

ACADEMIE D'ENSEIGNEMENT
DE KALABANCORO
Lycée Public de NIAMANA

ANNEE SCOLAIRE : 2024-2025
CLASSE: TSE

EXERCICES : Nbres Cplex

EXERCICE 0:

Soit les points A,B et C d'affixe respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-iz - 2}{z + 1}$$

- Donner l'affixe c' du point C' image de C par f sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
- Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.
- $\forall z \in \mathbb{C} - \{-1\}$, on note p le module de $z + 1$ et p' celui de $z' + i$.
 - Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C} - \{-1\}$, on a : $pp' = \sqrt{5}$.
 - Si le point M appartient au cercle (G) de centre A de rayon 2, montrer alors que $M'=f(M)$ appartient au cercle (G') dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 1:

- Calcule : i^9 ; i^{19} ; i^{123} ; i^{2006} et i^{2025} .
 - Détermine les entiers naturels n tels que i^n est imaginaire pur.
 - Déterminer les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif.
- Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
 $z_1 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)}$; $z_2 = (\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-2i)$; $z_3 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$; $z_4 = (1-2i)(2+i)(\sqrt{3}+i\sqrt{2})$
 - On pose : $f(z) = (3-2i)z^2 + (5-i)z + 2 + 5i$
 Calcule et donne la forme algébrique de chacun des nombres :
 $f(i)$; $f(-1+2i)$; $f(1+i)$; $f(1-i)$
- Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :
 $z_1 = (1-i)^2$; $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$; $z_3 = (2-2i\sqrt{3})(-3-3i)$; $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_5 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$
 $z_6 = (1+i)e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_7 = 5(\cos\frac{\pi}{3})e^{-i\frac{5\pi}{6}}$; $z_8 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2022}$
- Écrire sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants :
 - $i(-1-i)^2$
 - $(\sqrt{3}+i)(-1-i\sqrt{3})$
 - $(3-3i)^2(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^6$
 - $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{4}i}$
 - $\frac{e^{-\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$
 - $\frac{5-5i}{10e^{\frac{\pi}{4}i}}$
 - $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{10}$
 - $\frac{2i}{1-i}$
- Calcule le module des nombres complexes suivants :
 - $z = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)}$
 - $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3$
 - $z = \frac{2}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$
 - $z = -\frac{3}{4}i$
 - $z = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$
 - $z = (1+5i)^5(-2+i\sqrt{2})^2$
 - $z = \frac{(-5+7i)(4-2i)}{(3+4i)(7+5i)}$
 - $z = \frac{(1-i)^2}{(1+i)^3}$
- Détermine le module et un argument des nombres complexes suivants :
 $Z_1 = \frac{1+i}{1-i}e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ $Z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{e^{3i\frac{\pi}{3}}}$ $Z_3 = \frac{1-e^{\frac{\pi}{3}i}}{1+e^{\frac{\pi}{3}i}}$ $Z_4 = \frac{1-\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$; $Z_5 = \frac{1}{1+itg\alpha}$ $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$
 $Z_6 = \frac{1}{1+itg\frac{2\pi}{3}}$ $Z_7 = (1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $Z_8 = \frac{1}{2} \frac{\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}}$ $Z_9 = \frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{1-itg\frac{\pi}{4}}$

EXERCICE 2:

I-) On considère le nombre complexe $Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

1. Détermine le module et un argument de Z^2 . En déduis le module et l'argument de Z .
2. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de : $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x = \sqrt{2}$

II-) Soient $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$ deux complexes.

1. Détermine le module et un argument de z_1 et z_2 .
2. Écrire sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $\frac{z_1}{z_2}$
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 3:

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$

1. a) Détermine le réel y tel que iy soit une solution de (E);
b) Détermine les réels a et b tels que pour tout complexe z :

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$$

2. a) Résout dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$
b) En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique et trigonométrique.
3. On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$.
a) Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $\bar{z}_0$ est aussi solution de l'équation $P(z) = 0$.
b) Calculer $P(1 - i)$, en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
c) Placer les points images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
4. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $(-\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire.

EXERCICE 4:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; I; J)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = -3$; $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 7i$.

1. Construire le triangle ABC.
2. Calculer les distances AB et BC.
3. Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $Z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.
4. Déduire des questions a) et b) la nature du triangle ABC.

EXERCICE 5:

1. Montrer que z_1 est réel et que z_2 est imaginaire pur. On donne

$$z_1 = (1 + 5i)^{2020} + (1 - 5i)^{2020} \quad \text{et} \quad z_2 = (1 + 5i)^{2020} - (1 - 5i)^{2020}$$

- Déterminer le réel x tel que : $x^2 - 3x + 2 + i(2x^2 + x - 10) = 0$
- On pose $z = x + iy$. Déterminer en fonction de x et y les parties réelle et imaginaire des complexes : $U_1 = z^2 - 3z + 2 + i$ et $U_2 = (1 + z)^2 + (1 + z)i$
- Soit le nombre complexe Z défini par : $Z = 2x + 3i + (ix - 2)[2 - i(x + 4)]$.
Déterminer le nombre réel x tels que :
 - Z est un nombre réel;
 - Z est un nombre imaginaire pur.
- Soit T un complexe non nul défini par $T = \frac{1+z}{1+i-2z}$. Déterminer $Re(T)$ et $Im(T)$.

