

TSE SERIE DES EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1 : 1) On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E): z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$$

- a) Détermine le réel y tel que iy soit solution de (E) .
- b) Détermine les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z :
 $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$.
- c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): z^2 + z\sqrt{3} + 1 = 0$.

En déduis les solutions de (E) .

- 2) On considère le point A d'affixe $z_A = i$, le point d'affixe $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et le point C symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

- a) Place ces points sur un graphique.
- b) Détermine le module et un argument du quotient : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
- c) En déduis une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et la nature du triangle ABC .

EXERCICE 2 : Soit le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$.

- 1) Démontre qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation $P(z) = 0$.
- 2) Détermine le polynôme Q tel que $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$.
- 3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE 3 : 1) Calcule i^3, i^4 et i^5 . En déduire i^{18} et i^{19} .

$$2) \text{ Calcule } 1 + i + i^2 + i^3, \text{ puis } i^{199} + i^{200} + i^{201} + i^{202}.$$

$$3) \text{ Calcule } \sum_{k=0}^{2000} i^k \text{ et } \sum_{k=0}^{2002} (-i)^k.$$

EXERCICE 4 : 1) Résous dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (2^{\theta+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0$ (θ réel donné).

- 2) Soit A et B les points d'affixes les racines de l'équation précédente dans un plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Détermine θ pour que le triangle OAB soit équilatéral.

EXERCICE 5 : 1. Dans chacun des cas suivants : -déterminer le module et un argument de z ;

-en déduire la forme algébrique de z .

- a) $z = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$
- b) $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$
- c) $z = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$
- d) $z = (\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i})^3$
- e) $z = (1 - i)^4$
- f) $z = i^{29}$
- g) $z = i^{2022}$

2) Détermine la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned}
 \text{a) } z_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i & \text{b) } z_2 &= \frac{1}{1+i} & \text{c) } z_3 &= (1 - i\sqrt{3})^4 & \text{d) } z_4 &= \frac{(1-i)^4}{(-\sqrt{3}-i)^3} \\
 \text{e) } z_5 &= -2e^{i\frac{\pi}{4}} & \text{f) } z_6 &= \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}} & \text{g) } z_7 &= 1 + i + (1-i)\tan\alpha \text{ avec } \alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\
 \text{h) } z_8 &= \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}} & \text{i) } z_9 &= \sin\alpha + i(1 + \cos\alpha), \alpha \in [0; \pi[\\
 \text{j) } z_{10} &= (-1 - i\sqrt{3})^3 e^{i\frac{3\pi}{4}} & \text{k) } z_{11} &= 5(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})e^{i\frac{-5\pi}{6}} \\
 \text{l) } z_{12} &= \frac{(1+i\sqrt{3})(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{2(1-i)(\sin\alpha - i\cos\alpha)}; & \text{m) } z_{13} &= \frac{-\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{2(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)}; \\
 \text{n) } z_{14} &= \sin\theta + i(1 + \cos\theta), \theta \in]0; \pi[; & \text{o) } z_{15} &= (1 - i\sqrt{3})e^{i2\frac{\pi}{3}}
 \end{aligned}$$

EXERCICE6 : Soient les nombres complexes :

$$a = 1 + i; \quad b = \sqrt{13 - 5\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}} + i\sqrt{3 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}$$

- 1) Calcule le module et l'argument de a et b.
- 2) Exprime le nombre complexe $c = \frac{a}{b}$ sous la forme algébrique. En déduis la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
- 3) Construis A ; B et C les points d'affixes respectives a ; b et c dans le plan complexe muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

EXERCICE 7 On donne le nombre complexe $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

- 1) a) calcule u^2 et u^4 .
b) Calcule le module et un argument de u^4 , en déduis le module et un argument de u.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. A tout point M de coordonnées (x ; y) du plan, on associe son affixe $z = x + iy$. Détermine l'ensemble des points M du plan pour lesquels le module du produit $u \times z$ est égal à 8.

EXERCICE 8 : Soit $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ un polynôme de degré 3 ou α, β et γ sont des nombres réels donnés.

