

NOMBRES COMPLEXES

Formes algébriques

Exercice 1 :.....

Détermine les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i; z_2 = -1 + i\sqrt{3}; z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_4 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; z_5 = 3 + i\sqrt{3}; z_6 = 3i;$$

$$z_7 = -3; z_8 = -4 + 4i; z_9 = -\sqrt{3} + 3i; z_{10} = 1 - i; z_{11} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}; z_{12} = 2; z_{13} = 2 + 2i; z_{14} = 3 + 3i$$

$$z_{15} = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2}{(x-1)^2 + y^2} - i \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}; z_{16} = \frac{x^2 + t^2 + 3x - 3y + 2}{(x+1)^2 + (y-3)^2} + \frac{3x - y + 6}{(x+1)^2 + (y-3)^2}i$$

Exercice 2 :.....

Ecris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \left(\frac{1}{2} - 2i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right); z_2 = (1 - 2i)^2; z_3 = \frac{1}{1+3i}; z_4 = \frac{1}{2}(1 - 3i);$$

$$z_5 = (1 - i)^2 - (2 - i)^2; z_6 = (2 - i)(3 + i); z_7 = (2 + i\sqrt{3})(1 + i); z_8 = (-2 - i)^3;$$

$$z_9 = (1 - i)(4 + 3i)(1 + i); z_{10} = (i - 2)^2 + (-3 + 2i)^2; z_{11} = \frac{1-i}{1+i}; z_{12} = \frac{i^2}{3i-4};$$

$$z_{13} = \frac{2+3i}{5+3i}(4 + 5i); z_{14} = \frac{(1+i)(4+3i)}{(5-i)(2+i)}; z_{15} = (1 + i)^6; z_{16} = (1 + 2i)^4; z_{17} = (2 + i)^3$$

$$z_{18} = (2 + i)(1 - i) - (3 - 2i)^2 + (5 - i)(5 + i);$$

$$z_{20} = 3i(2 + 8i) - 7(5 - 2i) + (7 - 8i)(1 + 4i);$$

$$z_{21} = i^{2023}; z_{22} = i^{34}; z_{23} = i^{45678}; z_{19} = i^{25} + i^{26} + i^{27}; B = i^{2045} + i^{1984}$$

Exercice 3 :.....

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 3 + i$.

Ecris sous forme algébrique : $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \times z_2$; z_1^2 ; $\frac{1}{z_2}$; $\frac{z_2}{z_1}$; $\frac{z_2}{z_1 - z_2}$; $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$

Nombre réel et imaginaire pur

Exercice 4 :.....

- Détermine le réel x tel que : $x^2 - 3x + 2 + i(2x^2 + x - 10) = 0$
- On pose $z = x + iy$ avec x et y réels. Détermine en fonction de x et y les parties réels et imaginaire de :
 - $z_1 = z^2 - 3z + 2 + i$
 - $(1 + z)^2 + (1 + z)i$
- Soit z le nombre complexe défini par : $z = 2x + 3i + (ix - 2)(2 - i(x + 4))$. Détermine le nombre réels x tel que :
 - z est un nombre réel
 - z est un nombre imaginaire pur

Exercice 5 :.....

Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe z défini par : $z = (x + 2i)(1 - xi)$.

- Détermine l'écriture algébrique du nombre complexe z .

2. a. Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un nombre réel ?
c. Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un nombre imaginaire pur ?

Exercice 6 :

1. Montre que le nombre $z = \frac{2+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-i} + \frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+i}$ est un nombre réel.
2. Montre que le nombre $z = \frac{2+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-i} - \frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+i}$ est un imaginaire pur.
3. Démontre que si z_1 et z_2 ont pour module 1 alors le nombre complexe $\frac{z_1+z_2}{z_1z_2+1}$ est réel.
4. Démontre que si z_1 et z_2 ont pour module 1 alors le nombre complexe $\frac{z_1-z_2}{z_1z_2+1}$ est un imaginaire pur.

Exercice 7 :

1. Mets sous forme algébrique les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{2+6i}{3-i}; z_2 = (1-i)(1+2i); z_3 = \frac{4i}{i-1}$$

2. Place dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i; z_B = 3+i$ et $z_C = 2-2i$

Exercice 8 :

Soient les complexes $z_1 = x - 3i$ et $z_2 = 2 + iy$ ou x et y sont des réels.

1. Trouve une relation entre x et y pour que $z_1 \times z_2$ soit réel.
2. Trouve une relation entre x et y pour que $\frac{z_1}{z_2}$ soit imaginaire pur
3. Détermine x et y pour que $2\overline{z_1} + 3z_2 - z_1z_2 = 3 + 12i$

Exercice 9 :

1. Ecris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a. $z_1 = (2+i)(1+3i)$

b. $z_2 = (2-i)^5 + i^{301}$

c. $z_3 = \frac{z+i}{z-1}$ ou $z = x + yi$

2. Soit $z = 2x + 3 + i(3x + y)$ où x et y sont des réels.

a. Pour quelle(s) valeur(s), z est imaginaire pur ?

b. Existe-il des valeurs de x et y pour que :

○ z soit égal à $z' = 2 + (1-i)^4$?

○ z soit nul ?

Forme trigonométrique et exponentielle

Exercice 10 :

Détermine le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i; z_2 = -1 + i\sqrt{3}; z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; z_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; z_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; z_6 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_7 = 3 + i\sqrt{3}; z_8 = 2i; z_9 = -3; z_{10} = (-4 + 4i)^2; z_{11} = (-\sqrt{3} + 3i)^2;$$

$$z_{12} = (1-i)(\sqrt{3}+i); z_{13} = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}; z_{14} = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3; z_{15} = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$$

Exercice 11 :.....

Détermine le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \cos \alpha - i \sin \alpha; z_2 = -\cos \alpha - i \sin \alpha; z_3 = -\sin \alpha + i \cos \alpha; z_4 = -\sin \alpha - i \cos \alpha;$$

$$z_5 = \sin \alpha + i \cos \alpha; z_6 = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}; z_7 = \frac{1-\cos \beta + i \sin \beta}{1+\cos \beta - i \sin \beta} \text{ et } \beta \in [0; \pi[; z_8 = \left(\frac{1+itana}{1-itana}\right)^n;$$

$$z_9 = \frac{1}{1+itana} \text{ et } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]; z_{10} = 1 + itana \text{ et } \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; z_{11} = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta \text{ et } \theta \in]0; \pi];$$

$$z_{12} = 2\cos^2 \theta + i \sin 2\theta \text{ et } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

Exercice 12 :.....

