

LES PROBLEMES CLASSIQUES RESOLUS

Classique 1 :

Equation différentielle avec second membre $y' + ay = g(x)$

On considère l'équation différentielle $(E): \frac{1}{2}y' + y = e^{-2x}$

- 1) On pose $u(x) = axe^{-2x}$ où a est un réel.
- 2) Déterminer le nombre réel a pour que la fonction $u: x \mapsto u(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ soit solution de (E)
- 3) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): \frac{1}{2}y' + y = 0$
- 4) Démontrer qu'une fonction y définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si la fonction $y - u$ est solution de (E_0) .
- 5) En déduire toutes les solutions de (E) puis la solution particulière f de (E) , dont la courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point $A(0; -1)$

Résolution

(1) *Déterminons le nombre* a

u est solution de (E) si $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$

$$\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x} \Rightarrow \frac{1}{2}ae^{-2x} = e^{-2x}$$

Par identification $a = 2 \Rightarrow u(x) = 2xe^{-2x}$

(2) *Résolution de (E_0)* : $\frac{1}{2}y' + y = 0$

$$\frac{1}{2}y' + y = 0 \Rightarrow y' = -2y \Rightarrow y = ke^{-2x}; k \in \mathbb{R}$$

(3) *Démonstration*

Supposons que y est solution de (E) et montrons que $y - u$ est solution de (E_0)

Si y est solution de (E) , alors on a $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = e^{-2x}$;

or $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$ d'où $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}u'(x) + u(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(y - u)'(x) + (y - u)(x) = 0$ et donc $y - u$ est solution de (E_0)

Réciproquement, supposons que $y - u$ est solution de (E_0) et montrons que y est solution de (E)

Si $y - u$ est solution de (E_0) , alors on a $\frac{1}{2}(y - u)'(x) + (y - u)(x) = 0$ d'où

$$\frac{1}{2}y'(x) - \frac{1}{2}u'(x) + y(x) - u(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}u'(x) + u(x)$$

Or $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$ d'où $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = e^{-2x}$ et donc y est solution de (E)

En conclusion y est solution de (E) si et seulement si $y - u$ est solution de (E_0)

(4) Dédution de toutes les solutions de (E)

Soit y une solution de (E) , on a d'après (3) et (2), $y(x) - u(x) = ke^{-2x}$; d'où

$$y(x) = ke^{-2x} + u(x) \Leftrightarrow y(x) = ke^{-2x} + 2xe^{-2x} ; k \in \mathbb{R}$$

Solution particulière f de (E)

$$f(x) = ke^{-2x} + 2xe^{-2x} \text{ et } f(0) = -1 \Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow f(x) = (2x - 1)e^{-2x}$$

Commentaires

- Ces quatre questions sont toutes liées
- Tout candidat sérieux doit être en mesure de reproduire à l'identique le raisonnement du *classique 1*
- Attention !!! La réciproque dans la **question (3)** n'est pas facultative

Classique 2 : Etude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$

(1) Etudier les variations de la fonction f

(2) Soit g la définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in \left] \frac{1}{2} ; 1 \right[$

(3) On pose $I = \left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$

(a) Montrer que pour tout élément x de I , $f(x) \in I$ et que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

(b) Montrer que pour tout élément x de I , $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

(4) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(a) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$

(b) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ et que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

(c) Montrer que la suite (u_n) converge vers α

(d) Déterminer le plus petit entier n_0 pour lequel l'on a pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

On donne : $\sqrt{e} \simeq 1,65$; $e \simeq 2,72$; $\ln 2 = 0,69$ et $\ln 10 = 2,30$

Résolution

(1) Variations de f

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(e^x + x)^2}; \forall x \in [0; 1], x - 1 \leq 0 \text{ et } \frac{e^x}{(e^x + x)^2} > 0 \text{ d'où } \frac{(x-1)e^x}{(e^x + x)^2} \leq 0$$

$\forall x \in [0; 1], f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante

(2) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

$$g'(x) = f'(x) - 1; \forall x \in [0; 1], f'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) - 1 < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$$

La fonction g est continue car dérivable et est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

Alors réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $g([0; 1]) = [g(1); g(0)] = \left[-\frac{1}{e+1}; 1\right]$.

Or $0 \in \left[-\frac{1}{e+1}; 1\right]$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$

Montrons que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$

$$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{e} - 1}{2(\sqrt{e} + 1)} \\ g(1) = \frac{e}{e+1} - 1 = -\frac{1}{e+1} \end{cases} \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) \times g(1) < 0 \text{ alors } \alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$$

(3) On pose $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

(a) Montrons que pour tout élément x de I , $f(x) \in I$

$$x \in I \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ car } f \text{ est décroissante sur } I$$

$$\text{Or } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} + \frac{1}{2}} = 0,76 \text{ et } f(1) = \frac{e}{e+1} = 0,73 \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{2} \leq 0,73 \leq f(x) \leq 0,76 \leq 1 \text{ et donc } f(x) \in I$$

