

Série d'exercices sur les Nombres Complexes en TSE

EXERCICE 1 :

On pose $a = \sqrt{3} - i$; $b = -\sqrt{3} - i$ et $c = \frac{a^2}{b^3}$

1. Donner le module et un argument de a et b .
2. Donner le module et un argument de c .
3. Donner la forme trigonométrique de $t = ab$.

EXERCICE 2 :

1. Compléter le tableau suivant :

Nombre complexe	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
z_A			$4e^{i\frac{\pi}{2}}$
z_B		$4(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$	
z_C	$2\sqrt{3} - 2i$		

2. Placer les points A ; B et C d'affixes respectives les nombres complexes z_A ; z_B et z_C dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
3. Calculer les affixes Z et Z' des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sous forme algébrique puis exponentielle.

EXERCICE 3 :

- 1-a) Résoudre l'équation : $Z \in \mathbb{C}, Z^3 - (1 - i)Z^2 + Z - 1 + i = 0$

Sachant qu'elle admet des solutions imaginaires pures.

- b) Dans le plan complexes $(\mathcal{P})$, les solutions z_1, z_2 et z_3 de l'équation proposée ont pour image respectives les points A, B et C

Placer ces points dans $(\mathcal{P})$.

- c) Déterminer le nombre complexe z_4 dont l'image est le point D, quatrième sommet du parallélogramme ABCD.

- 2- Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3

- 3-a) Calculer $(2 + i)^2$.

- b) Résoudre l'équation : $Z \in \mathbb{C}, iZ^2 - iZ - 1 + i = 0$

EXERCICE 4

- 1-a) Déterminer sous forme trigonométrique les solutions de l'équation $Z^3 - 4\sqrt{2}(-1+i) = 0$.

- b) En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.

- c) Dédire des questions précédente les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

- 2) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes suivants :

- a) $z_1 = \frac{(1+i)^4}{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}$

- b) $z_1 = -(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

- 3) Calculer $(1 + i)^{1999}$

Série d'exercices sur les Nombres Complexes en TSE

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$, A, B et C sont trois points du plan d'affixe respective $3i$; $4+i$ et $2-3i$.

- 1) Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
- 2) Calculer Z_D affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.
- 3) On pose $Z = \frac{z-3i}{z-4-i}$; déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe Z tel que
 - a) $|Z| = 1$
 - b) $Z = bi$

EXERCICE 6

1. a) Montrer que $(\sin 2x)^4 = 16\cos^4 x \sin^4 x$.
b) Linéariser $E = 16\cos^4 x \sin^4 x$.
2. a) Calculer $(2-i)^3$.
b) Déduire les racines cubiques de $2-11i$.
3. Pour $\in \mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes :
 - a) $\sin^2 x$, b) $\cos^4 x$, c) $\sin^5 x$, d) $\sin^4 x$, e) $\cos x \sin^2 x$, f) $\cos^2 x \sin^2 x$.
 - g) $\cos a \sin b$, h) $\cos a \sin b \cos c$.

EXERCICE 7

On donne le nombre complexe $Z = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$. ($i^2 = -1$).

1. a) Calculer Z^2 et Z^4 .
b) Calculer le module et un argument de Z^4 , en déduire le module et un argument de Z.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé, à tout point M de coordonnées $(x; y)$ du plan, on associe son affixe $T = x + iy$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels le module du produit $Z \times T = 8$.

EXERCICE 8

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 8Z + 25$.
2. Effectuer $(1+2i)^4$.
3. En déduire et représenter les racines quatrièmes du nombre complexe $Z = -7 - 24i$.

EXERCICE 9

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes ci-dessous puis

écrire sous forme trigonométrique : $z_1 = -2(\sin x + i \cos x)$; $z_2 = -3e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et

$$z_3 = \frac{-\cos 2x + i \sin 2x}{2 \cos 3x - 2i \sin 3x} ; 1 + \cos x + i \sin x ; \sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}$$

EXERCICE10 :

1. Donner les solutions de : $U^4 = -4$ sous forme algébrique et trigonométrique.
2. Donner les solutions de: $(z + 1)^4 + (z - 1)^4 = 0$ sous forme algébrique.

EXERCICE11 :

Partie A : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$
- 2) Soit $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$
 - a) Montrer que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution réelle notée z_0 que l'on déterminera.
 - b) Déterminer a, b et c trois nombres complexes tels que $P(Z) = (Z - z_0)(aZ^2 + bZ + c)$
 - c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(Z) = 0$

Partie B:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (o, i, j)

On donne les points A(2), B(4 + 2i) et C(-2 + 4i).

- 1) a- Placer les points A, B et C dans le repère (o, i, j)
 - b- Calculer le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC
 - c- Montrer que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$
 - d- Déterminer (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$
- 2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A)=A$ et $S(B)=C$.
- a- Déterminer le centre, le rapport k et l'angle θ de la similitude S
 - b- Déterminer l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S .

EXERCICE 12 :

- 1° On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - i = 0$.
- a) Déterminer le réel y tel que iy soit solution de (E)
 - b) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe Z :
 $Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - 1 = (Z - i)(Z^2 + aZ + b)$.
 - c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $Z^2 + Z\sqrt{3} + 1 = 0$.
 - d) En déduire les solutions de (E).

Série d'exercices sur les Nombres Complexes en TSE

2° On considère le point A d'affixe $Z_A = i$, le point d'affixe $Z_B = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$ et le point C symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

a) Placer ces points sur un graphique.

b) Déterminer le module et un argument du quotient : $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$.

c) En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et la nature du triangle ABC.

EXERCICE 13 :

On considère un repère orthonormé direct $(O ; \vec{U} ; \vec{V})$ du plan complexe. Soit les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 + i \quad ; \quad Z_B = \frac{2[\cos(\frac{7\pi}{15}) + i\sin(\frac{7\pi}{15})]}{\cos(\frac{\pi}{5}) - i\sin(\frac{\pi}{5})} \quad \text{et} \quad Z_C = 2 - 2i$$

a- Ecrire les complexes Z_A ; Z_B et Z_C sous forme exponentielle.

b- Déterminer l'affixe Z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3}$ (on fera une figure).