Détermine la forme trigonométrique et exponentielle des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -i; z_2 = \sqrt{5}; z_3 = \frac{1-i}{2}; z_4 = 1 - i\sqrt{3}; z_5 = 1 + i; z_6 = -1 - i; z_7 = 1 + i\sqrt{3};$$

$$z_8 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{2023}; z_9 = (-\sqrt{3} + i)^5; z_{10} = \frac{(1+i\sqrt{3})^6}{(4+4i)^4}; z_{11} = (1+i)(-2-2i);$$

$$z_{12} = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}; z_{13} = (-1+i)^2(1+i)^2; z_{14} = (1+i)^4(\sqrt{3}+i)^3;$$

$$z_{15} = -4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right); z_{16} = -2e^{i\frac{\pi}{4}}; z_{17} = (1+i)e^{i\frac{\pi}{6}}; z_{18} = (1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}};$$

$$z_{19} = \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}}; z_{20} = (-1-i\sqrt{3})^3 e^{i\frac{3\pi}{4}}; z_{21} = 5\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right) e^{i\frac{-5\pi}{6}}; z_{22} = \frac{((1+i\sqrt{3}))(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{2(1-i)(\cos \alpha - i \sin \alpha)}$$

Exercice 13 :.....

α est un nombre réel élément de $]0, \pi[$. Détermine le module et un argument de $z_1 = 1 - e^{i\alpha}$ et $z_2 = 1 + e^{i\alpha}$.
En déduis le module et un argument de $z_1, z_2, \frac{z_1}{z_2}$ et $z_1 \times z_2$

Exercice 14 :.....

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -2 - 2i\sqrt{3}$

1. Détermine la forme trigonométrique et exponentielle de z_1 et z_2 .
2. Déduis-en la forme trigonométrique et exponentielle de :
 - a. $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$
 - b. $z_4 = \frac{z_1^2}{z_3^3}$
 - c. $z_5 = z_3 \cdot z_4$
 - d. $z_6 = z_2^3 \cdot z_1^5$

Exercice 15 :.....

I et II sont indépendants.

I/ Soient trois nombres complexes :

$$z_1 = -3 + i\sqrt{3}; z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}; z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$$

$$\text{On pose } z = \frac{z_1^3 \cdot z_3^4}{z_2^6}$$

1. Ecris les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.
2. Dédus-en une forme exponentielle du nombre complexe z .
3. Calcule alors la forme algébrique de z .

II/ On donne les nombres complexes $u = 2\sqrt{3} - 2i$; $v = -1 + i$ et $w = u.v$

1. a- Ecris u, v et w sous forme exponentielle.
b- Ecris w sous forme algébrique puis détermine les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$
2. Ecris u^{2023} et v^{2023} sous forme algébrique.

Exercice 16 :.....

Complète le tableau suivant :

Nombre complexe	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
Z_A			$-4e^{i\frac{\pi}{2}}$
Z_B		$4\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$	
Z_C	$2\sqrt{3} - 2i$		

Exercice 17 :.....

On considère un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe. Soit les points $A; B; C$ d'affixes respectives : $Z_A = -1 + i$; $Z_B = \frac{2[\cos(\frac{7\pi}{15}) + i\sin(\frac{7\pi}{15})]}{\cos(\frac{\pi}{15}) - i\sin(\frac{\pi}{15})}$ et $Z_C = 2 - 2i$.

1. Ecris les complexes Z_A ; Z_B et Z_C sous forme exponentielle.
2. On pose $a = \sqrt{3} - i$; $b = -\sqrt{3} - i$; $c = \frac{a^2}{b^3}$
3. Donne le module et un argument puis la forme trigonométrique et exponentielle de c .
4. Donne la forme trigonométrique de $t = ab$

Exercice 18 :.....

Dans le plan complexe a un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2 + 2i$; $z_B = -z_A$ et $z_C = \overline{z_B}$, ou $\overline{z_B}$ désigne le conjugué de z_B .

1. Ecris sous forme algébrique z_B et z_C .
2. Ecris sous forme trigonométrique les nombres z_A, z_B et z_C .
3. On pose $U = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_A}$
 - a. Ecris U sous forme algébrique
 - b. Détermine le module et un argument de U

Exercice 19 :.....

On pose : $A = \sqrt{2}(1 + i)$, $B = -5(1 + i\sqrt{3})$

1. Détermine le module et un argument de : A ; B ; $\overline{A}$; $\frac{B}{A}$
2. Soit Z un nombre complexe tel que : $AZ = B$
 - a. Ecris Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
 - b. Dédus-en les valeurs exactes de $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$
 - c. Calcule Z^{2008}

Exercice 20 :.....

On pose $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

- 1) Calcule z^2 puis détermine son module et son argument
- 2) En déduis de ce qui précède le module et un argument Z .

Exercice 21 :.....

On pose : $z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = 1 - i$

- 1) Ecris $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
- 2) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
- 3) a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$
b) Place les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Linéarisation

Exercice 22 :.....

Linéarise les expressions suivantes :

$\sin^4 x$; $\cos^4 x$; $\sin^6 x$; $\cos^6 x$; $\sin^2 x \cdot \cos x$; $\sin^3 x \cdot \cos^3 x$; $\sin x \cdot \cos^3 x$; $\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)$; $\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)$.

$\sin^5 x$; $\cos^5 x$; $\cos^3 2x$; $\sin^3 x + \cos^2 x$; $\sin 3x \cdot \cos^3 2x$; $\sin^4 x + \cos^4 x$

Exercice 23 :.....

Exprime en fonction de $\cos x$ et $\sin x$: $\sin 3x$; $\cos 3x$; $\cos 4x$; $\sin 4x$; $\sin 5x$; $\cos 5x$; $\cos 6x$; $\sin 6x$.

Les symétries

Exercice 24 :.....

On considère les points A d'affixe $3 + i$ et I d'affixe 1 .

1. On note B le symétrique de A par rapport au point O , détermine l'affixe de B .
2. On note C le symétrique de A par rapport au point I , détermine l'affixe de C .
3. On note D le symétrique de A par rapport à (OJ) , détermine l'affixe de D .
4. On note E le symétrique de A par rapport au point (OI) , détermine l'affixe de E .

Racines carrées

Exercice 25 :.....

Détermine les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de chacun des nombres complexes suivants :

$45 + 28i$; $-5 + 12i$; $8 - 6i$; $120 - 22i$; $-2i$; $8i$; $46 - 14\sqrt{3}i$; -3 ; $6 + 6i\sqrt{3}$; $-7 - 24i$; $1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$
Tapez une équation ici.

Résolution d'équations et systèmes

Exercice 26 :.....

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $2iz - 3 = z + i$; b) $\frac{z-1}{iz+3} = 4i$; c) $3z - 5 + 2iz = 2i - 3z + 4iz$; d) $(z + 4)(6 - 2i) = (3 + 2i)z$
 e) $(2 + 3i)z - (5 + 2i) = 3z + 4i$; f) $6 + 2i - 4iz = 3z + 2$; g) $2z - 3 + 4i = 5 + i$;
 h) $(4 - 2i)z^2 = (1 + 5i)z$

Exercice 27 :.....

