

EXERCICES DES NOMBRES COMPLEXES

Niveau : Terminales C & E

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit Z un nombre complexe tel que $\operatorname{Re}(Z) = 1$ et $\arg(Z) = \theta[2\pi]$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

1. a) Montrer que $\operatorname{Im}(Z) = \tan \theta$.
b) Exprimer le module de Z en fonction de $\cos \theta$.
2. On considère le nombre complexe Z' tel que $Z' = \frac{2i}{Z-1}$
 - a) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles Z' est défini.
 - b) Déterminer en fonction de θ le module et un argument de Z' .
3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, Z et Z' .
 - a) Montrer que $\frac{Z-1}{Z'-1}$ est imaginaire non nul.
 - b) En déduire la nature du triangle ABC .

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Pour tout $\theta \in [\frac{\pi}{2}; \pi[$, on désigne par A, M' et M'' les points d'affixes respectives :

$$z_A = i; \quad z' = \cos \theta + i(1 + \sin \theta); \quad z'' = \cos \theta + i(1 - \sin \theta)$$

1. a) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque θ décrit $[\frac{\pi}{2}; \pi[$.
b) On note I le milieu du segment $[M'M'']$.

Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ décrit $[\frac{\pi}{2}; \pi[$.

2. Mettre z' et z'' sous la forme trigonométrique.
3. a) Montrer que $AM'M''$ est un triangle isocèle en A .
b) Déterminer θ pour que le triangle $AM'M''$ soit équilatéral.

EXERCICE 3

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. θ est un réel de $] -\pi; \pi[$.

Pour tout θ on définit le nombre complexe $z(\theta) = \frac{1}{2} (1 + e^{i\theta})^2$.

1. a) Calculer $(1 + e^{i\theta}) e^{-i\frac{\theta}{2}}$ puis déduire que le nombre complexe $1 + e^{i\theta}$ a pour argument $\frac{\theta}{2}$.
b) Calculer en fonction de θ , le module et un argument de $z(\theta)$.
c) Représenter le point image de $z(\frac{\pi}{6})$.
2. On considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = -\cos \alpha e^{i\alpha}$ et $z_2 = i \sin \alpha e^{i\alpha}$. Avec α un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.
 - a) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe I que l'on précisera.
 - b) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle.
 - c) Montrer que $OM_1^2 + OM_2^2 = M_1M_2^2$. Conclure.

- d) Déterminer $|z_1 + \frac{1}{2}|$ puis en déduire l'ensemble des points M_1 et celui des points M_2 .

EXERCICE 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère le point A d'affixe respective $z_A = i$. Soit f l'application du plan qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$. On pose $r = |z - i|$ et $\theta = \arg(z - i)[2\pi]$. Avec $r > 0$ et $\theta \in]0; 2\pi[$

- a) Montrer que $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

b) Montrer que $z' = \frac{1}{r}e^{-i\theta} - 2i$.

c) Soit r' et θ' le module et un argument de $z' + 2i$. Exprimer r' et θ' en fonction de r et θ .
- a) Déterminer la valeur de r pour que les points M appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon 2.

b) Déterminer la valeur de θ pour que les points M parcourent la demi-droite de repère $(A; \overrightarrow{AM})$ privée du point A tel que $\text{mes}(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
- a) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M tels que $|z' + 2i| = \frac{1}{3}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M tels que $\arg(z' + 2i) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

EXERCICE 5

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2z + 1 + e^{i2\theta} = 0$, où θ est un réel de l'intervalle $]\frac{\pi}{2}; \pi]$.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A , M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_A = 2$; $z_1 = 1 - ie^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + ie^{i\theta}$.

a) Déterminer à l'aide de θ , le module et un argument de z_1 .

b) Montrer que les segments $[OA]$ et $[M_1M_2]$ ont le même milieu puis calculer la distance M_1M_2 .

c) Montrer que le quadrilatère OM_1AM_2 est un rectangle.

d) Déterminer la valeur de θ pour laquelle OM_1AM_2 est un carré.
- Pour la valeur de θ trouvée, écrire z_1 et z_2 sous la forme algébrique puis placer les points A , M_1 et M_2 dans le repère.

EXERCICE 6

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : Z^2 + i(e^{i\theta} - 2)Z + e^{i\theta} - 1 = 0$, où $\theta \in]0; 2\pi[$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On désigne par A, M et N les points d'affixes respectives : i ; $i - ie^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$.

- a) Montrer que, $\forall \theta \in]0; 2\pi[, M$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre A de rayon 1.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux.
- On désigne par B et Q les points d'affixes respectives 1 et $e^{i\theta}$ où $\theta \in]0; 2\pi[$.
 - Vérifier que $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{NB}$.

