

Exercice sur les nombres Complexes

Exercice 1 :

Soit les nombres complexes : $z=2+i$ et $z'=1-i$. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $(\overline{2z+z'})$; $(z+\frac{2}{z'})$; $(\overline{z^2+z'^2})$; $(\overline{z+z'})^2$

Exercice 2 :

1) z étant un nombre complexe, on considère l'équation $(E): z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$

a) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E) .

b) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrième de l'unité. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

2) Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a). Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Ecrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A d'affixe a et B d'affixe b dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b). Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe de $A' = r(A)$. Ecrire a' sous forme algébrique et placer A' dans le même repère.

Exercice 3 :

Quel est l'argument d'un nombre complexe z dans les cas suivants :

a) $z = a$; si $a \in \mathbb{R}_+^*$

b) $z = a$; si $a \in \mathbb{R}_-^*$

c) $z = ib$; si $b \in \mathbb{R}_+^*$

d) $z = ib$; si $b \in \mathbb{R}_-^*$

Exercice 4 :

Soient les nombres complexes :

$$a = 1 + i \quad ; \quad b = \sqrt{13 - 5\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}} + i \sqrt{3 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}$$

1. Calculer le module et l'argument de a et b .

2. Exprimer le nombre complexe $c = \frac{a}{b}$ sous la forme algébrique.

3. Construire A ; B et C les points d'affixes respectives a ; b et c dans le plan complexe muni du repère $(O; I; J)$.

Exercice 5 :

Soient les nombres complexes :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{-\sqrt{3} + i} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{4i}{1 - i\sqrt{3}}$$

a) Déterminer le module et un argument de chacun des deux nombres complexes z_1 et z_2

b) En déduire la forme algébrique de : $z_1 z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $z_2^6 \times \frac{z_1^5}{z_2^4}$

Exercice 6 :

I) Ecrire sous forme algébrique les produits :

$$(2+i)(1+i)^2(4-3i) ; (1-i)(1+i)i ; \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

II) A tout nombre complexe z , on associe le nombre complexe Z défini par :

$$Z = iz^2 - (1+i)z + 1$$

a) Calculer Z pour successivement : $z=1$; $z=-i$; $z=1-i$ et $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

b) On pose $z=x+iy$ où x et y sont des réels .déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que $Z \in \mathbb{R}$. Représenter E

Exercice 7 :

I) Linéariser

a) $\sin^6 x$; b) $\cos^7 x$; c) $\cos^4 x \sin^2 x$; d) $\cos^5 x \sin^4 x$

II) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$a) \frac{1+i}{1-i} e^{-2i\frac{\pi}{3}} \quad b) \frac{1+i\sqrt{3}}{e^{3i\frac{\pi}{3}}}$$

Exercice 8 :

Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$

a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .

b) Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $\frac{z_1}{z_2}$.

c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 9 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $(1+i)z = 3+i$

b) $(1+3i)z = 1$,

c) $(1-i)z = 2+3i$,

d) $(5+3i)z = \frac{2+4i}{-1+i}$

e) $\frac{1}{z-1} = i$

f) $\frac{i+z}{3} - \frac{1+iz}{2} = 2iz$.

NB : On mettra les solutions sous forme algébrique.

Exercice 10 :

I) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $z = \frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$

II) Soit les nombres complexes $z_1=1+i$ et $z_2=\sqrt{3}+i$

a) Calculer le module et l'argument de z_1 et z_2

b) Exprimer le nombre complexe $z = \frac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique et sous

forme algébrique .En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

c) Construire M_1, M_2 , et M images ponctuelles respectives de z_1, z_2 ; et z dans le plan complexe

Exercice 11 :

