

NOMBRES COMPLEXES SERIE N° 2

Exercice : 1

On pose : $Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $Z_2 = 1 - i$

- 1- Ecrire Z_1 ; Z_2 sous forme trigonométrique.
- 2- En déduire la forme trigonométrique de $\frac{Z_1}{Z_2}$.
- 3- Déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$
- 4- Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation : (E)
(E) : $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$

Exercice : 2

On donne les nombres complexes U et Z définis par
 $Z = -8\sqrt{3} + 8i$; $U = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

- 1- Ecrire Z sous forme trigonométrique.
- 2- Calculer U^2 , utiliser ce résultat pour exprimer les racines carrées de Z sous leurs formes algébriques.
- 3- En déduire les valeurs de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

Exercice : 3

On considère le nombre complexe

$z = (2\sqrt{3} - 2) + i(2\sqrt{3} + 2)$, on pose $Z = z^2$

- 1- Exprimer Z sous forme algébrique.
- 2- Déterminer le module et un argument de Z
- 3- En déduire le module et un argument de z
- 4- Donner les valeurs de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

Exercice : 4

On considère le complexe $Z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$

- 1- Déterminer le module et un argument de Z^2
- 2- En déduire le module et un argument de Z
- 3- Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice : 5

Soit $Z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

- 1- Calculer Z^2 puis déterminer le module et un argument de Z^2
- 2- Ecrire Z^2 sous forme trigonométrique
- 3- En déduire le module et un argument de Z
- 4- En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercice : 6

On donne $A = 5\sqrt{2}(1 + i)$ $B = -5(1 + i\sqrt{3})$

- 1- Déterminer le module et un argument de :
 $A; B; \overline{A}; \frac{B}{A}; A \times B; \frac{A}{B^2}$
- 2- Soit Z un nombre complexe tel que :
 $A \times Z = B$
 - a- Ecrire Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
 - b- En déduire les valeurs exactes de
 $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$

Exercice : 7

On considère le nombre complexe :

$z = (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3})$

- 1- Calculer z^2 sous forme algébrique.
- 2- Trouver le module et un argument de z^2

- 3- En déduire le module et un argument de z
- 4- En déduire les valeurs de $\cos \frac{17\pi}{12}$ et $\sin \frac{17\pi}{12}$
- 5- En utilisant ce résultat, résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ l'équation :

$$(1 - \sqrt{3})\cos x - (1 + \sqrt{3})\sin x = 2$$

Exercice : 8

- 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E):

$$(E): z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$$
Soient $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- 2- Exprimer les solutions z_1 et z_2 en fonction de a et b .
- 3- Calculer le module et un argument de a et b .
- 4- Représenter les points images de a et b dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 5- En déduire une construction des points C et D d'afixes respectives z_1 et z_2
- 6- Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2
- 7- En déduire les valeurs de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Exercice : 9

Soient a et b deux nombres complexes définis par :

$$a = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \quad \text{Et} \quad b = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

- 1- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $q = \frac{b}{a}$
- 2- Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes a, b et q
- 3- Déduire des résultats précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercice : 10

Soient les nombres complexes

$$z_1 = \frac{(2\sqrt{3} + 11) + i(11\sqrt{3} - 2)}{2 + 11i} \quad z_2 = \frac{4 + 2i}{3 - i}$$

- 1- Mettre sous forme exponentielle $z_1, z_2, \frac{z_1}{z_2}$
- 2- En déduire les valeurs de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$
- 3- Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation

$$(\sqrt{6} - \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x = 2$$
- 4- Placer les points solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice : 11

- 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 1$
- 2- Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$
- 3- Soit l'équation (E): $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$
En posant $Z = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$
- 4- Déterminer sous forme algébrique puis forme trigonométrique les racines de l'équation (E)
- 5- En déduire les valeurs exactes de
 $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Exercice : 12