1. a) Démontre que si le polynôme $P(Z)$ admet trois racines a, b et c alors on a simultanément : $a + b + c = -\alpha$; $ab + bc + ac = \beta$ et $abc = -\gamma$.
- b) Forme alors le polynôme $P(Z)$ lorsque ses racines sont : $a=1+3i\sqrt{3}$; $b = -2 + i\sqrt{3}$ et $c = 4 - 2i\sqrt{3}$.

2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

a) Montre que le triangle ABC est rectangle en B.

b) Ecris sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$.

c) Déduis la valeur de $\frac{AC}{AB}$ et la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{AB}, \vec{AC})$.

3.a) Donne l'écriture complexe de la similitude directe S de centre A, qui transforme B en C.

b) Détermine l'affixe z_1 du point B_1 qui a pour image B par S.

EXERCICE 9: Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

a) $z + \frac{1}{z} + 1 = 0$; b) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$; c) $2z^2 + 3|z|^2 - 1 = 0$

d) $z^2 + 2(\sin \alpha)z + 1 = 0$ e) $z^2 - 2(\cos \alpha)z + 1 = 0$.

f) $z - 2 + i + \overline{z + i - 1} = 0$ g) $z^2 = -7 - 24i$ h) $iz^2 - (1 - 5i)z + 6i = 0$

i) $z^2 - (\sqrt{3} + i)z + 1 + i\sqrt{3} = 0$

EXERCICE 10: Trouve les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ algébriquement.

a) Ecris $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ sous forme trigonométrique.

b) Trouve les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ sous forme trigonométrique.

c) En déduis les valeurs de $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 11: Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1) Soit M, N et P trois points distincts du plan d'affixes m, n et p.

Démontre que : $\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = (\vec{MN}; \vec{MP}) [2\pi]$.

2) Interprète géométriquement : $\left|\frac{p-m}{n-m}\right|$.

3) En déduis l'écriture complexe d'une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle de mesure θ .

4) Dans cette question on prend : $m=1$ et $n=i$ détermine p pour que le triangle MNP soit équilatéral de sens direct.

EXERCICE 12 : Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique : 2cm). On désigne par A le point d'affixe 1, B le point d'affixe $2i$ et C le point d'affixe z.

- 1) Que représente géométriquement $|\frac{z-2i}{1-2i}|$? et $\arg. (\frac{z-2i}{1-2i})$?
- 2) Dans la suite, on suppose que le point C d'affixe z est défini par :
 $BC = \sqrt{\frac{2}{5}} BA$ et $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \alpha$ ou $\alpha \in]-\pi; 0]$ et $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, calcule $\sin \alpha$.
- 3) Démontre que $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$

EXERCICE 13: 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \bar{z}$.

- 2) Résous dans $\mathbb{C}^2$ $\begin{cases} X^2 = Z \\ Z^2 = X \end{cases}$
- 3) Résous dans $\mathbb{C}^3$ le système:

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases}$$

EXERCICE 14: Soit le polynôme $p(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 3x + 1$ ($x \in \mathbb{C}$)

- 1) Montre que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de l'équation $p(x) = 0$ alors $\bar{z}$ et $\frac{1}{z}$ sont aussi racines de cette équation.
- 2) Vérifie que $1+i$ est une racine de l'équation $p(x) = 0$, puis résous cette équation dans $\mathbb{C}$.
- 3) Ecris $p(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du deuxième degré à coefficients réels.

Exercice 15: On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + 2z \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0$, avec θ un réel de l'intervalle de $]-\pi; \pi[$.

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
- 2) Précise selon les valeurs de θ le module et un argument de chacune des solutions de (E).

EXERCICE 16 : 1) Démontre que $1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{2i\frac{\pi}{5}} + e^{3i\frac{\pi}{5}} + e^{4i\frac{\pi}{5}} = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}}$ et en déduis les valeurs des sommes $\sum_{k=0}^4 \cos(\frac{k\pi}{5})$ et $\sum_{k=0}^4 \sin(\frac{k\pi}{5})$.

- 2) Soit a et b deux nombres complexes, montre que $(|a| = 1 \text{ ou } |b| = 1)$ si et seulement si $(a - b \text{ et } 1 - \bar{a}b \text{ ont même module})$.
- 3) Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1 avec $1 + z_1 \cdot z_2 \neq 0$.
Démontre que $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2}$ est réel.