I) soit $Z = \frac{z+2i}{z-i}$ avec $z = x+iy$

a) Déterminer l'ensemble des points M image de z tel que $|Z| = 2$

b) Déterminer l'ensemble des points M image de z pour que Z soit imaginaire pur

II) Dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère le polynôme

$$P(z) = (1+i)z^3 + 2z^2 + (5i-1)z + 10(1+i)$$

a) Montrer qu'il existe dans $\mathbb{C}$ un imaginaire pur z_0 tel que $P(z_0) = 0$. déterminer alors le polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z-z_0)Q(z)$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

c) Représenter dans le plan complexe, les points images des solutions de l'équation $P(z) = 0$

Exercice 12 :

1) a) Vérifier que $(2+i)^4 = -7 + 24i$

b) Trouver les racines quatrièmes de 1

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 7 - 24i = 0$

2) Soit l'équation $(E): z^3 - 2iz^2 - 9z + 18i = 0$

a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b) Résoudre (E) .

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 + z - 1 + 3i = 0$.

Exercice 13 :

I) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $-i$ sous forme trigonométrique et algébrique. en déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $[(1-i)z]^{3+i} = 0$

II) Pour tout complexe $z \neq 1$, on pose $z' = \frac{z-1}{z+1}$, et on appelle A, B, M et M' les points

d'affixes respectives $1, -1, z, z'$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$

a) Comparer $|z-1|$ et $|\bar{z}-1|$ et en déduire $|z'|$ traduire géométriquement ce résultat pour le point M'

b) Calculer en fonction de z et $\bar{z}$, le complexe $R = \frac{z'+1}{z-1}$ et en déduire que R est réel

c) Montrer que les vecteurs AM et BM' sont colinéaires

d) Utiliser ce qui précède pour donner une construction géométrique de M' connaissant M

e) Faire une figure

Exercice 14 :

I) Soit les points $\Omega \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. dans chacun des cas suivants :

.Donner l'écriture complexe de la transformation

.Déterminer l'image de A par la transformation

a) Symétrie de centre Ω

b) Homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$

c) Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$

II)1) Déterminer le module, un argument, la partie réelle et la partie imaginaire des racines 4^{ème} de $-i$

2) Placer dans le plan complexe les points images de ces racines

3) Calculer la somme et le produit de ces racines

Exercice15:

I) Soit $A(3+i)$, $B(2i)$, $C(2-2i)$

1) Placer les points A, B, et C et démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle

2) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer le point D

3) Déterminer l'affixe du point E, symétrique de A par rapport au milieu de $[B, C]$

II) Soit les points $A(-1+i)$, $B(-1-i)$, $C(2i)$ ET $D(2-2i)$

1) Etudier la nature des triangles ACD et BCD

2) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

Exercice 16 :

Soit le nombre complexe $z=x+iy$ (x et $y \in \mathbb{R}$) et M le point d'affixe z dans le plan complexe P rapporté au repère ortho normal (o, u, v) . On désigne par $\bar{z}$ le conjugué de z ($z \neq 0$), et on considère le nombre complexe Z tel que $Z = \frac{z-1}{\bar{z}-1}$

a) Calculer $|Z|$ (on pourra utiliser $\overline{z-1} = \bar{z}-1$)

b) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y

c) Déterminer l'ensemble E des points M du plan (P) tel que Z soit réel, dessiner cet ensemble

Exercice 17 :

z_0, z_1, z_2 , et z_3 quatre nombre complexes tel que : $z_1=iz_0$, $z_2=iz_1$ et $z_3=iz_2$

1) Vérifier que $z_2=-z_0$ et $z_3=-z_1$

2) On pose $z_0=1+i$

a) Ecrire z_1, z_2 , et z_3 sous la forme $x + iy$ où x et y sont des réels

b) Calculer les modules de z_0, z_1, z_2 , et z_3

c) Montrer que z_0, z_1, z_2 , et z_3 sont les solutions complexes de l'équation :

$$(z^2-2iz-2)(z^2+2iz-2)=0$$

d) Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 , et z_3 . Démontrer que le quadrilatère (A, B, C, D) est un carré

Exercice 18 :

