

Série d'exercices n°1 sur les nombres complexes

Exercice 1 :

On considère le polynôme f défini par :

$$f(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

- 1) Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que :

$$f(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$$

- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

- 3) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A = i\sqrt{3}; \quad z_B = -i\sqrt{3}; \quad z_C = 3 - 2i\sqrt{3}; \quad z_D = \bar{z}_C.$$

- a) Placer les points A, B, C, D . [la figure complète]
b) Quelle est la nature du triangle ACD ?
c) Montrer que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. Donner une équation de (C) .
4) On note E le symétrique de C par rapport à O .
Préciser l'affixe de E et déterminer la nature du triangle BED .

Exercice 2 :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points $A(2 - 4i); \quad B(-i); \quad M(z)$ et $M'(z')$ avec

$$z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}; \quad z \neq i$$

1. Exprime les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M .
2. Détermine et représente l'ensemble des points M tels que :
a. z' soit un réel.
b. z' soit un imaginaire pur.
3. On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifie que $ZZ' = -3 + 4i$ puis calcule $|ZZ'|$.
4. a. Détermine l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.
b. Détermine r pour que M et M' soient sur le même cercle.

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$.

Placer les points images de ses solutions dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

- 1) Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$

a) Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, f(z) = z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right].$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + az + b = 0$ puis $f(z) = 0$.

c) Soit A, B, C et D les images des solutions de l'équation $f(z) = 0$ dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Montrer que ces quatre points sont éléments d'un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 4 :

1. Soit θ un nombre réel tel que : $0 \leq \theta \leq \pi$, on considère le nombre complexe

$$z = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta.$$

a) Ecrire le complexe z sous forme trigonométrique.

b) Déterminer θ pour que z et $1 - z$ aient même module.

2. Résoudre l'équation : $z^4 = 16i$. En déduire les solutions de l'équation $\left(\frac{z-2}{2}\right)^4 = i$ puis écrire ces solutions sous forme exponentielle.

3. Pour $n \in \mathbb{C}^*$, soit $P_n(z) = z^3 - 6nz^2 + 12n^2z - 7n^3$.

a) Vérifier que $P_1(1) = 0$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P_1(z) = 0$.

b) En posant $z = \frac{z}{n}$, résoudre dans $\mathbb{C}$: $P_n(z) = 0$.

c) Soit T_n le triangle défini par les images des solutions de $P_n(z) = 0$. Démontrer que T_1 est équilatéral. En déduire que, pour tout n , T_n est équilatéral.

Exercice 5 :

I. Soit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{-20}{(1-i)z+2i}$

1) Calculer le complexe z_0 dont l'image par f n'est pas définie.

2) Déterminer le module et un argument de z_0 .

II. On se place dans le corps des nombres complexes, on pose : $h_n(z) = z^n(1 - z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $h_n(z) = h_0(z)$

2) On se propose de résoudre le système suivant : $(S): \begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$

a) Montrer que l'équation $|z| = |1 - z|$ admet une infinité de solutions. (Prendre $z = x + iy$)

b) Soit z_0 l'une de ces solutions, calculer en fonction du module ρ et de l'argument θ de z_0 , l'argument de $1 - z_0$; le module et l'argument de $(1 - z_0)z_0^n$.

c) En déduire que le système (S) n'admet de solution que si $n \equiv [6]$. Quel est l'ensemble des solutions du système ?

Exercice 6 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les

points M_n d'affixes : $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

- 1) Exprime Z_{n+1} en fonction de Z_n , puis Z_n en fonction de Z_0 et n .
- 2) Donne Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- 3) Place les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité : 4cm).
- 4) Détermine la distance OM_n en fonction de n .
- 5) a) Montre que $M_n M_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$ (c'est-à-dire $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_n M_{n+1}$).
 Détermine L_n en fonction de n , puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.
- 6) Détermine une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}; \overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n .
- 7) Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ?

Exercice 7 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 1 cm). On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0.$$

Partie A :

- 8) Montre que $-i$ est solution de (E).
- 9) Détermine les nombres réels a, b, c tels que :
 $z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c)$
- 10) Résous l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Partie B :

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4 + i; 4 - i; -i$.

1. Place les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = iz - 2i + 2$.
 Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r .
 Calcule l'affixe s de S .
3. Démontre que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Trace $\mathcal{C}$.
4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.
 a. Détermine les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C .
 b. Vérifie que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P , d'affixe i . Détermine son rayon et trace $\mathcal{C}'$.
 c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprime $|z' - i|$ en fonction de z .
 d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontre que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.
 e. En déduis à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 8 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique 1cm. On considère les points B , D et C définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que $ABCD$ soit un rectangle.

- 1°) Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice. **(0,5pt)**
- 2°) Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Détermine l'afixe Z_E de E . Construis E . **(1pt)**
- 3°) Détermine les nombres réels a et b tels que le point F d'afixe $Z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points A , B et C affectés respectivement des coefficients a , b et 1. **(1pt)**
- 4°) On considère la similitude directe S qui transforme A en E et B en F .
 - a) Exprime Z' en fonction de Z où Z' est l'afixe du point M' image de M par S . **(1pt)**
 - b) Détermine le centre Ω , l'angle θ et le rapport k de la similitude S . **(1pt)**
 - c) Détermine les images de C et D par S . **(0,5pt)**

Calcule l'aire de l'image par S du rectangle $ABCD$.

Exercice 9 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

- 11) Donne la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B .
- 12) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'afixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0; 2\pi[$. On considère l'application f qui à tout point M de (C) , associe $f(M) = MA \times MB$.
 - a) Montre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha} \sin \alpha$.
 - f. Montre l'égalité suivante : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right) e^{i\alpha} \right|$.
 - g. En déduis l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2 \sin \alpha \right)^2}$Détermine L_n en fonction de n , puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.
- 13) a) En utilisant 2)c), montre qu'il existe deux points M de (C) , dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.
En utilisant 2)c), montre qu'il existe un seul point M de (C) , dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.