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $iz - 3 = 2\bar{z}$; b) $2\bar{z} - 2iz = 2 - 3i$; c) $iz + 2\bar{z} = i - 1$;
 d) $z + (1 + 3i)\bar{z} = 5 + 3i$; e) $z - 2 + i + \frac{z + i - 1}{z} = 0$; f) $z^2 + \bar{z} + 1 = 0$;
 g) $iz - 2\bar{z} - i = 0$; h) $iz^2 - 2\bar{z} - i = 0$; i) $2z + \bar{z} = 2 + 3i$; j) $2z + 2\bar{z} = 2 + 3i$;
 k) $2z^2 + 3|z|^2 - 1 = 0$

Exercice 28 :.....

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $z^2 + z + 1 = 0$; $z^2 - 2z + 1 = 0$; $z + \frac{1}{z} + 1 = 0$; $z = \sqrt{2} - \frac{1}{z}$; $z + \frac{1}{z} = 1 + \sqrt{3}i$; $z^2 + 2i = 0$;
 $z^2 - (1 + i)z + 10i = 0$; $z^2 - 3z + 3 - i = 0$; $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$; $z^2 + 3(1 + 5i)z + 5i = 0$;
 $Z^2 - 4Z + 4 = 0$; $iz^2 - 2z - 4 - 4i = 0$; $-2Z^2 + Z + 1 = 0$; $z^2 - (5 + 3i)z + 4 + 7i = 0$; $z^2 + 2 = 0$;
 $z^2 - 4 = 0$; $z^2 = -3 + 4i$; $z^2 - 2z\cos\beta + 1 = 0$; $z^2 - 4z\sin\beta + 4 = 0$;
 $-iz^2 + (2 + 2i)z + (10 + 5i) = 0$; $2z^2 - 2(3 + 2i)z + 1 + 8i = 0$;
 $(-1 + 2i)z^2 + (-5 + i)z + 9i + 6 = 0$; $4z^2 - 4(1 + i)z - (45 + 26i) = 0$;
 $\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 - \left(\frac{z-3i}{z+2}\right) + 13 = 0$; $z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta$;

Exercice 29 :.....

1. Résous dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

- a. $|z| = |z - 2|$ et $\arg(z) = \arg(z + 3 + i)$
 b. $z + |z| = 1 + 2i$
 c. $(s_1): \begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ -2z_1 + 3iz_2 = -17 \end{cases}$
 d. $(s_2): \begin{cases} 3iz_1 + iz_2 = i + 7 \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases}$

2. Détermine les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 vérifiant les conditions suivantes :

- a. $\begin{cases} |z_2| = 2|z_1| \\ |z_3| = 2|z_2| \end{cases}$
 b. $\begin{cases} \arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{\pi}{2} \\ \arg(z_3) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{2} \\ 0 < \arg(z_1) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$
 c. $z_1 \times z_2 \times z_3 = 64i$

Exercice 30 :.....

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 8Z + 25 = 0$.
 b- Calcule $(1 + 2i)^4$
 c- Détermine les racines quatrièmes du nombre complexe $Z = -7 - 24i$.
 2. On considère le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$
 a. Ecris z sous forme exponentielle.
 b. Calcule z^2 ; z^3 . Déduis - en z^{1992} et z^{1994} .

- c. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 8 = 0$
d. Déduis-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(iz - 1)^3 + 8 = 0$

Exercice 31 :

Montre que chacune des équations ci-dessous admet une solution réelle et termine sa résolution.

- a. $z^3 + (-4 + i)z^2 + 3z + 8 - i = 0$
b. $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z + 1 - 2i = 0$
c. $8z^3 - 8(1 + i)z^2 + 6iz + 1 - i = 0$
d. $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i = 0$
e. $z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$ (admet 2 solutions réelles)

Exercice 32 :

Montre que chacune des équations ci-dessous admet une solution imaginaire pure et termine sa résolution.

- a. $z^3 - 2iz^2 + 4(1 + i)z + 16 + 16i = 0$
b. $z^3 + (1 - i)z^2 + (2 + 2i)z - 8i = 0$
c. $z^3 + (1 - 8i)z^2 - ((23 + 4i))z - 3 + 24i = 0$
d. $z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} = 0$
e. $z^3 - (2 + 3i)z^2 + 2(5 + 3i)z - 20 = 0$ (admet 2 solutions imaginaires pures).

Exercice 33 :

Vérifie que $P(\alpha) = 0$ et termine la résolution de l'équation $P(z)$

- a. $P(z) = z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i$ et $\alpha = -2 + i$.
b. $P(z) = z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i$ et $\alpha = 3 - 2i$.
c. $P(z) = 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4$ et $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.
d. $P(z) = 4z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$ et $\alpha = -1 - 2i$.
e. $P(z) = z^3 + (3 - \sqrt{3})z^2 + (6 - 2\sqrt{3})z + 4 - 4\sqrt{3}$ et $\alpha = \sqrt{3} - 1$.

Exercice 34 :

1. Développe le produit de facteurs suivant : $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$
2. Résous l'équation $z^4 = 1$
3. En déduis des questions 1) et 2) la résolution des équations suivantes :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \text{ puis } \left(\frac{3z+i}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{3z+i}{z-1}\right)^2 + \left(\frac{3z+i}{z-1}\right) + 1$$

Exercice 35 :

Soit f la fonction à variable complexe Z telle que :

$$f(Z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$$

- a. Prouve que si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes : $\overline{Z_0}$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.
b. Détermine $f(1 + i)$ et en exploitant ce qui précède, trouve toutes les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

Exercice 36 :

On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$

1. α désigne un nombre complexe quelconque. Prouve que $\overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha})$.

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

Déduis-en que si $P(\alpha) = 0$ alors $P(\bar{\alpha}) = 0$

2. calcule $P(1 - i)$, déduis-en les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 37 :

Soit le polynôme $P(z)$ définie par : $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$

- Vérifier que : $P(z) = z^2 \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - \left(z + \frac{1}{z} \right) (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right]$ avec $z \neq 0$
- En utilisant la question précédente, résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 38 :

Soit le polynôme : $P(z)$ définie par : $P(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 1$

- Détermine les nombres réels a et b tel que $\forall Z \in \mathbb{C}^*$ on a :

$$P(z) = z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right]$$

- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + az + b = 0$
- En déduis la résolution de l'équation $P(Z) = 0$

Exercice 39 :

On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe u tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

- Calcule les racines carrées de u .
- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 + 2iz + i\sqrt{2} = 0$ (On notera z_1 et z_2 les solutions de cette équation).
- Montre que : $\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right| = \sqrt{2}$

Exercice 40 :

Soit l'équation (E) définie par : $Z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42 = 0$

