

**ACTIVITE 15** : cor. p : 240

On considère les nombres complexes  $\alpha = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$  et

$$\beta = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$$

1°) Ecris  $\alpha$  et  $\beta$  sous forme exponentielle.

2) Soit  $\theta$  un réel de l'intervalle  $]0; \pi[$ .

a- Résous dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$   
On désignera par  $z_1$  la solution ayant une partie imaginaire négative et par  $z_2$  l'autre solution.

b- Ecris  $z_1$  et  $z_2$  sous forme trigonométrique.

3°) Détermine  $\theta$  pour que l'on ait  $z_1 = \alpha$  et  $z_2 = \beta$ .

**ACTIVITE 16** : cor. p : 240

## Exercice 15

On considère  $\alpha = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\beta = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

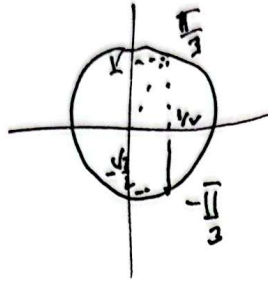
1) Ecrire  $\alpha$  et  $\beta$  sous forme exponentielle.

$$\alpha = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\alpha| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$|\alpha| = \sqrt{\frac{4}{4}}$$

$$|\alpha| = 1$$



$$\alpha = [r, \theta]$$

$$\text{Donc } \alpha = \left[1; -\frac{\pi}{3}\right]$$

$$\alpha = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \quad \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\beta = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\beta| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$|\beta| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$|\beta| = \sqrt{\frac{12}{4}}$$

$$|\beta| = \sqrt{3}$$

$$\beta = \sqrt{3} \left( \frac{\frac{3+i\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \sqrt{3} \left( \frac{3+i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right)$$

$$= \sqrt{3} \left( \frac{3}{2\sqrt{3}} + i\frac{1}{2} \right)$$

$$= \sqrt{3} \left( \frac{6\sqrt{3}}{12} + i\frac{1}{2} \right)$$

$$= \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\beta = [r, \theta] \text{ avec } r = \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\beta = \left[ \sqrt{3}, \frac{\pi}{6} \right] \quad \beta = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2)  $\theta \in ]0, \pi[$

a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$

$$z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$$

$z_1$  partie imaginaire négative

$z_2$  l'autre

On a.  $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$

posons  $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (-2)^2 - 4(1)(1 - e^{2i\theta})$$

$$= 4 - 4(1 - e^{2i\theta})$$

$$= 4 - 4 + 4e^{2i\theta}$$

$$\Delta = 4e^{2i\theta}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2e^{i\theta}$$

$$z_1 = \frac{2 - 2e^{i\theta}}{2} = 1 - e^{i\theta}$$

$$z_2 = \frac{2 + 2e^{i\theta}}{2} = 1 + e^{i\theta}$$

Identification  $z_1$  et  $z_2$

$$1 - e^{i\theta} = 1 - (\cos \theta + i \sin \theta) = (1 - \cos \theta) - i \sin \theta \quad \text{or } \theta \in ]0, \pi[$$

$$\boxed{z_1 = 1 - e^{i\theta}}$$

et  $\boxed{z_2 = 1 + e^{i\theta}}$

$$\sin \theta > 0$$

donc partie imaginaire

-  $\sin \theta$  négative

1) b) Ecrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme Trigo

$$z_1 = 1 - e^{i\theta} = (1 - \cos \theta) - i \sin \theta$$

Remarque Trigo.

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\sin(\theta) = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= (1 - \cos \theta) - i \sin \theta = 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - i \left[ 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &= 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) - i \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &= 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &= 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ \cos \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ \cos \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right]} \quad \text{cf. A}$$

Pour  $z_2$  :  $z_2 = 1 + e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} z_2 &= (1 + \cos \theta) + i \sin \theta \\ &= 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + i \left[ 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &= 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

ou  $\theta \in ]0, \pi[$

$\frac{\theta}{2} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $\cos \left( \frac{\theta}{2} \right) > 0$

donc

$$\boxed{z_2 = 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]}$$

cf. B

3) Déterminons  $\theta$  pour  $z_1 = \alpha$  et  $z_2 = \beta$

$$\begin{cases} z_1 = \alpha \Rightarrow 1 - e^{i\theta} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad (1) \\ z_2 = \beta \Rightarrow 1 + e^{i\theta} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \quad (2) \end{cases} \text{Système à résoudre}$$

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow 1 - e^{i\theta} &= e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow e^{i\theta} = 1 - e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= 1 - \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= 1 - \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ e^{i\theta} &= e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Pour  $\theta = \frac{\pi}{3}$  remplaçons dans (2)

$$\begin{aligned} (2) \quad 1 + e^{i\theta} &= 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 + e^{i\theta} &= \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{Vrai} \end{aligned}$$

Donc  $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$  Q.E.D.

$$\theta \in ]0, \pi[ \Rightarrow \frac{\pi}{3} \in ]0, \pi[$$

Jagouin  
Frédéric.