Dans l'ensemble C des nombres complexes, on considère l'équation (F) :

$$z^4 - 2z^3(1+\sqrt{3}) + 2z^2(3+2\sqrt{3}) - 4z(2+\sqrt{3}) + 8 = 0$$

a) Démontrer que si le complexe z_0 est une solution de l'équation (F) alors il en est de même pour son conjugué $\bar{z}_0$ (c'est à dire $\bar{z}_0$ est aussi une solution de (F))

b) Vérifier que le complexe $z_0=1+i$ est une solution de l'équation (F). En déduire une seconde solution z_1 de l'équation

c) Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation (F)

d) Représenter dans le plan complexe les points des quatre solutions de l'équation (F), (le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1cm)

e) Déterminer la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculer en cm^2 l'aire de sa surface

Exercice 19 :

I) soit $z = \sqrt{3} + i$ un nombre complexe .comment doit on choisir l'entier relatif n pour que z^n soit un nombre imaginaire pur

II) résoudre dans le

$-16i)z + 89i$; $A(0,-1)$ d' affixe z_A

1) Vérifier que z_A est une solution de l'équation $f(z)=0$

2)a) Trouver les réels p et q tel que $f(z) = (z - z_A)(z^2 + pz + q)$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$

3) On note le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

NB : on utilisera $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$

Exercice 20 :

Pour tout nombre complexe z , on pose

$f(z) = z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i$; $A(0,-1)$ d' affixe z_A

1) Vérifier que z_A est une solution de l'équation $f(z)=0$

2)a) Trouver les réels p et q tel que $f(z) = (z - z_A)(z^2 + pz + q)$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$

3) On note P le plan complexe muni d'un repère orthonormé et $z_A ; z_1 ; z_2$ les solutions de l'équation $f(z)=0$. soit B et C les points de P d'affixes respectives z_1, z_2 ; quelle est la nature du triangle ABC

Exercice 21 :

Dans chacun des cas suivants :

*Déterminer le module et un argument de z .

*En déduire la forme algébrique de z .

a) $z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

b) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

c) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

d) $z = (1 + i)^2$.

e) $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$;

f) $z = (1 - i)^4$;

g) $z = \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{-1 + i}\right)^3$.

Exercice 22 :

Soit les nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$

1) Déterminer le module et un argument des complexes z_1, z_2 et z_3 .En déduire que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectifs z_1, z_2 et z_3 appartiennent à un même cercle que l'on déterminera .Faire la représentation graphique

2) On pose $z_4 = -2z_1 \left(\frac{z_2}{z_3} \right)^2$. mettre z_4 sous la forme algébrique

3) Déterminer les racines carrées de z_4

4) On pose $z_5 = -4z_1z_3$. Déterminer les racines quatrièmes de z_5 . Faire la représentation graphique dans le plan

5) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$

b) Ecrire chacune des solutions sous forme exponentielle

Exercice 23 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2(2+i)z + 6 = 0$.

Déterminer le module et l'argument de chacune de ses racines

2) On considère la fonction polynôme P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$P(z) = z^3 - (11+2i)z^2 + 2(17+7i)z - 42$$

a) Montrer l'existence d'un réel r tel que $P(r) = 0$

b) Montrer l'existence d'une fonction polynôme Q telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = (z-r)Q(z)$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

Exercice 24 :

Soit $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ et $z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$.

a) Écrire sous la forme exponentielle z_1 et z_2 .

b) En déduire la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

* $z_1 \times z_2$

* z_1/z_2

* $(z_1)^3$

* $\frac{z_2^6}{z_1^3}$

* $\frac{z_2^6}{z_1^3}$

Exercice 25 :

1) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = 7 - i + \frac{5}{(1-7i)(1-i)}$

2) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe t dans les cas suivants :

a) $t = \frac{(1+i)^4}{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}$; b) $t = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$; c) $t = \frac{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

3) Linéariser $A = \cos^2 x \sin^3 x$.