- Résous (E) sachant qu'elle admet une solution réelle
- Donne la forme exponentielle de chacune des solutions de (E)
- Montre que si $|z| = |z'| = 1$ alors le nombre $u = \frac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel

Exercice 41 :

Résous dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

$$a) \begin{cases} z_1 \times z_2 = 7 \\ z_1 + z_2 = 1 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} z_1 \times z_2 = 9 \\ z_1 + z_2 = 3 \end{cases}; \quad c) \begin{cases} (2 + 3i)z - 5z' = -1 \\ (1 - i)z + 2z' = 2(1 + i) \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} 5iz + (2 - i)z' = 1 + 12i \\ (2 - 3i)z + (5 - 2i)z' = 39 - 10i \end{cases}; \quad e) \begin{cases} z + iz' = 2(1 + i) \\ -iz + z' = 2(1 - i) \end{cases};$$

$$f) \begin{cases} ix - 3y = 2 - 3i \\ (1 + i)x + 2iy = 5 - i \end{cases}; \quad g) \begin{cases} 2z_1 \times z_2 = 3 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}; \quad h) \begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i \\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i \end{cases}$$

Exercice 42 :

Résous dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$a. \begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1 + i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases} \quad b. \begin{cases} x + y - 2z = 10 \\ x - y + 2iz = 20 \\ ix + 3iy - (1 + i)z = 30 \end{cases}; \quad c. \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

Racine $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe et d'unité

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

Exercice 43 :.....

Détermine dans $\mathbb{C}$

1. Les racines cubiques de : 1; 8; $8i$; $4\sqrt{3} - 4i$; $4\sqrt{2}(-1 + i)$; $-27i$ et $18 + 26i$.
2. Les racines quatrièmes de : 1; $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $8\sqrt{2}(1 - i)$; $1 + 4i\sqrt{5}$; $3 + 4i$ et $8(1 - i\sqrt{3})$.
3. Les racines cinquièmes 1 et i .
4. Les racines sixièmes de $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

Exercice 44 :.....

On donne le nombre complexe z tel que : $z = 2 + 3i$

- a. Vérifie que $z^4 = -119 - 120i$
- b. Détermine les racines quatrièmes de l'unité.
- c. En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^4 = -119 - 120i$

Exercice 45 :.....

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$, $z^3 = 1$
- 2) a. Développe $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$
 b. Soit l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$
 En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, détermine sous forme algébrique et trigonométrie les racines de l'équation (E)
 c. En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 46 :.....

Z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E) : $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$

- a. Vérifie que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E).
- b. Détermine sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduis dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

Détermination de l'ensemble de points

Exercice 47 :.....

Détermine puis construis :

1. l'ensemble (Γ) des points M d'affixes z tels que : $|z - i| = 2$
2. l'ensemble (λ) des points M d'affixes z tels que : $|z + 1 - 2i| = |z - 1 - i|$
3. L'ensemble (H) des points M d'affixes z tels que : $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 6$
4. L'ensemble (G) des points M d'affixes z tels que : $|iz - 1| = |-z + 2 - i|$
5. L'ensemble (R) des points M d'affixes z tels que : $|2iz + 2 + i| = 3$
6. l'ensemble (φ) des points M d'affixes z tels que : $\arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
7. L'ensemble (ω) des points M d'affixes z tels que : $\arg(3\bar{z} - 1 + i) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
8. L'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que : $\arg\left(\frac{z+2i}{z+1-3i}\right) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
9. L'ensemble (I) des points M d'affixes z tels que : $\arg(iz - 1 + 2i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
10. L'ensemble (S) des points M d'affixes z tels que : $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
11. L'ensemble (F) des points M d'affixes z tels que : $|\bar{z} + 1 + 2i| \leq 1$.

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

12. L'ensemble (O) des points M d'affixes z tels que : $1 \leq |z + 1| \leq 2$

Exercice 48 :.....

I. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o; \vec{i}; \vec{j})$

On désigne par M le point de affixe z et M' le point d'affixe Z tel que : $Z = \frac{z+1}{z-1}$

a. Trouve l'ensemble (D) des points M tels que Z soit un réel

b. Trouve l'ensemble (C) des points M tel que Z soit un imaginaire.

c. Trouve l'ensemble (M) des points M tels que M et M' soient alignés.

II. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de -1 et soit $z = \frac{2iz-i}{z+1}$

Détermine puis construis l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

a. $|z| = 1$

b. z est un imaginaire

c. z est un réel

III. A tout nombre complexe $z \neq -1 + 2i$, on considère le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$

IV. Détermine puis construis l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie les conditions indiquées :

a. $|z| = 1$

b. $|z| = 2$

c. z est un réel

d. z est un imaginaire

Figures géométries

Exercice 49 :.....

A. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : -2 ; $-3i$ et $2 - 6i$.

Démontre que ces trois points sont alignés.

B. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : $3 + i$; $2i$ et $2 - 2i$.

1. Place dans un plan complexe, les points A, B et C.

2. Démontre que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

3. Détermine l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme.

C. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : $-1 + i\sqrt{3}$; 2 et $-1 - i\sqrt{3}$.

1. Place dans un plan complexe, les points A, B et C.

2. Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

D. Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $2 + i$; $2 - i$; $5 - 2i$ et $5 + 2i$.

1. Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.

2. Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques

E. Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $-1 + 2i$; $4 + 3i$; $3i$ et $4 - 3i$.

1. Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.

2. Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

F. Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $2 - 2i$; $-1 + 7i$; $4 + 2i$ et $-4 - 2i$ et Ω le point d'affixe $-1 + 2i$.

1. Place dans un plan complexe, les points A, B, C, D et Ω .

2. Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle de centre Ω et le rayon.

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

- G. Soient A, B, C et D trois points d'affixes respectives : $-3 - i$; $-2 + 4i$; $3 - i$ et -2 .
Démontre que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires (vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux).
- H. Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $5 + i$; -2 ; $1 + i$ et $-4 - 2i$.
Démontre que les droites (AD) et (BC) sont parallèles (vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires).
- I. Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $1 + i$; $-2i$; $3 + i$ et $4 + 2i$.
1. Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2. Démontre que le quadrilatère ABCD est un losange.
- J. Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $3i$; $-2 + i$; $1 - 2i$ et 3 .
1. Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2. Démontre que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
- K. Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $-5 - i$; $-3 - 3i$; $-1 - i$ et $-3 + i$.
1. Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2. Démontre le quadrilatère ABCD est un carré.
- L. Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $2i$; 1 ; $3 + i$ et $4 + 4i$.
1. Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2. Démontre le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle.
- M. Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $1 - 3i$; -2 ; $-1 - i$ et $-2 + 2i$.
1. Place dans un plan complexe, les points A, B, C et D.
2. Démontre le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.
- N. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : $1 - 3i$; $4 + 5i$ et $-3 + 2i$.
1. Détermine l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Détermine l'affixe des points D et E vérifiant : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$.
3. Démontre que A, D et E sont alignés.

