

*Lycée Privé Garba Maiga de Tombouctou (L.P.G.M.D)***Série d'exercices sur les nombres complexes****Exercice 1 :**

1°) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

$$z_1 = (1+i)(1-2i)(1+3i) \quad ; \quad z_2 = \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i} \quad ; \quad z_3 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_4 = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)} \quad ; \quad z_5 = \left(\frac{3-i}{1-2i} \right)^2 \quad ; \quad z_6 = \frac{(-1-2i)^3}{(1+i)^4}.$$

2°) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes puis donner la forme trigonométrique :

$$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} \quad ; \quad z_2 = (\sqrt{8} + i\sqrt{8})(-3 + i\sqrt{3}) \quad ; \quad z_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$$

$$z_4 = (-1-i)^4 \quad ; \quad z_5 = \left[(1-i) \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]^6 \quad ; \quad z_6 = \left(\frac{2+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} \right)^3.$$

$$z_7 = -\cos\alpha + i\sin\alpha \quad ; \quad z_8 = -\cos\alpha - i\sin\alpha \quad ; \quad z_9 = \cos\alpha - i\sin\alpha \quad \text{et} \quad z_{10} = \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$$

3°) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants.

$$z_1 = (-1-i)i \quad ; \quad z_2 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z_3 = \frac{5-5i}{10e^{i\frac{\pi}{4}}} \quad ; \quad z_4 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i} \right)^{10}.$$

Exercice 2 :

1) Linéarise les expressions : $A = \sin^3 x$; $B = \cos^3 \frac{x}{2}$; $C = \sin^3 x \cdot \cos^3 x$

2) Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $Z^2 - 2Z + 2 = 0$; b) $Z^2 - 2Z + 1 = 0$; c) $Z^2 + 2\sin\alpha Z + 1 = 0$

e) $Z^2 - 2\cos\alpha Z + 1 = 0$; f) $4Z^2 - 4(1+i)Z - (45+26i) = 0$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$, les systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} 5iz + (2-i)z' = 1+12i \\ (2-3i)z + (5-2i)z' = 39-10i \end{cases} \quad ; \quad b) \begin{cases} 2iz + (1-3i)z' = 14+6i \\ (1-i)\bar{z} + (5-2i)\bar{z}' = 4-18i \end{cases}.$$

4) Déterminer les nombres complexes vérifiant :

$$i) \begin{cases} z + \bar{z} = 13 \\ z \times \bar{z} = -6 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 6 \\ Z_1 + Z_2 = 5 \end{cases} \quad ; \quad iii) \begin{cases} (2+3i)Z - 5Z' = -1 \\ (1-i)Z + 2Z' = 2(1+i) \end{cases}$$

5) Résous dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

Prof : Nouhoum Amadou
Tels : 92 08 71 25 / 68 61 21 75

Année Académique : 2023 – 2024

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1 + i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases}$$

Exercice 3 :

A-1) Développe le produit de facteurs suivant : $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

2) Résous l'équation $Z^4 = 1$

3) En déduis des questions 1) et 2) la résolution des équations suivantes :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \text{ Puis } \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^2 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right) + 1 = 0$$

B- On donne le nombre complexe Z tel que : $Z = 2 + 3i$

1) Vérifie $Z^4 = -119 - 120i$

2) Détermine les racines quatrièmes de l'unité.

3) En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^4 = -119 - 120i$

Exercice 4 :

I- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère le polynôme $p(Z)$ telque :

$$1) p(Z) = Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i$$

2) Démontre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution réelle que l'on notera Z_1 , dont on Déterminera la valeur.

3) Factorise $P(Z)$ puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

II- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère le polynôme $p(Z)$ tel que : $p(Z) = Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1$

1) Montre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.

2) Factorise $p(Z)$ puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.

III- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère le polynôme $p(Z)$ telque : $p(Z) = Z^3 + 2(1 - 2\cos 2\theta)Z^2 + 4(1 - 2\cos 2\theta)Z + 8$

1) Calcule $p(-2)$.

2) Factorise $p(Z)$ puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.

3) On désigne par $Z_1 ; Z_2$ et Z_3 les solutions de l'équation $p(Z) = 0$.

Calcule le module et un argument de $Z_1 ; Z_2$ et Z_3 .

4) On désigne par $A ; B$ et C les points d'abscisses respectives $Z_1 ; Z_2$ et Z_3 .

Pour quelles valeurs de θ , le triangle ABC , est-il équilatérale ?

Exercice 5 :

I- Soit f la fonction à variable complexe Z telle que : $f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$

1) Prouver que si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes : $\overline{Z_0}$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.

2) Détermine $f(1+i)$ et en exploitant ce qui précède, Trouve toutes les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

II- Soit le polynôme $P(Z)$ définie par :

$$P(Z) = Z^4 - (1 + \sqrt{2})Z^3 + (2 + \sqrt{2})Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + 1$$

1) Vérifie que : $P(Z) = Z^2 \left[\left(Z + \frac{1}{Z} \right)^2 - \left(Z + \frac{1}{Z} \right) (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right]$ avec $Z \neq 0$

2) En utilisant la question précédente, Résous l'équation $P(Z) = 0$.