EXERCICE 17 : Soit A le point d'affixe $2i$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z , distinct de A , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{2iz-5}{z-2i}$

- 1) Démontre que f admet deux points invariants.
- 2) Démontre que f est bijective et détermine son application réciproque.
- 3) Démontre que la droite de repère $(o, \vec{e}_2)$, privée de A , est globalement invariante par f .
- 4) a) Démontre que $|z' - 2i||z - 2i| = 9$.
 b) En déduis l'image par f du cercle (C) de centre A et rayon R .
 Détermine R pour que (C) soit globalement invariant par f .

EXERCICE 18 : le plan est rapporté à un repère ortho normal direct $(o; \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 4cm). On appelle f l'application, qui à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe :

$$Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$$

- 1) Soit $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprime la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y .
 On vérifiera que $\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$ En déduis la nature de :
 a) L'ensemble E des points M d'affixe z , tels que Z soit un réel.
 b) L'ensemble F des points M d'affixe z , tels que Z soit un imaginaire pur.
 c) Représente ces deux ensembles.
- 2) On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$ en remarquant que $Z = \frac{z-z_A}{z-z_B}$, retrouve les ensembles E et F par une autre méthode géométrique.

EXERCICE 19 : Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$

- 1) Posons $Z = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$. Donne une expression simple de la somme $1 + Z + \dots + Z^{n-1}$. Calcule la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme. En déduis l'égalité $S_n = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.
- 2) Quelle est la limite de la suite $(\frac{S_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 20 : 1) Calcule : $(2 + i)^3$.

2) En déduis les racines cubiques de $2 + 11i$.

EXERCICE 21 : 1) Résous dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2 - 4z + 5 + i(z + 1) = 0$ (1)

$$(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0 \quad (2)$$

2) En déduis qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d que l'on précisera tels que pour tout nombre réel x , on a :

$$(x^2 - 4x + 5)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

EXERCICE 22 : a) Détermine sous forme algébrique les racines sixièmes de l'unité, c'est-à-dire trouver les nombres complexes u tels que $u^6 = 1$.

b) Calcule $(1 - i)^6$

C) En utilisant les questions a) et b) donne la forme algébrique des solutions de l'équation d'inconnue complexe z : $8z^6 + i = 0$.

EXERCICE 23: Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z}{|z|}(2 - |z|)$.

Le cercle c_1 , de centre o et de rayon 1. Pour z complexe non nul, on note $z = re^{i\alpha}$, r étant le module de z et α un argument de z .

1. Montre que $z' = (2 - r)e^{i\alpha}$.
2. Détermine l'affixe a' du point A' , image par f du point A d'affixe $a=3$.
3. Soit B le point d'affixe $b = -\sqrt{3} + i$.
 - a) Ecris b sous forme exponentielle.
 - b) Détermine l'affixe b' du point B' , image du point B par f .
4. Placer A, B, A' et B' sur une figure.
- 5 a) Détermine l'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par f est O .
 - b) Représente E sur la figure.
6. Montre que le cercle c_1 est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que $f(M)=M$.
7. Pour cette question, M est un point du plan, distinct de O , n'appartenant pas au cercle c_1 .

On appelle I le milieu du segment $[MM']$ ou M' est l'image de M par f .

- a) Montre que I appartient à c_1 .
- b) Montre que I appartient à la demi-droite $[OM)$.

EXERCICE 24 : 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$$

2) Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$a) z + \frac{1}{z} = 1 \qquad b) z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$$

3) Soit le polynôme $p(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$. On pose $Z = z + \frac{1}{z}$

a) Exprime $\frac{p(z)}{z^2}$ en fonction de Z

En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de $p(z) = 0$.

EXERCICE 25: Pour tout nombre complexe z , on pose $p(z) = z^4 - 1$

- 1) Factorise $P(z)$.
- 2) En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
- 3) Dédire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue: $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

EXERCICE 26: Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivante :

a) $z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0$; b) $z^8 + z^4 + 1 = 0$ c) $z^3 = 8$; d) $z^3 = (1 + i\sqrt{3})^3$

EXERCICE 27: On définit l'application $\varphi: \mathbb{C} - \{i\} \rightarrow \mathbb{C}$ par $\varphi(z) = \frac{i\bar{z}-1}{z-i}$ ou $\bar{z}$ est le conjugué de z , on désigne par A le point d'affixe i .