(b) Montrer que pour tout élément x de I , $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$$x \in I \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{e} \leq e^x \leq e \text{ et } 0 \leq -(x-1) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq -(x-1)e^x \leq \frac{e}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ et } \sqrt{e} \leq e^x \leq e \Leftrightarrow \sqrt{e} + \frac{1}{2} \leq e^x + x \leq e + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{e} + \frac{1}{2}\right)^2 \leq (e^x + x)^2 \leq (e + 1)^2$$

$$\frac{1}{(e+1)^2} \leq \frac{1}{(e^x + x)^2} \leq \frac{1}{\left(\sqrt{e} + \frac{1}{2}\right)^2} \text{ et } 0 \leq -(x-1)e^x \leq \frac{e}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{(x-1)e^x}{(e^x + x)^2} \leq \frac{e}{2\left(\sqrt{e} + \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{e}{2(\sqrt{e})^2}$$

$$\text{On a alors } 0 \leq -f'(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow |0| \leq |f'(x)| \leq \left|-\frac{1}{2}\right|$$

$$\text{et donc } |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

(c) Montrer que pour tout élément x de I , $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\alpha \in I$ et $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors d'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$$\left| \int_{\alpha}^x f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha| \text{ d'où } |[f'(t)]_{\alpha}^x| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha| \Leftrightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

Or d'après (2), $f(\alpha) = \alpha$ d'où $\forall x \in I$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

(4) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(a) Montrons que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2} \in I = \left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$

Supposons que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$ et montrons que $u_{n+1} \in I$

Si $u_n \in I$, alors $f(u_n) = u_{n+1} \in I$ car d'après (3a) : $\forall x \in I$, $f(x) \in I$

Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \in I$

(b) Démonstrations

✓ Montrons que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$; posons $x = u_n$ dans (3c) : On a

$$|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|. \text{ Or } f(u_n) = u_{n+1} \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

Autre façon de faire

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I ; \alpha \in I$ et $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors d'après l'inégalité de la moyenne, on a : $\left| \int_{\alpha}^{u_n} f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ d'où $\left| [f'(t)]_{\alpha}^{u_n} \right| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

$\Leftrightarrow |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$. Or d'après (2), $f(\alpha) = \alpha$ et par définition

$f(u_n) = u_{n+1}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

✓ Montrons que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Raisonnement par récurrence

Pour $n = 0, |u_0 - \alpha| = \left| \frac{1}{2} - \alpha \right| ; \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq 0$
 $\Rightarrow |0| \leq \left| \frac{1}{2} - \alpha \right| \leq \left| -\frac{1}{2} \right| \Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$

Supposons que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et montrons que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$$

Si $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}}$ et donc $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

Conclusion : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Autre façon de faire

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$; d'où :

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_1 - \alpha|$$

$$|u_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_2 - \alpha|$$

$\vdots$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$$

Le produit membre à membre donne après simplification :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq 0$$

$$\Rightarrow |0| \leq \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \leq \left|-\frac{1}{2}\right| \Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{On a } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} \text{ et donc } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(c) Montrons que la suite (u_n) converge vers α

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ car } \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

La suite $(u_n - \alpha)$ converge vers 0 et donc la suite (u_n) converge vers α

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

(d) Déterminons le plus petit entier n_0 pour lequel l'on a pour tout $n \geq n_0$,

$$|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$$

On a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ donc aura $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ si $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3} \Rightarrow -(n+1) \ln 2 \leq -3 \ln 10 \Rightarrow n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2} - 1$$

$$\Rightarrow n \geq 9 \text{ et donc } n_0 = 9.$$

Commentaires : Faire le même raisonnement pour les questions :

- ✓ Déterminer le plus petit entier n_0 pour lequel u_{n_0} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près
- ✓ Déterminer le plus petit entier n_0 pour lequel l'on a pour tout $n \geq n_0$,
 $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

Problème de Synthèse 2

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan d'unité graphique 4 cm.

PARTIE A

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation
3. a. Montrer la droite (Δ) la droite d'équation $y = x - \ln 2$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ de f
b. Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ)
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α
et justifier que $\alpha \in \left[1 ; \frac{5}{4}\right]$
5. Tracer $(\mathcal{C})$ et (Δ)
6. Soit t un réel compris entre 0 et 1
 - a. Calculer $\mathcal{A}(t)$ en unité d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations $x = t$ et $x = \frac{e^2 - 1}{2}$.
(On pourra s'aider d'une intégration par parties)

b. Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(t)$

7. Montrer que α est solution de l'équation $(2x + 1)e^{-x} = x$

PARTIE B

On nomme g la fonction définie sur $I = \left[1 ; \frac{5}{4}\right]$ par $g(x) = (2x + 1)e^{-x}$

1. Etudier les variations de g

En déduire que pour tout x élément de I , $g(x) \in I$

2. Montrer pour tout x élément de I , $|g'(x)| \leq \frac{3}{5}$ et que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{5}|x - \alpha|$

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$

b. Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5}|u_n - \alpha|$

c. Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite

d. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

On donne : $\ln 2 = 0,70$; $\ln 3 = 1,09$; $\ln 5 = 1,60$; $\ln 7 = 1,94$;

$e^{-1} = 0,37$; $e^{-1,25} = 0,2$