- 1- Déterminer les nombres complexes solutions de l'équation $Z^4 = 1$
- 2- Déterminer sous forme trigonométrique les solutions de l'équation : $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$
- 3- Soit $a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$
 - a- Vérifier que $a^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$
 - b- En déduire sous forme algébrique les résultats du 2)
- 4- Des questions 2) et 3) déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

Exercice : 13

- 1- Calculer $(2 + i)^3$
- 2- En déduire les racines cubiques de $2 + 11i$

Exercice : 14

- 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
 $z^2 - 8z + 25 = 0$
- 2- Calculer $(1 + 2i)^4$
- 3- Déterminer et représenter les racines quatrièmes du nombre complexe
 $Z = -7 - 24i$
Les racines quatrièmes de l'unité sont $1, i, -1, -i$.

Exercice : 15

Z Étant un nombre complexe, on considère l'équation
(E): $Z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$

- 1- Vérifier **que** $U = \sqrt{2} + i$ est une solution de l'équation (E)
- 2- Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité.
- 3- En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

Exercice : 16

z Étant un nombre complexe, on considère l'équation
(E): $z^6 = 8i$

- 1- Vérifier **que** $U = 1 - i$ est une solution de l'équation (E)
- 2- Déterminer sous forme algébrique les racines sixièmes de l'unité.
- 3- En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

Exercice : 17

- 1- Calculer les racines carrées de :

$$i, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -3 - 4i; 15 + 8i; 6 + 8i; 8i; 5 - 12i$$

- 2- Calculer les racines cubiques de :

$$i; -i; -8i; -2 + 2i; \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$$

- 3- Calculer les racines quatrièmes de :

$$81; -81; \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{\sqrt{3} - i}; i; -1$$

- 4- Calculer les racines sixièmes de $\frac{1 - i}{\sqrt{3} + i}$

- 5- Calculer les racines huitièmes de $\frac{1 + i}{\sqrt{3} - i}$

Exercice : 18

linéariser

$$\cos^5 \theta; \sin^5 \theta; \cos^4 \theta; \sin^4 \theta; \cos^3 \theta; \sin^3 \theta; \cos^6 \theta; \sin^6 \theta; \cos^3 \theta \cdot \sin^2 \theta; \cos^2 \theta \cdot \sin^3 \theta; \cos^2 \theta \cdot \sin 3\theta; \sin^4 \theta \cdot \cos \theta; \sin^4 \theta + \sin^2 \theta$$

Exercice : 19

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

- a) $2z^2 + 2z + 5 = 0$; b) $z^2 - 4iz + 5 = 0$
- c) $4z^2 + 12z + 25 = 0$; d) $z^2 - 4z + 53 = 0$
- e) $9z^2 - 6z + 37 = 0$; f) $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$
- g) $z^2 + (6 - i)z + 2 + 6i = 0$
- h) $(2 + i)z^2 + (1 - 7i)z - 5 = 0$
- i) $(1 + 3i)z^2 - 5(1 + i)z - 4 + 8i = 0$

Exercice : 20

- 1- Soit l'équation (E): $z^2 - 3\sqrt{3}z + 9 = 0$

a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

On notera z_1 et z_2 ses solutions avec

$$\operatorname{Im}(z) > 0$$

b- Déterminer la forme trigonométrique de z_1 et de z_2

2- Soit P le polynôme complexe défini par :

$$P(z) = z^3 - 3(i + \sqrt{3})z^2 + 9(1 + i\sqrt{3})z - 27i$$

a- Calculer $P(3i)$

b- Démontrer que l'équation admet une unique racine imaginaire pure.

c- Déterminer les réels a , b , et c tels que pour tout nombre complexe z

$$P(z) = (z - 3i)(az^2 + bz + c)$$

d- En déduire toutes les solutions de $P(z) = 0$

3- Soient A, B et C les points d'affixes

$$\text{respectives } z_A = 3i, z_B = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \text{ et}$$

$z_C = \overline{z_B}$ dans le plan complexe muni d'un repère orthogonal unité graphique 2cm

a- Faire une figure.

b- Calculer $Z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme

algébrique.

c- Déterminer le module et un argument de Z

d- En déduire la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$ et la nature du triangle ABC.

