit $z \neq 0$, montre que si $|z - (1 + i)| = \sqrt{2}$ alors $\left| \frac{5}{1-i} - \frac{5}{z} \right| = \left| \frac{5}{z} \right|$.
- b) Déduis en que si M est un autre point autre que O du cercle (C) de centre A passant par O , alors son image M' par f appartient à une autre droite (D) que l'on déterminera.
- c) Montre que tout points de (D) est l'image par f d'un point de $(C) - \{O\}$ par f .
 - d) Tracer (Γ) , (D) et (C) dans le même repère.
 - e) Déduis en l'image $(C) - \{O\}$ par f .

BAC SE 2003 (Mali) (pas de nombres complexes)

BAC SE 2002 (Mali)

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes ci-dessous ; puis les écrire sous la forme trigonométrique $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z_1 = -2(\cos x + i \sin x); z_2 = -3e^{-i\frac{2\pi}{3}}; z_3 = \frac{-\cos 2x + i \sin 2x}{2\cos 3x - 2i \sin 3x}$$

BAC SE 2001 (Mali) (pas de nombres complexes)

BAC SE 2000 (Mali)

1. a. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique réelle de premier terme r_0 strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$.

Exprimer le terme général r_n en fonction de n et de r_0 .

b. Soit (θ_n) la suite arithmétique réelle de premier terme θ_0 ; $\theta_0 \in [0; 2\pi]$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$.

Exprimer le terme général en fonction de n et θ_0 .

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose : $z_n = r_n e^{i\theta_n}$. Sachant que $z_0 \times z_1 \times z_2 = 8$, déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_0, z_1, z_2 .

2. Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormal direct d'unité graphique 3 cm, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = r_n e^{i\theta_n}$.

a) Placer dans (P) les points $M_0; M_1; M_2$ et M_3 .

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, calculer $\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$ en fonction de n .

c) On pose $I_n = \sum_{k=0}^n \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\|$. Calculer I_n en fonction de n , puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3. a) Ecrire sous la forme trigonométrique ou exponentielle le nombre complexe

$$z = \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta}; \theta \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$$

b) Déterminer le module et un argument du Soit la suite de points M_n du plan complexe, d'affixes respectives définies par : $z_0 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$.

a) Calculer le module et un argument de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.

b) Calculer z_1, z_2, z_3 et vérifier que z_3 est un réel. Placer dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ les points $M_0; M_1; M_2$ et M_3 .

c) Calculer le rapport $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$. En déduire que le triangle $OM_n M_{n+1}$ est rectangle et que : $|z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3} |z_{n+1}|$.

Sujets de mes devoirs

Devoir N°1

Lycée La Bruyère (LBRUY)

Devoir n°1 de Mathématiques			
Classe : TSE	05 novembre 2022	Durée : 3 heures	Coef : 05

Lis attentivement

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 :-----[5,5 points]

A. Détermine le module et un argument de : (1, 5 pts)

$$z_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right); \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} + i \left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

B. Détermine les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un réel positif. (0, 75 pt)

C. Linéarise : $\cos^3(2x) \sin^2\left(\frac{3}{2}x\right)$. (1 pt)

D. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2\bar{z} + 1 - 2i = 0$ (1 pt)

E. Soit $\alpha \in]0; 2\pi[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z .

$$(E): z^2 - (2^{\alpha+1} \cos \alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$$

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). (0, 75 pt)

2. Donne la forme trigonométrique de chaque solution. (0, 5 pt)

Exercice 2 :-----[5,5 points]

A. Soit u et v les nombres complexes définis par : $u = \sqrt{\sqrt{2}+1} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et $v = u^4$.

3. a. Ecris v sous forme algébrique. (0, 5 pt)

b. Détermine les racines quatrièmes de v sous forme trigonométrique. (1 pt)

4. En utilisant les racines quatrièmes de l'unité détermine les racines quatrièmes de v sous forme algébrique. (1, 5 pts)

5. Déduis en les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$. (0, 5 pt)

6. Dans le plan complexe on considère le point M d'affixe $Z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$:

Détermine l'ensemble des points (E) du plan tel que $|u \times Z| = 8$. (0, 5 pt)

B. Résous dans $\mathbb{C}$: $z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$.

Place les points images de ses solutions dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. (1, 5 pts)

Problème :-----[9 points]

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le polynôme

$$f(z) = z^4 - 8z^3 + 41z^2 - 74z + 100$$

1- Soit z_0 un nombre complexe. Montre que $f(\overline{z_0}) = \overline{f(z_0)}$. (0, 75 pt)