III- On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe u tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

1- Calcule les racines carrées de u .

2- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2Z^2 + 2iZ + i\sqrt{2} = 0$.

(On notera Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation).

3- Montre que : $\left| \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right| = \sqrt{2}$

Exercice 6 :

A) On pose : $A = 5\sqrt{2}(1+i)$; $B = -5(1+i\sqrt{3})$

1) Soit Z un nombre complexe tel que : $AZ = B$

a) Ecris Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) En déduis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

c) Calcule $(Z)^{12}$

B) On pose : $Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calcule Z^2 puis Détermine son module et son argument.

2) En déduis de ce qui précède le module et un argument Z .

C) On pose : $|Z| = 2\sqrt{2}$ et $\arg[(1+i\sqrt{3})Z] = \frac{7\pi}{12}$.

Détermine la forme trigonométrique et exponentielle de Z .

Exercice 7 :

A- Détermine les ensembles suivants :

1) L'ensemble (Ω) des points M d'affixes Z tels que : $|Z - i| = 2$

2) L'ensemble (Γ) des points M d'affixes Z tels que : $|\bar{Z} - i| = 2$

3) L'ensemble (λ) des points M d'affixes Z tels que : $|Z + 1 - 2i| = |\bar{Z} - 1 - i|$

4) L'ensemble (φ) des points M d'affixes Z tels que : $\arg(Z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$

5) L'ensemble (ω) des points M d'affixes Z tels que : $\arg(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

B- Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o; \vec{i}; \vec{j})$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de 1 et soit $Z = \frac{z+1}{z-1}$

Détermine puis construis l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées : 1) $|Z|=1$; 2) Z est un réel. ; 3) Z est un imaginaire

Exercice 8 :

I- Soient A, B, C trois points d'affixes respectives :
 $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.

Démontre que ces trois points sont alignés (on fera une figure).

II- Soient A, B, C trois points d'affixes respectives : $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

i) Démontre que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

ii) Détermine l'affixe de D tel que : $ABCD$ soit un parallélogramme (on fera une figure).

III- Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectives :
 $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

i) Etudie la nature des triangles ABC et BCD .

ii) Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on

iii) Déterminera le centre et le rayon (on fera une figure).

Exercice 9 :

A- On considère un repère orthonormé direct $(O ; \vec{U} ; \vec{V})$ du plan complexe. Soit les points $A ; B ; C$ d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 + i ; Z_B = \frac{2[\cos(\frac{7\pi}{15}) + i\sin(\frac{7\pi}{15})]}{\cos(\frac{\pi}{5}) - i\sin(\frac{\pi}{5})} \text{ et } Z_C = 2 - 2i$$

a) Ecris les complexes $Z_A ; Z_B$ et Z_C sous forme exponentielle.

b) Détermine l'affixe Z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\vec{OB} ; \vec{OD}) = \frac{\pi}{3}$.

B- Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{U} ; \vec{V})$.

On considère :

- Le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$.
- Le point B d'affixe Z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\vec{OA} ; \vec{OB}) = \frac{\pi}{3}$.
- Le point Q d'affixe Z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$.
- Le point K d'affixe Z_K est tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.

1) Détermine les affixes $Z_B ; Z_Q$ et Z_K respectivement des points $B ; Q$ et K .

2) Démontre que $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur. En déduis la nature du triangle OKA .

3) Soit C la point d'affixe Z_C tel que $Z_C = \frac{2Z_A}{3}$

Calcule $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$. Que peut-on en déduis pour les points $B ; C$ et K ?

Exercice 10 :

On considère l'ensemble des complexes Z_n tels que : $\forall n \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n \end{cases}$$

1) On note M_n le point d'affixe Z_n dans le plan rapporté au repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

a- Calcule $Z_1 ; Z_2 ; Z_3$ et Z_4 .

b- Placer les points M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 .

2) Calcule le quotient : $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ puis en déduis la nature du triangle $OM_{n+1}M_n$

Exercice 11 :

I- Soit (S) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe Z' d'affixe M' tel que : $Z' = (1 + i)Z + 1 - i$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (S) .

II- Soit la similitude directe plane S de centre $A(1 ; 1)$; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformé le point M' d'affixe Z' . Exprime Z' en fonction de Z .

III- Soient A, B, C et D les points d'affixes $Z_A = -1 - i ; Z_B = i ; Z_C = 1 + 3i ; Z_D = 5 + i$. Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D .

1) Détermine le rapport k et l'angle θ de S

2) Détermine l'écriture complexe f associée à S .

3) Détermine l'affixe de Ω le centre de S

IV- Détermine la traduction complexe de la transformation (Γ) dans chacun des cas suivants :

1) (Γ) est la translation qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$

2) (Γ) est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$.