- a) Ecris sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique le nombre complexe $\varphi(\sqrt{3}+2i)$.
- b) Résous dans $\mathbb{C} - \{i\}$, l'équation $\varphi(z) = 1 + i$
- c) Détermine l'ensemble F des points M d'affixe z tel que $\varphi(z)$ soit réel.

EXERCICE 28: Soit A, B et C les points d'affixes respectives $-\frac{1}{3} - 2i$, $1 + 2i$ et $\frac{7}{3} + 6i$.

- 1) Démontre que B est le milieu de [AC].
- 2) Détermine les affixes des points D et E tels que ADCE soit un carré de sens direct.

EXERCICE 29: Soit A, B et C les points d'affixes respectives $1 + 2i$; $2 + i$ et $2 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.

- 1) Démontre que le triangle ABC est rectangle en B et détermine une mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$.
- 2) Détermine le point D, symétrique de A par rapport à B.
- 3) Quelle est la nature du triangle ADC ?

EXERCICE 30 : soit les points A, B, C et D d'affixes respectives $-1 + i$, $-1 - i$, $2i$ et $2 - 2i$.

- 1) Etudie la nature des triangles ACD et BCD.
- 2) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.
En déduis le centre et le rayon du cercle qui les contient.

EXERCICE 31: Résous dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = 1 \\ z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 1 \end{cases}$$

NB : On utilisera $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0$

EXERCICE 32: Détermine et représente les ensembles de points M du plan dont l'affixe vérifie la condition indiquée :

- a) $|z + \bar{z} - 1| = 4$ b) $\arg(3i - z) \equiv 0[2\pi]$ c) $|z - \bar{z} - 1 + i| = 2$
d) $\arg(\bar{z} - 3 + i) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$ e) $\arg\left(\frac{1}{z+2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ f) $\arg(z^2 - 4) \equiv \arg(z + 2)[2\pi]$.

EXERCICE 33: Détermine puis construire :

- a) $|z + 5 - 2i| = |\bar{z} - 2 + i|$
b) $|z + 1 + i| = |3z - 9 - 3i|$.
c) L'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que : $|z - i| = 2$.
d) L'ensemble (λ) des points M d'affixe z tels que : $|z + 1 - 2i| = |z - 1 - i|$.
e) L'ensemble (φ) des points M d'affixe z tels que : $\arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$.
f) L'ensemble (ω) des points M d'affixe z tels que $\arg(3\bar{z} - 1 + i) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

EXERCICE 34 : Soit z et Z les nombres complexes définis par :

$$z = \sqrt{1 + \sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1} \text{ et } Z = z^4.$$

Détermine les racines quatrièmes de Z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique. En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

EXERCICE 35 : On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct. Décris l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :

- a) $|z|=1$ b) $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$ c) $1 \leq |z| \leq 2$ d) $|z| \leq 3$

EXERCICE 36: A tout nombre complexe z distinct de $-1+2i$, associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$. Détermine les ensembles de points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

- a) $|Z| = 1$ b) $|Z| = 2$
c) Z est un nombre réel. d) Z est un nombre imaginaire pur.

Exercice 37 : A/1) Détermine les solutions complexes de l'équation $Z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$ les écrire sous forme trigonométrique.

2) Vérifie que $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ est une racine quatrième de $8(1 - i\sqrt{3})$.

En déduis la forme algébrique des solutions de l'équation précédente.

B / On donne le nombre complexe Z tel que : $Z = 2 + 3i$

- a) Vérifie que $Z^4 = -119 - 120i$.

b) Détermine les racines quatrièmes de l'unité. Déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation:

$$Z^4 = -119 - 120i.$$

EXERCICE 38: 1) α est un nombre réel élément de $]0; \pi[$.

Détermine le module et un argument de $1 - e^{i\alpha}; 1 + e^{i\alpha}$. En déduis le module et un argument de $\frac{1 - e^{i\alpha}}{1 + e^{i\alpha}}; (1 - e^{i\alpha})(1 + e^{i\alpha})$.

2) x est un nombre réel différent de $k \times 2\pi$, n est un nombre entier naturel supérieur à 1.