2- En déduis que $f(z_0) = 0$ alors $f(\overline{z_0}) = 0$ (0, 5 pt)

3- Calcule $f(3+4i)$. Que conclure ? (0, 5 pt)

4- En déduire la résolution de l'équation $f(z) = 0$ (1 pt)

4- Soit A, B, C et D les points images respectives des solutions $z_A; z_B; z_C$ et z_D de l'équation $f(z) = 0$ tel que $\text{Re}(z_A) > 2$ et $\text{Im}(z_A) > 2$; $\text{Re}(z_B) > 2$ et $\text{Im}(z_B) < 0$; $\text{Re}(z_C) < 2$ et $\text{Im}(z_C) > 0$ et z_D la quatrième solution.

a) Place ces points dans le plan complexe. (1 pt)

b) Soit I le point d'affixe $z_I = 3 + i\sqrt{3}$. Calcule $\frac{z_A - z_I}{z_C - z_I}$. En déduis la nature du triangle ACI. (1 pt)

c) Détermine la nature, le périmètre et l'aire du quadrilatère ACDB. (1 pt)

d) Montre que les points A, B, C et D sont sur le même cercle dont on précisera les coordonnées de son centre et son rayon. (1 pt)

6- On pose $Z = \frac{z+2-3i}{z-z_A}$

Détermine et construis les ensembles (E) des points $M(z)$ vérifiant :

a) $|Z| = 1$, (0, 75 pt)

b) $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (0, 75 pt)

c) $\arg(Z) = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (0, 75 pt)

Devoir N°2

Lycée Public de Niamakoro (LNIAMA)

Devoir n°1 de Mathématiques			
Classe : TSE	05 novembre 2022	Durée : 3 heures	Coef : 05

Lis attentivement

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 :-----[5,5 points]

1°) a) Montre que $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (0, 25 pt)

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 1$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique. **(0,75 pt)**

c) Dédus des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

(E) : $z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. On remarquera que (E) est équivalente à $\left(\frac{z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right)^3 = 1$. **(0,75 pt)**

2°) a) Ecris $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique. **(0,25 pt)**

b) Dédus-en les arguments des solutions de (E). **(0,25 pt)**

3°) Dédus des questions 1)c et 2)b les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. **(0,25 pt)**

II/Détermine et construis l'ensemble (E) des points $M(z)$ vérifiant : **(2 pts)**

1) $|\bar{z} - 2 + i| = 1$

2) $|(1+i)z - 2i| = 2$

3) $|z - 2 + i| \leq 2$

4) $|z - 3 + i| = 2|z + 1 + 5i|$

III/ Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2 = 0$. **(1 pt)**

Exercice 2 : -----[4,5 points]

θ est un réel quelconque, on considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$E(\theta) : Z^2 - 2(1 + 2 \cos \theta)Z + 5 + 4 \cos \theta = 0.$$

1-Résous dans $\mathbb{C}$, les équations $E(\frac{\pi}{2})$ et $E(\frac{\pi}{6})$ en donnant à θ respectivement les valeurs $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{6}$.

(1 pt)

2-Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$, on donne les points A, B, C, D d'affixes respectives : $Z_A = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $Z_B = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $Z_C = \bar{Z}_B$, $Z_D = \bar{Z}_A$.

a) Détermine les formes algébriques des affixes des points puis placer les points dans le repère.

(1 pt)

b) Détermine la nature du quadrilatère ABCD et celle du triangle ABD. **(1 pt)**

c) En déduis que ces points appartiennent à un cercle γ dont on donnera une équation.

(0,5 pt)

3-Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $E(\theta)$. **(0,75 pt)**

a) Démontre que les points qui ont pour affixes les solutions de $E(\theta)$ sont les points de γ .

(0,25 pt)

Problème : -----[10 points]

On considère le polynôme $c = Z^3 - 3\sqrt{2}(1+i)Z^2 + 4(1+3i)Z - 8i\sqrt{2}$

1-a) Calcule $P(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ **(0,75 pt)**

b) Détermine les complexes a et b tels que $P(Z) = (Z - \sqrt{2} - i\sqrt{2})(Z^2 + aZ + b)$ **(1 pt)**

2-Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$ **(1 pt)**

3-Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$Z_0 = \sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 2), \quad Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = \sqrt{2} + i(\sqrt{2} + 2),$$

a) Détermine le module et un argument de Z_0 , Z_1 et Z_2 . **(1,5 pts)**

b) Montre que les points A, B et C sont alignés et que B est le milieu du segment [AC].