3) (Γ) est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + i$.

Exercices 12 :

A- Soit f la transformation définie par $Z' = aZ + 3i$

1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f si : $a = 2$ puis si $a = -i$.

2) Soient $A(1) ; B(2 + i) ; A'(2i) ; B'(1 + i)$. Vérifie que $AB = A'B'$

3) Démontre qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

B- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : Z^3 - (4 + i\sqrt{3})Z^2 + (3 + 4i\sqrt{3})Z - 3i\sqrt{3} = 0$

1) Montre que (E) admet deux solutions réelles que l'on notera α et β puis une solution imaginaire pure que l'on notera ω .

2) Soit f , l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout nombre complexe Z , on a :

$$f(Z) = aZ + b.$$

- Détermine les réels a et b pour que $f(\omega) = \omega$ et $f(\alpha) = \beta$.
- Calcule le module et un argument de a .
- Donne la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .

Exercice 13 :

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. A est le point d'affixe $2i$ et P^* le plan privé de A .

Soit T la transformation qui au point M d'affixe $Z \neq 2i$ associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = \frac{2iZ-5}{Z-2i}$.

- Montre que pour tout point M de P^* , le point M' est distinct de A .
- Démontre que T est une bijection de P^* sur lui-même.
- Détermine sa réciproque T^{-1} .
- Montre qu'un point M de P^* est invariant par T si et seulement si son affixe vérifie la relation : $Z^2 - 4iZ + 5 = 0$.
 - Trouve le réel α tel que : $Z^2 - 4iZ + 5 = (Z - 2i)^2 + \alpha$.
 - Montre alors que T admet deux points invariants B et C .
- On appelle (D) la droite passant par O et dirigée par $\vec{v}$ et (D^*) la droite (D) privé de A .
Montre que (D^*) est globalement invariante par T .
- Montre que pour tout $Z \neq 2i$, $|Z' - 2i| \times |Z - 2i| = 9$.
 - Soit (Γ) le cercle de centre A et de rayon 3. Montre que (Γ) est globalement invariante par T .

Exercice 14 :

A- Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On donne quatre points $A ; B ; C$ et D d'affixes respectives :

$$Z_A = -2 + 6i ; Z_B = 1 - 3i ; Z_C = 5 + 5i \text{ et } Z_D = 2 + 4i$$

- Soit S la similitude plane directe qui tout point M d'affixe Z , fait correspondre le M' d'affixe Z' tel que : $Z' = 3iZ + 13 - 9i$.
 - Donne les éléments caractéristiques de S .
 - Quelle est l'image des points C et D par la similitude S ?
 - Montre que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.
- Soit R la similitude plane directe qui transforme B et C et D en A .

- a- Trouve la relation liant l'affixe Z d'un point M et l'affixe Z' de son image $R(M)$.
 - b- Donne les éléments caractéristiques de cette similitude (on appellera J le point invariant). Montre que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.
 - c- Que représente le point D pour le triangle ABC ?
- 3) Montre que J est un point de la droite (AB) . Donne une mesure en radian de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$.
- B- Soit α un nombre complexe.
- 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1 + i)Z^2 - 2i(\alpha + 1)Z + (i - 1)(\alpha^2 + 1) = 0$.
 - 2) Soient Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation.
Trouve entre Z_1 et Z_2 , une relation indépendante de α .
 - 3) Caractérise la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe Z_1 associe le point M_2 d'affixe Z_2 .
 - 4) On pose $Z_1 = x + iy$ et $Z_2 = x' + iy'$.
 - a- Exprime x' et y' en fonction de x et y .
 - b- Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation $x + 2y - 1 = 0$?

Problèmes

I

Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(Z) = \frac{iZ}{Z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe Z .

- 1) Détermine les coordonnées du point B dont l'affixe Z_B et telle que $f(Z_B) = 1 + 2i$
- 2) Soit Z un élément de E . on note r le module de $Z + i$ et α une mesure de son argument. Exprime la forme trigonométrique de $f(Z) - i$ en fonction de r et α .
- 3) Soit A le point d'affixe $-i$
 - a) Détermine l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$
 - b) Montre que B appartient à (Γ) .

II

Partie A : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$
- 2) Soit $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$
 - a- Montre que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution réelle notée z_0 que l'on Déterminera.
 - b- Factorise $P(Z)$ puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

Partie B:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (o, i, j)

On donne les points A ; B et C d'affixes respectives :

$$Z_A = 2 ; Z_B = 4 + 2i ; Z_C = -2 + 4i$$

1) a- Calcule le rapport : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ et en déduis la nature du triangle ABC

b-Montre que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

c-Détermine (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe Z vérifiant l'équation suivante : $|Z - 4 - 2i| = |Z + 2 - 4i|$

2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.

a- Déterminons le rapport k et l'angle θ de la similitude S .

b- Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S .

a- En déduis le centre de la similitude S .