On pose : $S_n = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$

$S'_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$. Factoriser S_n et S'_n .

EXERCICE 39 : 1. Résous dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système :
$$\begin{cases} u + v = -\frac{1}{2} \\ uv = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

2. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Démontre que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

Déduis que $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

3. Démontre que : $\cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5}$ et

$$\cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5} = \cos \frac{4\pi}{5}$$

4. Déduis que $\cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{4}$

5. Démontre que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

6. Déduis de la question précédente que :

$\cos^2 \frac{\pi}{5} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$, puis déduis la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{5}$.

EXERCICE 40 : 1) Ecris sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe a définie par $a = 16(1 - i)$

2) Pour λ un nombre réel quelconque, on pose : $Z_\lambda = 1 + i + 2\sqrt{2}e^{i\lambda}$

a) Calcule la partie réelle x et la partie imaginaire y de Z .

b) Détermine lorsque λ décrit $[0; 2\pi]$ l'ensemble (E) des points M de coordonnées $(x_\lambda; y_\lambda)$ dans le repère orthonormal $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan complexe P.

3) Montre que les solutions de $[z - (1 + i)]^3 = a$ sont les affixes des points de (E).

EXERCICE 41: soit z le nombre complexe définie par $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$.

Soit $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.

- 1) Montre que $S = \bar{T}$ et que $\text{Im}(S) > 0$.
- 2) Calcule $S + T$ et ST ; en déduis S et T .

EXERCICE 42 : On donne le nombre complexe $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$.

- 1) Vérifie que $z^5 - 1 = 0$. En déduis la relation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$
- 2) a) Exprime $z^2, z^3, \text{ et } z^4$ sous forme trigonométrique.
b) Démontre les égalités suivantes : $z + z^4 = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ et $z^2 + z^3 = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$.
- 3) Utilise les résultats de la question 1 et 2 pour trouve une relation entre $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$
Puis montre que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est racine de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
En déduis la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$

EXERCICE 43: Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct (O, I, J) , unité graphique 2cm , on considère les points A et B d'afixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$. Soit la fonction f de P privé du point A dans P qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i \left(\frac{z-3i}{z+1} \right)$ (1).

- 1) Soit C le point d'affixe $z_C = 2 - i$. Montre qu'il existe un point D tel que $f(D) = C$.
- 2) Détermine la nature du triangle ABC .
- 3) A l'aide de l'égalité (1), montre que, pour tout point M distinct de A et B :
 $OM' = \frac{BM}{AM}$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (modulo 2π).
- 4) En déduis et construis les ensembles de points suivants :
a) L'ensemble (E) des points M tels que l'image M' soit situé sur le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.
b) L'ensemble (F) des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.

EXERCICE 44: Soit a un nombre non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe. A tout point M d'affixe z non nul, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = a \times z$.

- 1) a) Interprète géométriquement $\arg \left(\frac{a-1}{a} \right)$.
b) Montre que $(\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}) = \arg \left(\frac{a-1}{a} \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 2) En déduis que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si, A appartient au cercle C privé de O et I .

Exercice 45 : z étant un complexe, on note (S) le système $\begin{cases} |z| = |z - 6| \\ \arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) Donne le module et un argument des trois complexes suivants : $a = \sqrt{3} + i$
 $b = -2 + 2i$ $c = 3 + 3i$.
- 2) Parmi les complexes a , b et c , lesquels sont solutions du système (S) ? (justifie la réponse).
- 3) M étant le point d'affixe z , et A étant le point d'affixe 6, traduis géométriquement les deux contraintes de (S).
- 4) Résous le système (S) par la méthode de votre choix.

EXERCICE 46 :

Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on considère l'équation d'inconnue z complexe

$$(E) : (1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha)$$

1) soit z une solution de (E)

a) Montre que $|1 + iz| = |1 - iz|$.

b) En déduis que z est un réel.

2.a) Exprime $\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

b) Soit z un nombre réel, on pose $z = \tan \varphi$ ou $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Ecris l'équation portant sur φ traduisant (E) et le résoudre.

c) Détermine les solutions $z_1; z_2; z_3$ de (E).