Exercice 50 :

On considère un repère orthonormé directe (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) du plan complexe. Soit les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i \quad ; \quad z_B = \frac{2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \quad \text{et} \quad z_C = 2 - 2i$$

- a. Ecris les complexes z_A ; z_B et z_C sous forme exponentielle.
b. Détermine l'affixe z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3}$ (on fera une figure).

Exercice 51 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé directe (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

On considère :

- Le point A d'affixe $z_A = 5 - i\sqrt{3}$.
 - Le point B d'affixe z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$.
 - Le point Q d'affixe z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment [OB].
 - Le point K d'affixe z_K est tel que ABQK soit un parallélogramme.
1. Détermine les affixes z_B ; z_Q et z_K respectivement des points B ; Q et K.
2. Démontre que $\frac{z_K - z_A}{z_K}$ est un imaginaire pur. En déduis la nature du triangle OKA ?
3. Place les points A ; B ; Q et K dans le plan.
4. Soit C la point d'affixe z_C tel que $z_C = \frac{2z_A}{3}$
- a. Calcule $\frac{z_K - z_B}{z_K - z_C}$. Que peut-on en déduire pour les points B ; C et K ?

b. Place le point C. (on fera une figure).

Exercice 52 :.....

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$; on donne les points :

$A(1 + 2i); B(3i); C(-1 - 4i); D(1 + 4i); F(-2i)$

1. Fais une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
2. Les points B ; C et D sont -ils alignés ? Justifie.
3. Quelle est la nature de chacun des triangles BAC et BAD ?
4. Montre que les points A ; B ; C et F sont cocycliques. Précise les caractéristiques du cercle auquel ils appartiennent.

Exercice 53 :.....

1. Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + 2iz - 4 = 0$.
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$; on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = -\sqrt{3} - i$ et $z_C = \sqrt{3} - i$.
 - a. Montre que les points B et C appartiennent au cercle (C) de centre O origine du repère et de rayon $r = 2$.
 - b. Trace (C) puis place les points A, B et C sur le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
3. On pose $w = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 - a. Montre que $w = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis en déduis-en la forme exponentielle de w.
 - b. Détermine la nature du triangle ABC.
4. Soit D un point du plan complexe d'affixe $z_D = -4i$.
 - a. Montre que ABCD est un parallélogramme.
 - b. Justifie que ABCD est un losange.(hors programme)

Exercice 54 :.....

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$z_A = 2 - 2i$; $z_B = -1$; $z_C = 4$ et $z_D = -4 - 2i$

1. Place ces points dans le repère.
2. On pose $Q_1 = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et $Q_2 = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}$
 - a. Calcule les nombres complexes Q_1 et Q_2 sous forme algébrique.
 - b. En déduis que les points A, B, C et D sont cocyclique
 - c. Soit Ω le point d'affixe $-1 + 2i$. Démontre que Ω est le centre du cercle passant par les points A, B, C et D.

Figures géométriques dans le plan.

Exercice 55 :.....

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

Détermine dans chaque cas, l'écriture complexe de la similitude directe donnée :

- a) f Transforme O en A et B en C.
- b) f Transforme A en C et B en D.
- c) f admet un centre A et transforme C en D.
- d) f laisse invariant le point C et transforme A en B.

Exercice 56 :.....

Soit (S) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe z' d'affixe M' tel que $z' = (1 + i)z + 1 - i$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (S) .

Exercice 57 :.....

Soit la similitude directe plane S de centre $A(1; 1)$; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par la similitude S ; le point M d'affixe z a pour transformé le point M' d'affixe z' .
Exprime z' en fonction de z .

Exercice 58 :.....

Soient A, B, C et D les points d'affixes $z_A = -1 - i$; $z_B = -i$; $z_C = 1 + 3i$; $z_D = 5 + i$.
Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D .

- a- Détermine le rapport K et l'angle θ de S
- b- Détermine l'écriture complexe f associée à S .
- c- Détermine l'affixe de Ω le centre de S

Exercice 59 :.....

Détermine la traduction complexe de la transformation $(\mathcal{T})$ dans chacun des cas suivants :

- a- $(\mathcal{T})$ est la translation qui transforme A d'affixe $3 - 2i$ en B d'affixe $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$
- b- $(\mathcal{T})$ est l'homothétie de rapport $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui transforme A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ en B d'affixe $-1 + i$.
- c- $(\mathcal{T})$ est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ qui transforme A d'affixe $1 + i$ en B d'affixe $-2 + 2i$

Exercice 60 :.....

Soit f la transformation définie par $z' = az + 3i$

- a- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f si : $a = 2$ puis si $a = -i$.
- b- Soient $A(1)$; $B(2 + i)$; $A'(2i)$; $B'(1 + i)$. Vérifier que $AB = A'B'$
- c. Démontre qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

Exercice 61 :.....

Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe (S) dont l'écriture complexe est :
 $z' = (1 + i)z + 1 - i$; $z' = (1 - i)z + i$; $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2i\sqrt{3}$; $z' = -iz + 2 + 6i$

Exercice 62 :.....

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-i$; $2i$ et $3 - i$.

- 1) Détermine l'affixe du point I , l'image du point B par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2 + 4i$
- 2) Détermine l'affixe du point D , l'image du point C par la translation du vecteur $\vec{AB}$.
- 3) Détermine l'affixe du point E , l'image du point D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- 4) Détermine l'affixe du point F , l'image du point E par l'homothétie de centre B et rapport 2 .
- 5) Détermine l'affixe du point G , l'image du point F par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 63 :.....

Pour chacune des similitudes directes et indirectes f , donne la nature et les éléments caractéristiques :

- 1) f d'écriture complexe $z' = -3z + 1 - i$;
- 2) f d'écriture complexe $z' = z + 1 - 2i$.
- 3) f d'écriture complexe $z' = e^{\frac{\pi}{4}}z + 1 + \sqrt{2} - i$
- 4) f d'écriture complexe $z' = iz + 1$
- 5) f d'écriture complexe $z' = (1 + i)z - 1 + i$
- 6) f d'écriture complexe $z' = e^{\frac{2\pi i}{3}}z$
- 7) f d'écriture complexe $z' = \bar{z} - 4i$
- 8) f d'écriture complexe $z' = -z - 2i$
- 9) f d'écriture complexe $z' = i\bar{z} + 1$
- 10) f d'écriture complexe $z' = (1 + i)\bar{z} + i$

Exercice 64 :.....

On donne les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A = 2i$; $z_B = 2 + i$ et $z_C = 1 - i$.

Soit S la similitude directe de centre C , d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

- 1) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 - i)z + 1 + i$
- 2) Soient D et E deux points du plan tels que $S(D) = A$ et $S(B) = E$.
Détermine les affixes des points D et E .