- b) Montrer que, pour tout réel $\theta \in]0; 2\pi[$, $-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} = 1 - e^{i\theta}$.
- c) En déduire que, pour tout réel $\theta \in]0; 2\pi[$, $MN = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
4. a) Montrer que le point M est l'image du point N par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
- b) Déterminer la nature du triangle ONM puis trouver les valeurs de θ telles que $MN = \sqrt{2}$.

EXERCICE 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- Soit l'équation $(E): z^2 - (2i - ie^{i\theta})z - 1 + e^{i\theta} = 0$, où $\theta \in]0; \pi[$
 - Vérifier que i est une solution de (E) .
 - Déterminer alors l'autre solution de (E) .
- Soit z un nombre complexe non nul, A, B et C trois points d'affixes respectives $z, \bar{z}$ et $\frac{z^2}{\bar{z}}$.
Montrer que ABC est un triangle isocèle en A .
- On pose $z = i - ie^{i\theta}$, où $\theta \in]0; \pi[$
 - Montrer que $z = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$
 - Vérifier que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -\frac{z}{\bar{z}}$
 - Montrer alors que $(\vec{AB}; \vec{AC}) = \pi + \theta[2\pi]$
 - En déduire la valeur de θ pour laquelle ABC est un triangle équilatéral.

EXERCICE 8

- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On désigne par I le point d'affixe 1.
Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z}{z-1}$.
 - Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que z' soit imaginaire.
 - Déterminer l'ensemble F des points $M(z)$ tels que $|z'| = 1$.
- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 + (2i \sin \alpha)z - 1 = 0$, où α est un réel de $]0; \pi]$.
b) Donner les solutions de (E) sous la forme exponentielle.
- Soit θ un réel de $]0; \pi]$.
 - Vérifier que : $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$
 - Montrer que : $z' = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E'): \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 + (2i \sin \alpha) \left(\frac{z}{z-1}\right) - 1 = 0$
b) Donner les solutions de (E') sous la forme exponentielle.

EXERCICE 9

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 + 64 = 0$. (On donnera les solutions sous forme exponentielle)
- Soit θ un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.
On pose : $P(z) = z^3 - 2(2\cos\theta + i)z^2 + 4(1 + 2i\cos\theta)z - 8i$

- Vérifier que $z_0 = 2i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.
- Montrer que pour tout nombre complexe z , on a : $P(z) = (z - 2i)(z^2 - 4\cos\theta z + 4)$
- Achever alors la résolution de l'équation $P(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les autres solutions tels que $\text{Im}(z_1) \geq 0$.
- Ecrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle.

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On désigne par M_0 , M_1 et M_2 , les points d'affixes respectives z_0 , z_1 et z_2 .

- Vérifier que les points M_0 , M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon r à préciser.
- Pour quelle valeur de θ , z_0 , z_1 et z_2 sont les racines sixièmes de -64 ?

EXERCICE 10

α est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi]$ et z un nombre complexe.

On considère le polynôme P définie par : $P(z) = z^3 - (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1$.

- Calculer $P(1)$.
 - Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -\sin\alpha + i\cos\alpha \text{ et } z_2 = -\sin\alpha - i\cos\alpha$$

4. On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + ie^{i\theta} \text{ et } z_B = 1 - ie^{i\theta} \text{ où } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$

- Montrer que pour tout réel x , on a : $1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et $1 - e^{ix} = -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$
- En déduire l'écriture sous la forme exponentielle de z_A et z_B .
- Déterminer, sous forme algébrique le nombre complexe $u = e^{i\theta}$ pour que les points O, A et B forment un triangle iso-rectangle direct en O .

EXERCICE 11

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - z + e^{i2\theta} - ie^{i\theta} = 0$, $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

- Calculer $(1 + 2ie^{i\theta})^2$
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . On notera z_1 et z_2 les solutions obtenues.
 - Ecrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle.
- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par A, B, C et les points d'affixes respectives : $z_A = 1$; $z_B = 1 + ie^{i\theta}$ et $z_C = -ie^{i\theta}$.
 - Montrer que le quadrilatère $OBAC$ est un parallélogramme.
 - Montrer que $|z_B - z_A| = 1$, puis en déduire l'ensemble des points B du plan lorsque θ varie sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
 - Pour quelle valeur de θ le point C est l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$?
 - Pour quelle valeur de θ , la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ transforme le point C en un point D d'affixe $z_D = \sqrt{3} + i$?

EXERCICE 12

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2 - 2i$ et $z_B = 2 + 2i$.