Exercice 47 : Le plan P complexe est rapporté un repère ortho normé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm, on considère l'application f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = -\frac{1}{z}$

F est l'application du plan P privé de O dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$.

- 1) On pose $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Exprime le module et un argument de $f(z)$ en fonction de r et θ .
- 2) On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec Z l'affixe du point I milieu de $[MM']$,
 x, y, X et Y sont des réels.
 - a) Exprime X et Y en fonction de x et y .
 - b) Détermine et représente l'ensemble (E) des points M du plan tels que I appartient à l'axe $(O, \vec{u})$.

- c) Détermine et représente l'ensemble (G) des points M du plan tels que I appartient à l'axe $(O, \vec{v})$.
- 3) On suppose $|z|=1$ donc $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$
- Calcule Z en fonction de θ .
 - Caractérise géométriquement la restriction de F au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 48 : On considère l'ensemble des nombres complexes Z_n tels que :
 $\forall n \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n \end{cases}$$

- On note M_n le point d'affixe Z_n dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 - Calcule $Z_1; Z_2; Z_3$ et Z_4 .
 - Place les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 .
- Calcule le quotient : $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}$

Quelle est la nature du triangle OM_nM_{n+1} ?

EXERCICE 49 : Soient A, B, C et D les points d'affixes $Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$.

Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

- Détermine le rapport k et l'angle θ de S.
- Détermine l'écriture complexe f associée S.
- Détermine l'affixe de Ω le centre de S.

EXERCICE 50 :

Soit $f: \mathbb{C} - \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$$

- Détermine les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que :
 $f(z_0) = 1 + 2i$
- Soit $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$. On note r le module de $z + i$ et α une mesure de son argument. Donne la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α .
- Soit A le point d'affixe $-i$.
 - Détermine l'ensemble (E) des points M vérifiant : $|f(z) - i| = 2$ et l'ensemble (D) des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure l'argument de $f(z) - i$.
 - Montre que B appartient à (E) et (D) puis construis (E) et (D).

EXERCICE 51 : On considère le polynôme f définie par :

$$f(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$$

- Détermine les nombres réels a, b et c tels que :

$$f(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$$

- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
- 3) Dans le plan complexe rapporté un repère orthonormé $(0; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A = i\sqrt{3}; \quad z_B = -i\sqrt{3}; \quad z_C = 3 - 2i\sqrt{3}; \quad z_D = \bar{z}_C.$$

- a) Place les points A, B, C, D.
- b) Quelle est la nature du triangle ACD ?
- c) Montre que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. Donne une équation de (C).
- 4) On note E le symétrique de C par rapport à O.

Précise l'axe de E et détermine la nature du triangle BED.

EXERCICE 52 : Soit u le nombre complexe défini par $u = \cos\theta + i \sin\theta$ où $\theta \in]-\pi; \pi]$

1) Calcule le module et un argument de $\frac{1-u}{1+u}$ (On discutera suivant les valeurs de θ)

2) En déduis le module et un argument de z tel que: $u = \frac{2+iz}{2-iz}$

3) Résous $(2 + iz)^6 = (2 - iz)^6$.

EXERCICE 53 : Le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + \frac{1}{2} + i)^2 + \frac{1}{4} = 0$.

2) On donne les points A $(-1; -5)$ et B $(\frac{1}{3}; \frac{1}{6})$. A tout point M d'axe $z (z \neq -1 - 5i)$, on associe le point M' d'axe Z tel que $Z = 3i \left(\frac{z - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}i}{z + 1 + 5i} \right)$

a) Détermine l'ensemble (Γ) des nombres complexes tels que $Z = z$.

b) Détermine l'ensemble (E) des points M tels que : $|Z| = 3$

c) Détermine l'ensemble (Δ) des points M tels que M' décrit le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 1 ;

d) Détermine et construis l'ensemble (F) des points M tels que M' décrit le demi axe $[O, \vec{u})$ privé de $\{0\}$

EXERCICE 54 : A tout nombre complexe z , on associe le nombre complexe Z défini par :

$$Z = iz^2 - (1 + i)z + 1$$

Calcule Z pour successivement : $Z = 1; Z = -i; Z = 1 - i$ et $Z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

On pose $z = x + iy$ ou x et y sont des réels, détermine l'ensemble E des points M d'axe z tel que $Z \in \mathbb{R}$. Représente E.