Exercice 65 :.....

Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$

- 1) Détermine l'écriture complexe de f .
- 2) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f .

Exercice 66 :.....

Détermine l'écriture complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

- 1) f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 - 3i$.
- 2) f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (avec $z_A = 3 + i$ et $z_B = 2i$).
- 3) f est la translation qui transforme A d'affixe $2 - i$ en B d'affixe $1 - 3i$.
- 4) f est l'homothétie de rapport $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui transforme A d'affixe $1 + \sqrt{3}i$ en B d'affixe $-1 + i$.
- 5) f est l'homothétie de centre A d'affixe $2 + 2i$ et de rapport -3 .
- 6) f est l'homothétie de centre O et de rapport 2 .
- 7) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ qui transforme A d'affixe $1 + i$ en B d'affixe $-2 + i$.
- 8) f est la rotation de centre C d'affixe $2 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
- 9) f est la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- 10) f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
- 11) f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A d'affixe $1 - i$ en B d'affixe $-i$.
- 12) f est la similitude directe plane de centre $A(1; -1)$ de rapport 3 et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.
- 13) f est la similitude directe plane de centre A d'affixe i , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- 14) f est la similitude directe plane de centre O , de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- 15) f est la similitude directe plane de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, transformant A en B . (avec $z_A = 3 + i$ et $z_B = 2i$).

Exercices de perfectionnement**Exercice 67 :**.....

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$, on considère le nombre complexe : $Z = \frac{z-4+3i}{z-3+2i}$ avec $z \neq 3 - 2i$ et on pose $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ ou x, y, X et Y sont des nombres réels.

1.
 - a. Exprime X et Y en fonction de x et y .
 - b. Détermine l'ensemble E des points M d'affixe z tel que Z soit un imaginaire pur ($i\mathbb{R}^*$).
 - a. Justifie que $Z \in \mathbb{R}$, alors $Z = \frac{x-4}{x-3}$
 - b. Démontre que si $|Z - 1| = 1$, alors l'ensemble des points M d'affixe z est le cercle de centre $\Omega(3; -2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
2. Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives $i, -2+i$. Détermine :
 - a. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|\bar{z} + 1| = |z + 2 + i|$
 - b. L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|(1 + i)z - 5i| = \sqrt{10}$.
3. Détermine puis construis l'ensemble (E) des points M du plan tel que :

Exercice 68 :

Le plan est rapporté dans un repère orthonormé direct $(o; i; j)$

1. On les points $A; B$ et C d'affixes respectives :

$$Z_A = 2; Z_B = 4 + 2i; Z_C = -2 + 4i$$
 - a. Calcule le rapport : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ et en déduis la nature du triangle ABC .
 - b. Montre que le point d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$.
 - c. Détermine (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe Z vérifiant l'équation suivante : $|Z - 4 - 2i| = |Z + 2 - 4i|$
2. Soit S la similitude du plan qui transforme A en A' et B en C .
 - a- Détermine le rapport K et l'angle θ de la similitude S .
 - b- Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S .
 - c- En déduis le centre de la similitude S .

Exercice 69 :

On considère l'équation d'inconnue complexe z , (E) :

$$p(z) = z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0.$$

1. Montre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
2. Montre que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
3. Achève la résolution dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation (E) .
4. En désignant par z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la 4^{ème} solution de (E) , montre que z_0, z_1, z_2 et z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
5. Donne le module et un argument de chacun des solutions de (E) .

Exercice 70 :

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par : $f(z) = az^3 + bz^2 + cz$ où a, b et c appartiennent à $\mathbb{C}$.

- 1- Détermine a, b et c sachant que : $f(1) = -3 + 4i; f(i) = -4 - 3i$ et $f(-i) = 10 + 5i$

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

2- a, b et c ayant les valeurs trouvées à la question précédente, résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 71 :.....

Soit f l'application de $E = \mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z, f(z) = \frac{iz}{z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. on note M le point d'affixe z .

- 1) Détermine les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 et telle que $f(z_0) = 1 + 2i$
- 2) Soit z un élément de E . on note r le module de $z + i$ et α une mesure de son argument. Exprime la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α .
- 3) Soit A le point d'affixe $-i$
 - a) Détermine l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$
 - b) Montre que B appartient à (Γ) .

Exercice 72 :.....

Partie A :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (2 + 6i)z - 16 + 12i = 0$
- 2) Soit $P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 - (12 - 24i)z + 32 - 24i$
 - a) Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle notée z_0 que l'on déterminera.
 - b) Détermine a, b et c trois nombres complexes tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$
 - c) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$

Partie B:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, i, j)

On donne les points $A(2)$, $B(4 + 2i)$ et $C(-2 + 4i)$.

- 1)
 - a- Place les points A, B et C dans le repère (O, i, j)
 - b- Calcule le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduis la nature du triangle ABC
 - c- Montre que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$.
 - d- Détermine (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant :
 $|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$
- 2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A)=A$ et $S(B)=C$.
 - a- Détermine le centre, le rapport k et l'angle θ de la similitude S
 - b- Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S .

Exercice 73 :.....

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Déterminez l'ensemble des points $M(z)$ du plan P tels que : $(1 - i)z + 2i = 2$.
2. Etudiez la transformation de P qui au point M d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe : $z' = (1 - i)z + 2i$.
3. En utilisant la transformation précédente, retrouvez le résultat du 1.

Exercice 74 :.....

- I. On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :
 $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$.
 - a) Détermine le réel y tel que iy soit solution de (E)
 - b) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe Z :
 $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$.

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : z^2 + z\sqrt{3} + 1 = 0$.

d) En déduis les solutions de (E) .

II. On considère le point A d'affixe $z_A = i$, le point d'affixe $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et le point C symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

a) Place ces points sur un graphique.

b) Détermine le module et un argument du quotient : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

c) En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et la nature du triangle ABC .

Exercice 75 :.....

Soit $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Détermine les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$.

2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = -i\sqrt{3}$; $z_C = 3 - 2i\sqrt{3}$ et $\overline{z_C} = z_D$

a. Place les points A, B, C et D .

b. Quelle est la nature de triangle ACD ?

c. Montre que les points A, B, C et D appartiennent à même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. Donne une équation de (C)

4. On note E le symétrique de C par rapport à O . Précise l'affixe de E et détermine la nature du triangle BED .

Exercice 76 :.....

1) Soient les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$.

2) Détermine le module et un argument des complexes : z_1, z_2 et z_3 . En déduis que les points M_1 ; M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 appartiennent à un même cercle que l'on déterminera. Fais la représentation graphique.

3) On pose $z_4 = -2z_1 \left(\frac{z_2}{z_3}\right)^2$. Mets z_4 sous la forme algébrique

4) Détermine les racines carrées de z_4 .