Exercice 26 :

Soit a et b deux nombres complexes non nuls. A et B leurs images respectives.

1. a) Démontrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $\overline{a}b$ est un nombre réel.

b) Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel si et seulement si les points O, A et B sont alignés où si $OA = OB$.

2. On suppose dans cette question que les points O, A et B ne sont pas alignés et que les nombres complexes a et b ont pour module 1.

Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel strictement positif.

3. Application :

Soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

a) Calculer, en fonction de z_1 et z_2 , l'affixe Z du barycentre I du système $\{(M_1; |z_2|); (M_2; |z_1|)\}$.

b) Démontrer que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$.

Exercice 27 :

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$.

Ecrire les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b) Placer les images A et B des solutions, A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est négative. Quelle est la nature du triangle OAB ?

2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f .

b) Déterminer sous forme trigonométriques, puis sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par f . En déduire les valeurs de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 28 :

1. Calculer : $(2 + i)^3$,

2. En déduire les racines cubiques de $2 + 11i$.

Exercice 29 :

1. Déterminer le module, un argument, la partie réelle et la partie imaginaire des racines 4^{ème} de i .

2. Placer dans le plan complexe les points images de ces racines.

3. Calculer la somme et le produit de ces racines.

Exercice 30 :

Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

a) Démontrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et déduire que α et β sont des solutions de l'équation $(E): Z^2 + Z - 1 = 0$

b) Exprimer α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

c) Résoudre (E) et en déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

2. On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives $1, z_0, z_0^2, z_0^3$ et z_0^4 .

a) Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec la droite de repère $(O, \vec{e}_1)$.

Démontrer que l'affixe du point H est $\cos \frac{2\pi}{5}$.

b) Soit (Γ) le cercle de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i .

(Γ) Coupe la droite du repère $(O, \vec{e}_1)$ en M et N ; M étant le point d'abscisse positive.

Démontrer que M et N ont pour affixe respectives α et β et que H est le milieu de $[O, M]$.

c) En déduire une construction simple d'un pentagone régulier dont on connaît le centre et un sommet A_0 .

Exercice 31 :

Calculer dans $\mathbb{C}$ le nombre complexe $\frac{1+z+z^2}{2+z}$ dans les cas suivants :

$z = i; z = 1 + 3i; z = 1 + i;$

$z = 3 + 5i; z = \frac{2+4i}{-1+i}$ (On mettra les résultats sous la forme algébrique).

Exercice 32 :

On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2 ; j^3 et $1 + j + j^2 + j^3$.

Exercice 33 :

On considère les nombres complexes : $a = -\sqrt{3} + i$; $b = 3 + 2i$ et $c = 7 - 2i$.

1.a) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a . En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

b) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre réel.

c) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre imaginaire pur.

2. Déterminer et construire les ensembles de point M d'affixe z tels que :

a) $|z - b| = |z - c|$

b) $2|z - b| = |a|$.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.

a) Démontrer que f admet un point invariant(Ω).

b) Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre Ω

Préciser l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie.

c) Déterminer et construire les images par f des ensembles déterminés à la question 2.

Exercice 34 :

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{5}}}$

b) $\frac{1 - \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta - i\sin\theta}$;

Exercice 35 :

Soit z un nombre complexe de module 1 tel que : $z + \frac{1}{z} = \cos\theta$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n on a : $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$

Exercice 36 :

1. Calculer : i^3 ; i^4 et i^5 . En déduire i^{18} et i^{19} .

2. Calculer : $1 + i + i^2 + i^3$, puis $i^{199} + i^{200} + i^{201} + i^{202}$.

3. Calculer : $\sum_{k=0}^{2000} (i)^k$ et $\sum_{k=0}^{2000} (-i)^k$.

Exercice 37 :

Déterminer et construire les ensembles de points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

a) $|z + \bar{z} - 1| = 4$,

b) $|z - \bar{z} + 1 - i| = 2$,

c) $|z + 5 - 2i| = |z - 2 + i|$,

d) $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z - 1|$.