(0,75 pt)

3-a) Détermine l'équation de la droite (D) médiatrice du segment [AC]. **(0,5 pt)**

b) Soit M l'ensemble des points de la droite (D) d'affixe Z . Trouve l'expression de Z .

(0, 5 pt)

c) Calcule le rapport $\frac{Z_0 - Z}{Z_2 - Z}$. Déduis-en la nature du triangle MAC . (0, 75 pt)

d) Détermine l'expression de Z pour laquelle MAC est un triangle équilatéral. (0, 5 pt)

B/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1- Trouve l'ensemble de points M d'affixe z tel que les points images des nombres complexes : $1; z; 1 + z^2$, soit alignés. (0, 5 pt)

2- On désigne par le point M d'affixe z et M' d'affixe Z tel que $Z = \frac{z+1}{z-1}$

a- Trouve l'ensemble (D) des points M d'affixe z pour que Z soit réel. (0, 75 pt)

b- Trouve l'ensemble (H) des points M d'affixe z pour que Z soit imaginaire pur. (0, 75 pt)

c- Trouve l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que $O; M; M'$ soient alignés. (0, 75 pt)

Devoir N°3

Lycée Scientifique de Bamako (LSBA)

Devoir n°1 de Mathématiques			
Classe : TSE	23 novembre 2021	Durée : 3 heures	Coef : 05

Lis attentivement :

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 :-----[5 points]

F. Soit α et α' deux nombres complexes de module 1. Démontre que :

5. $u = \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha}$ est réel. (0, 75 pt)

6. $v = \frac{\alpha+\alpha'}{1+\alpha\alpha'}$ est réel pour $\alpha\alpha' \neq -1$. (0, 75 pt)

G. Détermine le module et un argument de $z = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}}$ (0, 75 pt)

H. Détermine les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif. (0, 75 pt)

I. Détermine et représente l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$$\arg\left(\frac{z^2 - 9}{2i}\right) \equiv \arg(z + 3)[\pi] \quad (1 \text{ pt})$$

J. Soit $z' = \frac{\bar{z}+i}{z-2+3i}$; $z \neq 2 - 3i$. Détermine et représente l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que z' décrit le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 1. (1 pt)

Exercice 2 :-----[6 points]

C. Soit u et v les nombres complexes définis par : $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ et $v = u^4$.

7. En utilisant les racines quatrièmes de l'unité détermine les racines quatrièmes de v sous forme algébrique. (2 pts)

8. a. Ecris v sous forme algébrique. (0, 25 pt)

b. Détermine les racines quatrièmes de v sous forme trigonométrique. (1 pt)

9. Dans le plan complexe on considère le point M d'affixe $Z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$:

Détermine l'ensemble des points (E) du plan tel que $|u \times Z| = 8$. (0, 75 pt)

D. Résous dans $\mathbb{C}$: $z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$.

Place les points images de ses solutions dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. (2 pts)

Problème : -----[9 points]

A. On considère le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit $P(z) = z^3 + 2(1 - 2 \cos 2\alpha)z^2 + 4(1 - 2 \cos 2\alpha)z + 8$ avec $\alpha \in]-\pi; \pi[$

1. Calculer $P(-2)$

2. Déterminer les réels a , b et c tels que : $P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$

3. Pour $a = 1$; $b = -4 \cos 2\alpha$ et $c = 4$, résoudre $P(z) = 0$.

4. Calcule le module et un argument des solutions de $P(z) = 0$.

5. Soient A , B et C les points images dans le plan complexe des solutions de $P(z) = 0$. Pour quelle valeur de α le triangle ABC est-il équilatéral ?

B. Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé on considère les points A et B d'affixe respectives 1 et -2 . On appelle (τ) le cercle de diamètre $[AB]$ et I le milieu $[AB]$.

5. Soit C le point d'affixe $c = \frac{1+4i}{1-2i}$. Détermine la forme algébrique de c et prouve que le point C appartient à (τ) .

6. Soit D le point de (τ) tel que $(\widehat{IA, ID}) = \frac{\pi}{3}$. On désigne par d l'affixe de D .

d. Détermine le module et un argument de $d + \frac{1}{2}$.

e. Dédus-en d .

f. Détermine le réel x telque $\frac{1+2xi}{1-xi} = \frac{1}{4} + i \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

7. Soit E un point d'affixe $e = \frac{1+2yi}{1-yi}$ où y est un réel non nul. On pose $Z = \frac{e-1}{e+2}$. Calcule Z et déduis en la nature du triangle ABE .

8. Soit F un point de (τ) autre que B et f son affixe. Démontre qu'il existe un réel t tel que

$$f = \frac{1 + 2ti}{1 - ti}.$$