

EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants :

- Déterminer le module et un argument de z ;
- En déduire la forme algébrique de z .

a) $z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ b) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
d) $z = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}$ e) $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3$

REPONSE

a) $z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

- Déterminons le module et un argument du nombre complexe z .

$$|z| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^3 = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)^3 = 1^3 = 1$$

$$\arg z = \arg \left[\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right] = 3 \cdot \arg \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\pi$$

- Dédudisons la forme algébrique de z

$$z = 1 \cos(-\pi) + i \cdot 1 \sin(-\pi) = \cos \pi - i \cdot \sin \pi = -1$$

b) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

- Déterminons le module et un argument du nombre complexe z

$$|z| = \left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \cdot \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right) \cdot \left(\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)$$

$$|z| = 1 \times 1 = 1.$$

$$\arg z = \arg \left[\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \arg \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arg \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \pi$$

- Dédudisons la forme algébrique de z

$$z = 1 \cdot \cos \pi + i \cdot 1 \cdot \sin \pi = -1$$

c) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Appliquez la même méthode que b).

$$d) z = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}$$

- Déterminons le module et un argument du nombre complexe z .

$$|z| = \left| \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)} \right| = \frac{|(3-i)(1+2i)|}{|(1-3i)(2+i)|} = \frac{|3-i| \cdot |1+2i|}{|1-3i| \cdot |2+i|} = \frac{\sqrt{3^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-3)^2} \cdot \sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} = 1$$

Il n'existe pas d'angle particulier qui soit $\arg(3-i)$, ni $\arg(1+2i)$. Dans ce cas, pour déterminer un argument de z , nous allons dans un premier temps développer et réduire z , ensuite calculer son argument.

$$z = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)} = \frac{3+6i-i+2}{2+i-6i+3} = \frac{5+5i}{5-5i} = \frac{1+i}{1-i}$$

$$\arg z = \arg \left(\frac{1+i}{1-i} \right) = \arg(1+i) - \arg(1-i) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

- Dédudisons la forme algébrique de z

$$z = 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$$

$$e) z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i} \right)^3$$

- Déterminons le module et un argument du nombre complexe z .

$$|z| = \left| \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} \right|^3 = \left(\frac{|\sqrt{3}-i|}{|1-i|} \right)^3 = \frac{|\sqrt{3}-i|^3}{|1-i|^3} = \frac{\left(\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} \right)^3}{\left(\sqrt{1^2+(-1)^2} \right)^3} = \frac{(\sqrt{3+1})^3}{(\sqrt{2})^3} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg z = \arg \left[\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i} \right)^3 \right] = 3 \cdot \arg \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i} \right) = 3 \cdot [\arg(\sqrt{3}-i) - \arg(1-i)]$$

$$= 3 \left(-\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 3 \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = 3 \left(-\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} \right) = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

- Dédudisons la forme algébrique de z .

$$z = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 + 2i$$