Exercice 38 :

Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée :

a) $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 3 = 0$,

b) $(z\bar{z})^2 - z\bar{z} - 6 = 0$,

c) $(z - 1 - i)(\bar{z} - 1 + i) = 5$,

- d) $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$,
 e) $z^2 - (1 - 2i)^2 = \bar{z}^2 - (1 + 2i)^2$.

Exercice 39 :

1- Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants

$$Z_1 = (2 + i)(-1 + i) + (1 + 2i); Z_2 = (1 + i\sqrt{3})^3; Z_3 = \frac{1-3i}{3+i}$$

2- Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes

$$Z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{13}; Z_2 = 1 + i\sqrt{3}; Z_3 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9(1-i)}{(1+i)^2}; Z_4 = \sin \alpha + i(1 + \cos \alpha) \text{ avec } \alpha \in [0; \pi[.$$

3) Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tels que le nombre complexe $Z = (1 - z)(1 - iz)$ soit :

- a) un réel,
 b) un imaginaire pur.

Exercice 40 :

1) Soit z et Z les nombres complexes définis par :

$$z = \sqrt{1 + \sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1} \text{ et } Z = z^4$$

Déterminer les racines quatrièmes de Z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique ; en déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$

2) Déterminer $a = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2011}$ et $b = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2010}$

3) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition proposée :

a) $|z + 1 + 2i| = |z - 4|$; b) $|z - 3i| = 2$; c) $|\bar{z} - 2 + i| = 1$

Exercice 41 :

Le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + \frac{1}{2} + i)^2 + \frac{1}{4} = 0$.

2) On donne les points $A(-1; -5)$ et $B(\frac{1}{3}; \frac{1}{6})$. A tout point M d'affixe $z (z \neq -1 - 5i)$, on

associe le point M' d'affixe Z tel que $Z = 3i \left(\frac{z - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}i}{z + 1 + 5i} \right)$

a) Déterminer l'ensemble (Γ) des nombres complexes tels que $Z = z$.

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que : $|Z| = 3$

c) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M tels que M' décrit le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 1 ;

d) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que M' décrit le demi axe $[O, \vec{u})$ privé de $\{O\}$

Exercice 42 :

Soit $f: \mathbb{C} - \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$$

1) Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que :

$$f(z_0) = 1 + 2i$$

2) Soit $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$. On note r le module de $z + i$ et α une mesure de son argument. Donner la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α .

3) Soit A le point d'affixe $-i$.

- a) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M vérifiant : $|f(z) - i| = 2$ et l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure l'argument de $f(z) - i$.
- b) Montrer que B appartient à $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{D})$ puis construire $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{D})$.
- 4) À tout point d'affixe $Z = (\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}})z$. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M tels que $|Z| = 8$.
- 5) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (1 + i\sin 2\theta)z + \frac{1}{2}i\sin 2\theta = 0$ où θ est un paramètre réel. En discutant selon les valeurs de θ , on écrira les solutions z_1 et z_2 de cette équation sous la forme trigonométrique.

Exercice 43 :

On considère l'équation d'inconnue complexe

$$z, (E): z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0.$$

- 1). Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
- 2). Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
- 3). Achèver la résolution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation (E) .
- 4) En désignant par z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la 4^{ème} solution de (E) , montrer z_0, z_1, z_2 et z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
- 5). Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E) .

Exercice 44 :

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $-\frac{1}{3} - 2i$; $1 + 2i$ et $\frac{7}{3} + 6i$.

1. Démontrer que B est le milieu de $[A, C]$.
2. Déterminer les affixes des points D et E tel que $ADCE$ soit un carré de sens direct.

Exercice 45 :

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $1 + 2i$; $2 + i$ et $2 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B et déterminer une mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$.
2. Déterminer le point D , symétrique de A par rapport B Quelle est la nature du triangle ADC ?