EXERCICE 6:

- Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1 + i)(1 - i\sqrt{3}); \quad z_2 = (\sqrt{3} - i)^5; \quad z_3 = \frac{25 + 25i}{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}; \quad z_4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} (2 + 2i)^5$$

- Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants : $\forall \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$
 - $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$
 - $z = \sin \alpha - i \cos \alpha$
 - $z = -\cos \alpha + i \sin \alpha$
 - $z = -\cos \alpha - i \sin \alpha$
 - $z = \cos \alpha - i \sin \alpha$
 - $\tan \alpha + i$
 - $z = 1 - i \tan \alpha$
 - $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$
 - $z = 1 - \cos \alpha - i \sin \alpha$
 - $z = 1 - \sin \alpha + i \cos \alpha$
 - $z = 1 - i \cot \alpha$

EXERCICE 7:

- Linéariser les expressions suivantes :

$$\cos^3 x; \quad \sin^3 x; \quad \cos^4 x; \quad \sin^4 x; \quad \cos^5 x; \quad \sin^5 x; \quad \cos^3\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin^2 x \cos^3 x; \quad \cos^4 x \sin^x; \quad \cos^4 x \sin^3 x$$

- Ecrire $\sin(3x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$

EXERCICE 8:

- Soit $A(3 + i)$; $B(2i)$; $C(2 - 2i)$
 - Placer les points A; B; C et démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle;
 - Déterminer l'abscisse du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer le point D.
 - Déterminer l'abscisse du point E, symétrique de A par rapport au milieu de [BC]
- Soit les points $A(-1 + i)$, $B(-1 - i)$; $C(2i)$ et $D(2 - 2i)$
 - Étudier la nature des triangles ACD et BCD ;
 - Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 9:

- Soit A, B et C trois points d'abscisses respectifs : 2 ; $2i$ et $(1 + i\sqrt{3})(1 + i)$
 - Déterminer les abscisses des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$

- b) Calculer les distances AB; AC et BC.
- c) Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectifs
 $a = -1 + i$; $b = -1 - i$; $c = 2i$ et $d = 2 - 2i$
- a) Calculer les distances BC; BD et DC. Quelle est la nature du triangle BCD ?
- b) Déterminer l'affixe w du milieu Ω du segment [CD]. Calculer la distance ΩA .
- c) Justifier que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle, dont on précisera le centre et le rayon.
- d) Déterminer l'affixe e du point E symétrique de B par rapport à Ω .
 Quelle est la nature du quadrilatère CBDE ?

EXERCICE 10:

1. a-) Calculer $(2 + i)^3$
- b-) En déduire les racines cubique de $2 + 11i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
- a) $(1 + i)z = 3 + i$ b) $z^2 + 2\sin(\alpha)z + 1 = 0$ c) $z + \frac{1}{z} + 1 = 0$
- d) $(2 - i)z + \bar{z} - 7 - i = 0$ e) $2z + \bar{z} - iz - 7 - i = 0$ f) $(-1 + 2i)z^2 + (-5 + i)z + 9i + 6$
- g) $\frac{2z+1}{2iz+1} = \frac{2iz+3i}{1-z}$ h) $(5 + 3i)z = \frac{2+4i}{-1+i}$ j) $iz^2 + 2\bar{z} + 2 - i = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes d'équations suivants
- a) $\begin{cases} z_1 \times z_2 = 7 \\ z_1 + z_2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (2 + 3i)z - 5z' = -1 \\ (1 - i)z + 2z' = 2(1 + i) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5iz + (2 - i)z' = 1 + 12i \\ (2 - 3i)z + (5 - 2i)z' = 39 - 10i \end{cases}$

EXERCICE 11:

On considère le nombre complexe Z défini par : $Z = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + i \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \right)$

1. Calculer Z^2 et Z^4 ; puis en déduire le module et argument de Z^4 . En déduire le module et un argument de Z .
2. Démontrer que : $\cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}}{2} \sin x = -\sqrt{\sqrt{2}}$

EXERCICE 12:

Soit $z_0 = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i \sin(\frac{2\pi}{5})$. On pose : $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

1. Vérifier que $z_0^5 = 1$
2. a) Montrer que : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$
 b) Déduis-en que α et β sont solutions de l'équation : $x^2 + x - 1 = 0$
3. Déterminer α en fonction de $\cos(\frac{2\pi}{5})$
4. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $x^2 + x - 1 = 0$ et en déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.