5) On pose $z_5 = -4z_1 \cdot z_3$. Détermine les racines quatrièmes de z_5 . Fais la représentation graphique.

6) a) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b) Ecris chacune des solutions sous forme exponentielle.

Exercice 77 :.....

1) Complète le tableau suivant :

Nombre complexe	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
z_A			$4e^{i\frac{\pi}{2}}$
z_B		$4\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$	
z_C	$2\sqrt{3} - 2i$		

2) Place les points A, B et C d'affixes respectives les complexes z_A, z_B et z_C dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

3) Calcule les affixes Z et Z' des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sous forme algébrique puis exponentielle.

4) Montre que $Z' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}Z$

Exercice 78 :.....

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On pose : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - (4 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 7i + 4$.

- 1) Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on donnera.
- 2) Trouve les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.
- 3) a- Résous l'équation : $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 - (4 + 2i)z + 7 + 4i$.
b- En déduis la résolution de l'équation $P(z) = 0$
- 4) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $2 - i$ et $2 + 3i$.
a- Place les points A, B et C dans le plan complexe.
b- Calcule : AB, AC et BC . En déduis la nature du triangle ABC .

Exercice 79 :

Soit P le polynôme complexe défini par : $P(z) = z^3 + (-5 - i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 4i$.

- 1) Justifie que : $P(z) = (z - 2i)(z^2 + (-5 + i)z + 8 - 4i)$.
- 2) a- Détermine les racines carrées du nombre complexe : $-8 + 6i$
c- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (-5 + i)z + 8 - 4i$
d- En déduis les solutions dans de l'équation : $P(z) = 0$.
- 3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2i, z_B = -3 + i$ et $z_C = -2 - 2i$
a- Place les points A, B et C .
b- Ecris sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$
c- En déduis la nature du triangle ABC .

Exercice 80 :

- 1) Résous dans l'ensemble des nombres des complexes les équations suivantes :

a- $z^2 - (1 + \sqrt{3})z + \sqrt{2} = 0$; b- $z + \frac{1}{z} = 1$ et c- $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$

- 2) Soit P le polynôme de la variable complexe Z tel que :

$$P(Z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$$

- a- Vérifie que pour tout z non nul on a :

$$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$$

- b- En utilisant ce qui précède, résous l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 81 :

- 1) On considère l'équation $(E) : z \in \mathbb{C}, z^3 + (-1 - i)z^2 + 2(1 + 3i)z + 8 = 0$.
a- Montre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- 2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm. On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $2i, 2 - 2i$ et $-1 + i$.
a- Place les points A, B et C dans le plan complexe.
b- Détermine l'affixe du point D pour que $ADBC$ soit un parallélogramme. Place le point D .
- 3) On pose $Z = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$
a- Ecris Z sous forme algébrique. En déduis la nature du triangle
b- Détermine l'affixe z_E du point E milieu du $[AB]$, Place le point E .

Exercice 82 :

On considère, dans $\mathbb{C}$ le polynôme suivant : $P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(-11 + 6i)z - 3(12 + 4i)$

- 1) Démontre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle notée z_1 que l'on déterminera.
- 2) Détermine le polynôme $q(z)$ tel que : $P(z) = (z - z_1)q(z)$.
- 3) Démontre que l'équation $q(z)$ admet une solution imaginaire pure notée z_2 que l'on déterminera.
- 4) Résous, dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- 5) On note z_3 la troisième solution de l'équation $P(z) = 0$.
Démontre que les points A , B et C du plan complexe d'affixes respectives et sont alignés.

Exercice 83 :

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} = 0$.

- 1) Détermine le réel y tel que iy soit une solution de (E)
- 2) Détermine les réels et tels que, pour tout nombre complexe on ait :

$$z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} = (z - iy)(z^2 + az + b)$$
- 3) Achève la résolution de (E) puis écris chacune des solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 84 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes associés au plan affine rapporté au repère orthonormé

$(O; \vec{u}; \vec{v})$. On donne les complexes z_1 et z_2 définis par : $z_1 = \frac{i-13}{-12+14i}$ et $z_2 = \frac{2i+1}{1-3i}$.

- 1) Ecris z_1 et z_2 sous forme algébrique, puis détermine le module et un argument de chacun d'eux.
- 2) On désigne par A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2 , détermine le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ et en déduis la nature du triangle AOB.

Exercice 85 :

On considère l'équation : (E) : $z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0$.

- 1) Démontre que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 .
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
- 3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = 2i$ et $z_C = 6 - 2i$.
 - a) Place les points A , B et C dans le plan complexe.
 - b) Montre que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Que peut-on en déduire ?
 - c) Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ transformant A en B .
Donne l'écriture complexe de S et précise son centre Ω .

Exercice 86 :

On considère le polynôme $(z) = z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z + 20$, où z est un nombre complexe.

- 1) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + az + b)$.
- 2) Résous dans l'équation () 3) Place dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les images A , B , C et D des nombres complexes respectifs :
 $z_A = -2 + 4i$, $z_B = -2 - 4i$, $z_C = 2 + 3i$ et $z_D = 2 - 3i$. Fais une figure.
- 3) Soit S la similitude directe qui transforme A en A et C en B .
 - a) Détermine l'écriture complexe de S .
 - b) Détermine les éléments caractéristiques de S .
 - c) Détermine l'image du point B par S .

Exercice 87 :

- 1)
 - a- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - (1 - i)z^2 + z - 1 + i = 0$ sachant qu'elle admet des solutions imaginaires pures.
 - b- Dans le plan complexe (P) , les solutions z_1 ; z_2 ; z_3 de l'équation proposée ont pour images respectives les points A ; B et C . Place ces points dans (P) .

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

- c- Détermine le nombre complexe Z_4 dont l'image est le point D, quatrième sommet du parallélogramme ADCB.
- 2) Ecris la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes z_1 ; z_2 et z_3 .
- 3)
- a- Calcule $(2 + i)^2$
- b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iz^2 - iz - 1 + i = 0$.

Exercice 88 :

I// Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (2 + 6i)z - 16 + 12i = 0$
- 2) Soit $P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 - (12 - 24i)z + 32 - 24i$
- a- Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle notée z_0 que l'on déterminera.
- b- Factorise $P(z)$ puis résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

II// Le plan est rapporté dans un repère orthonormé direct $(o ; i ; j)$

On les points A ; B et C d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_B = 4 + 2i$; $z_C = -2 + 4i$

- 1)
- a) Calcule le rapport : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduis la nature du triangle ABC.
- b) Montre que le point d'affixe $2i$ est le milieu du segment [AC].
- c) Détermine (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe Z vérifiant l'équation suivante : $|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$
- 2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.
- a) Détermine le rapport K et l'angle θ de la similitude S .
- b) Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S .
- c) En déduis le centre de la similitude S .