- Soit r la rotation de centre O qui transforme A en B .
 - Déterminer une mesure θ de l'angle de r .
 - Déterminer l'écriture complexe de la rotation r .
 - Déterminer l'affixe $z_{B'}$ du point B' , image de B par la rotation r .
- Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 2\pi[- \{\pi\}$. On note M le point d'affixe z telle que $z = 2 + 2e^{i\alpha}$ et M' l'image de M par la rotation r . On note z' l'affixe du point M' .
 - Démontrer que M est situé sur un cercle (Γ) dont on précisera le centre Ω et le rayon R .
 - Démontrer que $z' = 2i - 2e^{i\alpha}$.
- On note u et v les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.
 - Exprimer u et v en fonction de α .
 - Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2ix} + 1 = 2e^{ix} \cos x$ et $e^{2ix} - 1 = 2ie^{ix} \sin x$.
 - Démontrer que : $\frac{u}{v} = \tan \frac{\alpha}{2}$.
 - Déduire de ce qui précède que les points M , M' et B sont alignés.

EXERCICE 13

Soit $(O; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan P , $\theta \in]0; \pi[$. A et B sont deux points du plan d'affixes respectives 1 et -1 .

On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$; $(E): z^2 - 2z + 2\sin^2 \theta - 2i\sin\theta\cos\theta = 0$.

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E) .

- Montrer, sans résoudre (E) , que $\arg(z_1) + \arg(z_2) = (\theta - \frac{\pi}{2}) [2\pi]$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- Mettre sous la forme trigonométrique la solution de (E) ayant la partie imaginaire positive. En déduire la forme trigonométrique de l'autre solution.
- On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $1 + \cos\theta + i\sin\theta$ et $1 - \cos\theta - i\sin\theta$ et I le milieu du segment $[M_1M_2]$.
 - Donner l'affixe du point I .
 - Déterminer l'ensemble décrit par les points M_1 lorsque θ décrit $]0; \pi[$.
 - En déduire l'ensemble décrit par les points M_2 lorsque θ décrit $]0; \pi[$.

EXERCICE 14

Soit θ un réel de l'intervalle $]0; \pi[$.

- Vérifier que $e^{2i\theta} - 2i\sin\theta e^{i\theta} = 1$.
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2e^{i\theta}z + 2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$.
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = e^{i\theta} + 1$; $z_B = e^{i\theta} - 1$; $z_C = 1 - e^{-i\theta}$ et $z_D = 1 - e^{i\theta}$.
 - Déterminer l'ensemble des points C lorsque θ décrit $]0; \pi[$.
 - Montrer que les points A , B et C sont alignés.
 - Montrer que le triangle OAB est rectangle en O .
- Soit S la similitude plane directe qui laisse invariant le point A et transforme le point D en B .

- a) Déterminer l'écriture complexe de S .
- b) Déterminer le rapport de S puis en déduire sa nature exacte.
- c) Déterminer l'expression analytique de S .

EXERCICE 15

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - (e^{i2\theta} + 2e^{i\theta})z + e^{i3\theta} + 2e^{i2\theta} = 0$, $\theta \in [0; \pi[$.

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E) .

1. Sans calculer z_1 et z_2 :
 - a) Montrer que $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{e^{i2\theta} + 2}{e^{i2\theta} + e^{i\theta}}$
 - b) Déterminer θ pour que $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{3}{2}$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
3. On considère les points I , M , M' et M'' d'affixes respectives $z_I = 1$, $z_M = e^{i2\theta}$, $z_{M'} = 1 - e^{i2\theta}$, $z_{M''} = e^{i2\theta} + e^{i\theta}$.
 - a) Mettre $z_{M'}$ et $z_{M''}$ sous la forme exponentielle.
 - b) Montrer que les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.
4. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre I , de rayon 1 et $(\mathcal{C}')$ le cercle de diamètre $[OI]$.
 - a) Vérifier que le point M' appartient au cercle $(\mathcal{C})$.
 - b) Déterminer l'affixe du point K , milieu de $[M'M'']$, et vérifier que $K \in (\mathcal{C}')$.

EXERCICE 16

Soit θ un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ et l'équation $(E): z^2 - 2ie^{i\theta}z - 4(1-i)e^{2i\theta} = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
2. On considère dans le plan complexe, les points M et M' d'affixes respectives $2e^{i\theta}$ et $2(1-i)e^{i\theta}$ et on note N l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, N' l'image de M' par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.
 - a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M quand θ décrit $]0; \frac{\pi}{2}[$.
 - b) Déterminer les affixes z_N et $z_{N'}$ des points N et N' sous la forme exponentielle.
 - c) Montrer que $OMNM'$ est un parallélogramme.
 - d) En déduire une construction du point M' à partir du point M .
3. a) Déterminer en fonction de θ le module et un argument de $z_{M'}$.
 - b) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque θ varie dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.
4. Soit l'équation $(E'): (\sqrt{2}z - 1)^3 = (-2 + 2i)e^{i\theta}z^3$
 - a) Déterminer les racines cubiques du complexe $(-2 + 2i)e^{i\theta}$.
 - b) Soit $x \in]0; \pi[$. Montrer que : $\frac{\sqrt{2}z-1}{z} = \sqrt{2}e^{ix} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + i \cot \frac{x}{2})$
 - c) En déduire les solutions de l'équation (E') .