EXERCICE 55 : 1) Soient les complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$.

a) mettre sous forme trigonométrique $z_1; z_2$ et $\frac{z_2}{z_1}$.

b) En déduis que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) On considère l'équation d'inconnue réelle: $(\sqrt{2} + \sqrt{6})\cos x - (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sin x = 2$.

Résolvez cette équation dans $\mathbb{R}$; puis placez les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2) a) Détermine les solutions complexes de l'équation : $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$ les écrire sous forme trigonométrique ;

b) Vérifiez que $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ est une racine quatrième de $8(1 - i\sqrt{3})$.
En déduis la forme algébrique des solutions de l'équation précédente.

EXERCICE 56 : Soit f la fonction à variable complexe z telle que

$$f(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$$

1) Prouve que si z_0 est une solution de l'équation $f(z) = 0$ alors les complexes $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ en sont aussi.

2) Détermine $f(1 + i)$ et en exploitant ce qui précède trouver toutes les solutions de l'équation $f(z) = 0$.

3°) Soit $(o ; i ; j)$ un repère orthonormé du plan.

a°) Place les points M_1, M_2, M_3 et M_4 , images respectives des solutions de l'équation précédente.

b°) Prouve que ces quatre points sont sur le même cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon r .

EXERCICE 57 : I/ On considère le complexe Z défini par $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où $z = x + yi$, avec $(x,$

$y) \in \mathbb{R}^2$

1°/ On note $Z = X + Yi$, $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ Ecris X et Y en fonction de x et y .

2°/ Au complexe z on associe le point $M(x, y)$ d'un plan rapporté à un repère $\rightarrow \rightarrow$ orthonormé $(O ; u ; v)$. Détermine l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul.

3°/ Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$. Montre que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ) .

EXERCICE 58 : A tout point M d'affixe $z \neq -1 + 2i$, on associe le nombre complexe

$$Z' = \frac{z-3+i}{z+1-2i}$$

1) Détermine l'image directe du point A tel que $z_A = 5 + 4i$

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z' = -2i$.

3) Vérifie que $Z' - 1 = \frac{-4+3i}{z+1-2i}$ et que $|Z' - 1| = \frac{5}{|z+1-2i|}$

4) Détermine l'ensemble des points M tels que $|Z' - 1| = 2$

5) En posant $z = x + iy$ avec x et y des réels, détermine la partie réelle et la partie imaginaire de Z' puis en-déduis :

a) L'ensemble des points M d'affixe z pour que Z' soit réel.

b) L'ensemble des points M d'affixe z pour que Z' soit imaginaire pur.

c) L'ensemble des points M d'affixe z pour que $|Z'| = 1$.

6) On pose $z_L = 3 - i$ et $z_K = -1 + 2i$, retrouve les résultats de la question 5) par la méthode géométrique.

EXERCICE 59 : 1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $0 \leq \theta \leq \pi$, on considère le nombre complexe $z = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta$.

- Ecris le complexe z sous forme trigonométrique.
- Détermine θ pour que z et $1 - z$ aient même module.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation ; $z^4 = 16i$. Déduis les solutions de l'équation $(\frac{z-2}{2})^4 = i$ puis écrire ces solutions sous forme exponentielle.

3) Pour $n \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z) = z^3 - 6nz^2 + 12n^2z - 7n^3$.

- Vérifie que $P_1(1) = 0$. Résous dans $\mathbb{C}$: $P_1(z) = 0$.
- En posant $z = \frac{Z}{n}$, résous dans $\mathbb{C}$: $P_n(z) = 0$.
- Soit T_n le triangle défini par les images des solutions de $P_n(z) = 0$. Démontre que T_1 est équilatéral.
Déduis que pour tout n , T_n est équilatéral.