Exercice : 21

$$\text{Soit } P(z) = z^3 - (6 + 5i)z^2 + (25 + 30i)z - 125i$$

1- Démontrer que $P(z)$ admet une unique racine imaginaire pure que l'on déterminera.

2- Déterminer trois réels a , b , et c tels que :

$$P(z) = (z - 5i)(az^2 + bz + c)$$

3- En déduire toutes les solutions de $P(z) = 0$

4- Soient A, B et C les images dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ des solutions de l'équation $P(z) = 0$

Placer les points A, B et C dans le plan complexe et démontrer qu'ils sont sur un même cercle de centre O.

Exercice : 22

1- On considère l'équation d'inconnue z :

$$(E): z^3 + 5z^2 + 11z + 15 = 0$$

a- Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z^3 + 5z^2 + 11z + 15 = (z + 3)(az^2 + bz + c)$$

Déterminer a , b et c

b- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

2- Le plan complexe est muni d'un repère $(O, \vec{u}; \vec{v})$ les points A, B et D du plan ont affixes respectives $z_A = -3$; $z_B = -1 + 2i$

$$z_D = -1 - 2i$$

a- Simplifier l'expression du quotient

$$\frac{z_B + 3}{z_D + 3}$$

b- En déduire la nature du triangle ABD.

c- Déterminer l'affixe du point C tel que le quadrilatère ABCD soit un carré.

Exercice : 23

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A d'affixe $\sqrt{3} - i$ et B d'affixe $\sqrt{3} + i$.

Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

Exercice : 24

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z - 20$$

1- Ecrire sous forme algébrique $(1 - i)^2$ puis en déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2i$

2- Déterminer les nombres b et c pour que $\forall z \in \mathbb{C}$ on ait $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$; $z_B = -1 + i$; $z_C = 1 + 3i$; $z_D = 3 + i$

- Faire une figure.
- On pose $Z = \frac{z_{\overline{BA}}}{z_{\overline{BC}}}$. Ecrire Z sous forme algébrique.
- Interpréter le module et l'argument de Z
- Quelle est la nature exacte du triangle ABC puis celle du quadrilatère ABCD.

Exercice : 25

Le plan est muni d'un repère ortho normal $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- Soit le nombre complexe $z_0 = 1 + i$
 - Montrer **que** z_0 est solution de l'équation (E) défini par :

$$z^3 - (7 + i)z^2 + 2(8 + 3i)z - 10(1 + i) = 0$$
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
- On considère les points A, B et C du plan, d'affixes respectives : $1 + i$, $3 + i$, $3 - i$
 - Calculer et écrire sous forme exponentielle $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$
 - En déduire la nature du triangle ABC.
 - Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}; \vec{v})$ et compléter la figure au fur et à mesure.
 - Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC, déterminer l'affixe du centre G et le rayon r du cercle.
- Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant la relation

$$|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$$
 - Caractériser géométriquement l'ensemble (Δ)
 - Justifier que le point F d'affixe $4 + 2i$ appartient à l'ensemble (Δ)
 - Déterminer l'affixe du point E de (Δ) situé sur l'axe des ordonnées.

- Quelle est la nature exacte du quadrilatère CEAF ? justifier votre réponse.

Exercice : 26

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé.

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 2 - i$; $b = 5 + i$ et $c = 2i$

Ecrire sous forme trigonométrique le nombre $\frac{c - a}{b - a}$

En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice : 27

Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 5 - 4i$; $b = 9 + 3i$; $c = 1 + 2i$ et $d = -3 - 5i$.

- Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe.
- Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice : 28

Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A, B, et C d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = 5 + 2i$; $c = 3 + 5i$

Déterminer l'affixe d du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

