

Synthèse d'exercices sur les nombres complexes	Prof : A. Doumbia (00223) 72 600 800
COURS PRIVE DONYA (C.P.D)	

Exercice 1 :

Soit $z = 1 - 3i$ et $z' = -3 + 2i$.

- 1) Détermine la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

$$Z_1 = z \times z' ; Z_2 = z^2 \times z' ; Z_3 = \frac{z-2}{z'+i} .$$

- 2) Détermine la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

$$Z_4 = \bar{z} \times z' ; Z_5 = z^2 \times \bar{z}' ; Z_6 = \frac{z-2}{z'+i} .$$

Exercice 2 :

Ecris sous la forme algébrique, chacun des nombres complexes suivants :

$$z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{3\pi}{4}} ; z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{3e^{-i\frac{3\pi}{4}}} ; z = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{5\pi}{6}}} ; z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) ; z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) ;$$

$$z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Exercice 3 :

On donne : $a = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ et $b = 3 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$.

- Ecris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants : $a \times b$; $a \times b^2$; $a^2 \times b$; $\frac{b}{a^2}$
- Déduis-en la forme algébrique de $a \times b$ et $\frac{a}{b}$.

Exercice 4 :

Soit $\theta \in]-\pi; \pi[$, mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} ; z = -7 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) ; z = \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}} ; z = (1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}} ;$$

$$z = 1 + \cos \theta - i \sin \theta ; z = \frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} ; z = \frac{1-\cos \theta - i \sin \theta}{1+\cos \theta + i \sin \theta} ; z = \frac{1}{1+i \tan \theta} ; z = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\sin \theta - i \cos \theta} .$$

Exercice 5 :

A-) On pose $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

- Calcule z^2 puis en déduis sa forme trigonométrique.
- En déduis la forme trigonométrique de z .
- Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$, $\sin \frac{7\pi}{12}$; $\cos \frac{\pi}{12}$; $\sin \frac{\pi}{12}$.

B-) On considère le nombre complexe : $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$.

- Ecris z^2 sous forme algébrique.
- Détermine le module et un argument de z^2 . En déduis le module et un argument de z .
- Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 6 :

On donne $A = 5\sqrt{2}(1 + i)$ et $B = -5(1 + i\sqrt{3})$

- 1) Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : A ; $\bar{A}$; B ; $\frac{1}{A}$;

$$A \times B ; \frac{B}{A} \text{ et } \frac{A}{B^2}$$

- 2) Soit Z un nombre complexe tel que $AZ = B$.

a. Ecris Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b. En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{13\pi}{12}$ et de $\sin \frac{13\pi}{12}$.

Exercice 7 :

I-) Soient trois nombres complexes : $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$; $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$.

On pose $Z = \frac{z_1^3 \times z_3^4}{z_2^6}$

- 1) Ecris les nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle.
- 2) Dédus-en une forme exponentielle du nombre complexe Z .
- 3) Calcule alors la forme algébrique de Z .

II-) On donne les nombres complexes $u = 2\sqrt{3} - 2i$, $v = -1 + i$ et $w = u.v$.

- 1) Ecris u , v et w sous forme exponentielle.
- 2) Ecris w sous forme algébrique puis détermine les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 3) Ecris u^{2015} et v^{2015} sous forme algébrique.

Exercice 8 :

Soit x un nombre réel.

Linéarise les expressions suivantes :

$\sin^4 x$; $\cos^4 x$; $\sin^2 x \times \cos x$; $\sin^3 x \times \cos^2 x$; $\sin^3 \left(\frac{x}{2}\right)$; $\cos^3 \left(\frac{x}{2}\right)$
 $\cos 5x \times \sin 3x$; $\cos^3 2x$; $\sin 3x \times \cos^2 2x$; $\sin^4 x + \cos^4 x$.

Exercice 9 :

1. Détermine les nombres complexes z_1 ; z_2 et z_3 vérifiant les conditions suivantes :

$$a) \begin{cases} |z_2| = 2|z_1| \\ |z_3| = 2|z_2| \end{cases} ;$$
$$b) \begin{cases} \arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{\pi}{2} \\ \arg(z_3) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{2} \\ 0 < \arg(z_1) < \frac{\pi}{2} \end{cases} ;$$

$$c) z_1 \times z_2 \times z_3 = 64i.$$

2. Ecris sous forme algébrique $Z = \frac{z_3}{z_2}$ et Z^{2016} .

3. Détermine le plus petit entier naturel non nul n tel que Z^n soit imaginaire pur.

Exercice 10 :

On considère le nombre complexe a défini par: $a = \frac{3-i}{2+i} + \frac{2+i}{i} - 3(1-2i)^2 - 2(2+i)(3+i)$

- 1) Ecrire a sous forme algébrique.

- 2) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système d'inconnues z et z' : $\begin{cases} z + iz' = 1 + i \\ \frac{1}{2}z + (1-i)z' = 2 - 5i \end{cases}$

- 3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{u}; \vec{v})$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B , où z_A et z_B sont les solutions du système défini dans la question 2 avec z_A la solution imaginaire pure et z_B l'autre solution.

On considère l'application f du plan complexe privé de A qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que: $z' = i \frac{z - z_B}{z - z_A}$

- a) Soit C le point d'affixe $1 - i$. Calculer l'affixe de l'image de C par f .

- b) Interpréter géométriquement le module et l'argument de z' .

- c) En déduire :

c-1) L'ensemble (E_1) des points M tel que : $z' \in \mathbb{R}^*$.

c-2) L'ensemble (E_2) des points M tel que : $z' \in i\mathbb{R}^*$.

c-3) L'ensemble (E_3) des points M tel que : $|z'| = 1$.