Exercice 60 I) Soit les points $\Omega \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. dans chacun des cas suivants :

- Donner l'écriture complexe de la transformation
- Déterminer l'image de A par la transformation
 - Symétrie de centre Ω
 - Homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$
 - Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$

II) Compléter le tableau suivant :

	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme Exponentielle
z_A			$4e^{i\frac{\pi}{2}}$
z_B		$4(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$	
z_C	$2\sqrt{3} - 2i$		

EXERCICE 61 : On donne $A = 5\sqrt{2}(1 + i)$ et $B = -5(1 + i\sqrt{3})$

- Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : A ; $\bar{A}$; B ; $\frac{B}{A}$; $\frac{1}{A}$; $A \times B$ et $\frac{A}{B^2}$.
- Soit Z un nombre complexe tel que $AZ = B$.
 - Ecris Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
 - En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{13\pi}{12}$ et de $\sin \frac{13\pi}{12}$.
 - Calcule Z^{2008} .

EXERCICE 62 : Soient A, B, C, D, E, F, G, H et I neuf points d'affixes respectifs :

$-1 + i$, $-1 - i$, $2i$, $2 - 2i$, $3 + i$, $3 - i$, $2 + 2i$, $2 - i$, 1 .

- 1) Place dans un plan complexe, les points A, B, C, D, E, F, G, H et I.
- 2) Démontre que les points C, I et D sont alignés.
- 3) Détermine l'afixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$,
- 4) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques dont on précisera le centre et le rayon.
- 5) Démontre que les points A, B, C et F appartiennent à un même cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.
- 6) *Démontre que* les droites (AB) et (GH) sont parallèles.
- 7) *Démontre que* les droites (CD) et (BI) sont perpendiculaires.
- 8) Etudie la nature des triangles ACD et BCD.
- 9) Démontre que le quadrilatère ABFE est un rectangle.
- 10) Détermine l'afixe du point K tel que CBDK soit un parallélogramme.
- 11) Détermine la nature du quadrilatère ABDG.

EXERCICE 63 : z est un nombre complexe, on considère l'équation

(E) : $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$.

- 1) Vérifie que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E).
- 2) Détermine sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduis dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes de (E) sous forme algébrique.

EXERCICE 64 : 1) Résous dans $\mathbb{C}$, $z^3 = 1$

2)a) Développe $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$

b) Soit l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$. En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, détermine sous forme algébrique et trigonométrique les racines de l'équation (E).

c) En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

EXERCICE 65 : Pour chacune des transformations f d'écriture complexe, donne la nature et les éléments caractéristiques :

- | | |
|---------------------------------|---|
| a) $z' = (1 + i)z - 1 + i$ | d) $z' = 7z + 5 - i$ |
| b) $z' = z + 4 - i$ | e) $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 + i$ |
| c) $z' = e^{\frac{2\pi i}{3}}z$ | f) $z' = -z + 2 + 2i$ |

EXERCICE 66 : Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique: 5cm), on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1+i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donne la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B .
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0; 2\pi[$. On considère l'application f qui à tout point M de (C) , associe $f(M) = MA \times MB$.
 - a. Montre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha} \sin \alpha$.
 - b. Montre l'égalité suivante: $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right) e^{i\alpha} \right|$.
 - c. En déduis l'égalité suivante: $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin \alpha \right)^2}$.
3. a. En utilisant 2.c., montre qu'il existe deux points M de (C) , dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.
 b. En utilisant 2.c., montre qu'il existe un seul point M de (C) , dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.

EXERCICE 67 : On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2-i$ et $z_B = -2i$, et pour tout nombre complexe z différent de z_B , on pose $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$.

Détermine, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

- a. Z soit un réel ;
- b. Z soit un imaginaire pur (éventuellement nul) ;
- c. Z soit de module 1.

Calcule $|Z - 1| \times |z - z_B|$ et en déduis que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R , les points d'affixes Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 68 : Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On appelle

A , B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -1+3i$, $z_B = -2$ et $z_C = -\frac{3-3i}{2}$.

Soit f l'application du plan privé de A dans le plan qui, à tout point M d'affixe z distinct de z_A , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$.

1. Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 3iz - 2 = 0$.

2. Détermine les affixes des points invariants par f .
3. Détermine l'ensemble des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.
4. En posant $z = x + iy$, détermine $\text{Im}(z')$ en fonction de x et y . Déduis-en l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.
5. a. Montre que pour tout $z \neq -1 + 3i$, on ait l'équivalence :

$$\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z-z_C)(\overline{z-z_C}) = \frac{5}{2}.$$

- b. Déduis-en l'ensemble des points M tels que M' ait une affixe imaginaire pure.