

CSP ETOILE FILANTE DE TILLABERI



Tel ☎ : (+227) 99 32 32 39
91 32 32 39
94 32 32 39
93 32 32 39

Lieu : Rond-point

Matière : Mathématiques

Classe : Tle D et C

Travaux dirigés N°1

Prof : ISSOUFOU BILI ABOUBACAR

EXERCICE N°1

I. Complétez le tableau ci-dessous :

Le nombre complexe	Partie réelle	Partie imaginaire
$2 + 5i$		
$-10i + 5$		
$2 + \sqrt{3} + 5i\sqrt{3} + 2i$		
$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2} + 3i)$		
$\frac{-6 - 4i}{5}$		
$-(\frac{1}{3} + 5\sqrt{2})$		
$i \left(\frac{1}{4} + 2 - \sqrt{2} \right)$		

II. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

- a) $z = 3 + 2i - 1 + 3i$ b) $z = 6 + i - (2 + 4i)$ c) $z = (1 + 2i)(4 + 3i)$ d) $(1 + i)$
 e) $z = (i - 2)^2$ f) $(3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$ g) $(1 - i\sqrt{5})^3$ h) $(2 - i)^6$

III. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

- a) $z = \frac{1}{1-i}$ b) $z = \frac{1}{2-i\sqrt{3}}$ c) $z = \frac{1}{4-3i}$ d) $z = \frac{4-3i}{3+2i}$
 e) $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$ f) $z = \left(\frac{4-6i}{2-3i} \right) \left(\frac{1+3i}{3+2i} \right)$ g) $z = \frac{3-6i}{3+i} + \frac{4}{3-i}$ h) $z = i^{2045}$
 $A = i^{25} + i^{26} + i^{27} + i^{28}$, $B = i^{2045}$, $C = i^{1948}$, $D = i^{2003}$, $E = i^{34}$, $F = i^{45678}$

III. Donner la forme algébrique du conjugué du nombre complexe z dans chacun des cas suivants :

- a) $z = \frac{1}{i-1}$ b) $z = \frac{3-i}{1+i}$ c) $z = \frac{2i+1}{i+2} + \frac{1-2i}{2-i}$ d) $\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^2$

IV. Donner la forme algébrique du nombre complexe z dans chacun des cas suivants :

- a) $z = \sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$ b) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \left(\frac{-\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{2} \right) \right]$
 c) $z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ c) $z = 3 \left[\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right]$

IV. On pose $z_1 = \frac{a+ib}{a-ib}$ et $z_2 = \frac{a-ib}{a+ib}$; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

EXERCICE N°2 :**I. Calculer le module et un argument du nombre complexe z dans chacun des cas suivants :**

- a) $z = \sqrt{3} + i$ b) $z = \sqrt{3} - i$ c) $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 e) $z = -6i$ f) $z = 2i$ g) $z = 2$ h) $z = -8$
 i) $z = 1 - i$ j) $z = -1 + i$ k) $z = 2 - 2i\sqrt{3}$ l) $z = 1 + \frac{1}{i}$
 m) $z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}(i - 1)$ n) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ o) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ p) $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$

II. On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

- a) $\bar{z}_1$ b) $z_1 z_2$ c) $\frac{1}{z_2}$ d) $\frac{z_1}{z_2}$ e) $z = \frac{z_1^2}{z_2^3}$ f) z_1^3

III. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe z dans chacun des cas suivants

- a) $z = 5 - 5i$ b) $z = -1 + i\sqrt{3}$ c) $z = 2i\sqrt{3}$ d) $z = -2i$ e) $z = 3i$
 f) $z = 3$ g) $z = -5$ h) $z = \frac{\sqrt{6}}{1 + i}$ i) $z = \frac{2}{1 - i\sqrt{3}}$ j) $z = (\sqrt{3} - i)^{2012}$

IV. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe z dans chacun des cas suivants

- a) $z = -4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ b) $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ c) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
 d) $z = \sin\theta + i\cos\theta$ e) $z = \cos\theta - i\sin\theta$ f) $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$
 g) $z = 2\cos^2\theta + i\sin 2\theta$ h) $z = 2i\cos^2\theta - i\sin 2\theta$ i) $z = \frac{\tan\theta - i}{\tan\theta + i}$

V. Mettre chacun des nombres suivants sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique :

- a) $z = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ b) $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ c) $z = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ d) $z = \sqrt{2}e^{i\pi}$ e) $z = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$

VI. 1) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -1 - i ; \quad z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad Z = z_1 z_2$$

2) Déterminer la forme algébrique de Z 3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$ 4) Donner la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ **EXERCICE N°3 :****I. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points**

A et B d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_B = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} - 2i$. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$

II. Soit A , B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$; $z_B = -1 - i\sqrt{3}$; $z_C = -2$. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$

III. Soit A ; B ; C ; D les points du plan d'affixes respectives $z_A = -i$; $z_B = 3$; $z_C = 2 + 3i$; $z_D = -1 + 2i$. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AC})$

IV. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct, on considère les points A ; B et C d'affixes respectives z_A ; z_B et z_C .

Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, puis en déduire la nature du triangle ABC

dans chacun des cas suivants :

- 1) $z_A = 2$; $z_B = 1 - 3i$; $z_C = -1 + i$
- 2) $z_A = -1$; $z_B = 1$; $z_C = i\sqrt{3}$
- 3) $z_A = 1 + \frac{3}{4}i$; $z_B = 2 - \frac{5}{4}i$; $z_C = 3 + \frac{7}{4}i$
- 4) $z_A = \frac{1}{2} + i$; $z_B = \frac{3}{2} - i$; $z_C = 1 - \sqrt{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE N°4 :

I. Déterminer, puis représenter dans chacun des cas l'ensemble des points M du plan d'affixes z vérifiant la relation donnée :

- a) $|z - 3| = |z - 3i|$
- b) $|z + 2 - 3i| = |z + 5i|$
- c) $|z - 1 + i| = 2$
- d) $|z + 2 - 3i| = |2 + 3i|$
- e) $|iz - 3| = |z + i|$
- f) $|\bar{z} - 4 + i| = 1$

II. Déterminer l'ensemble des nombres complexes tels que :

- 1) $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = 1$
- 2) $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

IV. Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on définit $Z = \frac{z-2i}{z-1}$.

On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X et Y sont des réels.

- 1) Exprimer X et Y en fonction de x et y
- 2) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit réel
- 3) Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur
- 4) Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$
- 5) Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z tels que $|Z| = 2$

EXERCICE N°5 :

I. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes les équations suivantes:

- a) $(1 + i)z + 2 = 3z - 2i$
- b) $(1 + i)z = 3 - i$
- c) $(1 + i)\bar{z} + 2 = -z + i$
- d) $2z^2 + 3|z|^2 - 1 = 0$
- e) $\frac{z-1}{z-i} = i$
- f) $iz + 2|\bar{z}| = i - 1$

II. Résoudre dans C^2 , les systèmes d'équations suivants:

- a) $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 1 - 7i \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3\bar{z} - i\bar{z}' = 1 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = 17 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$

III. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes les équations suivantes:

- a) $2z^2 - 6z + 5 = 0$
- b) $z^2 + z + 1 = 0$
- c) $z^2 - 5z + 9 = 0$
- d) $z^2 - 3z + 4 = 0$
- e) $z^2 - z + 10 = 0$
- f) $z^2 + 6z + 25 = 0$

IV. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants:

- a) $Z = 1$
- b) $Z = i$
- c) $Z = 3 + 4i$
- d) $Z = 8 - 6i$
- e) $Z = 7 + 24i$

IV. Montrer que z est une racine douzième de l'unité tel que : $z^8 + z^4 + 1 = 0$

V. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes les équations suivantes

- a) $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$; b) $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$; c) $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$
- b) $(1 + i)z^2 - (3 + i)z - 6 + 4i = 0$
- e) $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$
- e) $z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$;
- f) $z^2 + 2z \sin \theta + 1 = 0$ avec $\theta \in \mathbb{R}$
- f) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$
- h) $z^8 + z^4 + 1 = 0$

EXERCICE N°6 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure
(E): $z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0$
- 2) On considère les points A, B, C d'affixes respectives $1+i$; $2i$ et i . Placer les points A, B et C dans le repère. (unité graphique: 2cm).
- 3) Pour tout nombre complexe z différent de $1+i$, on associe le nombre complexe z' défini par: $z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$
 - a) Interpréter graphiquement $|z'|$ et $\arg(z')$
 - b) Déterminer puis construire l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
 - c) Déterminer puis construire l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que $|z| = 2$

EXERCICE N°7 :

Soit le polynôme P de la variable complexe z définie par :

$$P(z) = z^3 - (7+9i)z^2 + (39i-14)z + 50$$

- 1) Prouver que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine réelle.
- 2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$
- 3) Soient A; B; C les points images respectives des solutions de l'équation $P(z) = 0$
 - a) Placer ces points dans un repère orthonormé.
 - b) Montrer que le triangle ABC est rectangle
 - c) Donner une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC

EXERCICE N°8 :

Soit P un polynôme tel $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$

- 1) Démontrer que si z_0 est une racine de P alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de P
- 2) Déterminer les réels a et b tels que:
pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z - z_0)(z + z_0)(az + b)$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

EXERCICE N°9 :

On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^2 + 6z + 25$

- 1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
- 2) Donner une écriture algébrique des nombres complexes a et b définis par:
 $a = (1+2i)^2$ et $b = (1-2i)^2$
- 3) en déduire les solutions de l'équation: $z^4 + 6z + 25 = 0$

EXERCICE N°10 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes: a) $z^3 = 1$; b) $z^4 = 1$; c) $z^5 = 1$
d) $z^5 = 1-i$ e) $z^3 = 2-2i$

- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z-1}{z-i}\right)^3 = -8$

- 3) linéariser les écritures suivantes: $\cos^3 x$; $\sin^3 x$; $\cos^4 x$; $\sin^4 x$; $\cos^5 x$; $\sin^5 x$
 $\cos^2 x \sin^2 x$; $\cos x \sin^3 x$; $\sin^2 x \cos^2 x$.

- 4) θ étant un nombre réel, exprimer $\cos 4\theta$; $\sin 4\theta$; $\cos 5\theta$; $\sin 5\theta$ en fonction
de $\cos \theta$ et $\sin \theta$