Exercice 89 :

I. On pose $a = \sqrt{3} - i$; $b = -\sqrt{3} - i$; $c = \frac{a^2}{b^3}$

- 1) Donne le module et un argument de c .
- 2) Donne la forme trigonométrique de $t = ab$

II. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère le polynôme d'inconnue z : $P(z) = z^3 - 4iz^2 - 6z + 4i$

- 1) Calcule $P(2i)$
- 2) Détermine les complexes a et b tels que pour tout complexe Z on ait :

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$$

3) a- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On désigne par z_1 la solution imaginaire pure et par z_2 et z_3 les deux autres solutions.

b- Compare z_1 et $z_2 + z_3$

Exercice 90 :

- 1) Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. Détermine le module et un argument de chaque solution.

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

- 2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; i ; j)$. On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}} z$.
- a) Détermine la nature de la transformation T et donne tous ses éléments caractéristiques.
- b) Soit A le point d'affixe $z_A = -\sqrt{3} + i$. Détermine les affixes z_B et z_C respectives des points B et C tels que $B = T(A)$ et $C = T(B)$. Construis les points A , B et C dans le plan muni du repère $(O ; i ; j)$.
- 3) Calcule $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ puis en déduis la nature du triangle ABC .

Exercice 91 :.....

On considère la fonction de la variable complexe définie par :

- Vérifie que $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.
- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
- Ecris les solutions l'équation $f(z) = 0$ sous forme trigonométrique.

II. Détermine la nature des transformations suivantes dans le plan complexe et détermine leurs éléments caractéristiques :

- $z' = z + 1 - 2i$
- $z' = iz + 1$
- $z' = 3z - 1 + i$
- $z' = (1 + i)z - 1 + i$

Exercice 92 :.....

- Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.
 - Calcule $P(-1)$.
 - Détermine les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe Z , on ait : $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$.
 - Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.
- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Unité graphique 2cm. On désigne par A , B , C et G les points du plan d'affixes respectives : $Z_A = 1$, $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$, $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$, $Z_G = 3$
 - Réalise une figure et place les points A , B , C et G .
 - Calcule les distances AB , BC , AC . En déduis la nature du triangle ABC .
 - Calcule un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. En déduis la nature du triangle GAC .

Exercice 93 :.....

- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 + 1 = 0$
- On pose $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
Soit A , B , C , D , E , F les points d'affixes respectives : 2α ; $4\alpha^3$; $4\alpha^5$; $\frac{1}{\alpha}$; $\frac{1}{\alpha^3}$; $\frac{2}{\alpha^5}$
Représente ces six points dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 94 :.....

On donne le système suivant : $\begin{cases} (1 + i)\alpha = 1 + 3i \\ i\alpha^2 = -4 + 3i \end{cases}$

- Détermine le nombre complexe α .
- Pour tout nombre complexe z , on pose : $f(z) = z^2 - (1 + 3i)z + (-4 + 3i)$

- a- Montre que $f(z)$ s'écrit sous la forme : $f(z) = (z - \alpha)(z - i\alpha)$
 b- En déduis les solutions sous forme algébrique de l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 95 :.....

Soient a et $b \in \mathbb{Z}$. On pose que a et b sont la somme de deux carrées. Il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $a = x^2 + y^2$ et il existe $z, t \in \mathbb{Z}$ tels que $b = z^2 + t^2$.

Démontre que le produit ab est encore la somme de deux carrées.

(Indication : Ecrire $(x^2 + y^2) = |x + iy|^2$ etc....)

Exercice 96 :.....

- A- Dans le plan P muni de son repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère l'équation à variable complexe notée et déterminée par : (E) :

$$z^3 + (1 - i)z^2 - 2(11 + i)z - 48i = 0$$

- 1) Prouve que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on notera z_0 .
 a- Achève la résolution de l'équation (E). On notera z_1 et z_2 les autres solutions trouvées telles que $|z_1| < |z_2|$
 b- Donne les écritures exponentielles de z_1 et de z_2 .
- 2) On considère G et F , les points du plan d'affixes respectives z_1 et de z_2 . Donne l'expression exponentielle du complexe $\frac{z_1}{z_2}$. Déduis que le triangle OGF est rectangle en O.

B- Dans le plan P muni de son repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère le polynôme complexe noté et déterminé par : $P(z) = z^3 - (4 - i)z^2 + (5 - 4i)z + 5i$

- 1) Prouve que l'affixe du point $Q(0; -1)$ est une solution de l'équation $P(Z) = 0$
- 2) a- achève la résolution de l'équation $P(Z) = 0$
 b- En notant R et S les points du plan dont les affixes sont les autres solutions de a-), place Q, R et S dans le repère et prouve que ces points forment un triangle isocèle.

Exercice 97 :.....

On considère l'ensemble des complexes Z_n tels que : $\forall n \in \mathbb{C}$ on a : $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$

On note M_n le point d'affixe Z_n dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- a. Calcule $z_1; z_2; z_3$ et z_4 et Place les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 .
- b. Calcule le quotient : $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$
- c. Quelle est la nature du triangle $OM_n M_{n+1}$?

Exercice 98 :.....

Le plan est rapporté à un repère ortho normal directe $(O; I; J)$. On considère l'application F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = u^2 z + u - 1$ où u désigne un nombre complexe.

- 1) Détermine l'ensemble des nombres complexes u pour les quels F est une translation.
- 2) a- Détermine l'ensemble des nombres complexes u pour les quels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$
 c- Caractérise F pour chacune des valeurs trouvées

Exercice 99 :.....

Soit f l'application de $E = \mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z, f(z) = \frac{iz}{z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe z .

- 1) Détermine les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 et telle que $f(z_0) = 1 + 2i$

2) Soit z un élément de E . on note r le module de $z + i$ et α une mesure de son argument.
Exprime la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α .

3) Soit A le point d'affixe $-i$

a) Détermine l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$

b) Montre que B appartient à (Γ) .

Exercice 100 :.....

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère les points A d'affixe $z_A = 1$; M d'affixe z et N d'affixe $z_N = iz - (1 + i)$.

On note T_λ l'application qui à tout point d'affixe Z , associe le point M' , barycentre des points pondérés $(M ; \lambda) ; (N ; -\lambda)$ et $(A ; 1)$ où λ est un nombre réel non nul.

1) Démontre que pour tout M du plan, le point N est l'image de M par une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

2) a- Démontre que l'affixe z' du point M' est telle que $z' = \lambda(1 - i)z + \lambda(1 + i) + 1$.

b- Démontre que T_λ est une similitude directe dont on précisera l'affixe du centre Ω ; le rapport et l'angle. Pour quelle valeur de λ , T_λ est-elle une rotation ? Donne dans chacun de ces cas l'angle et l'affixe de son centre.

c- Exprime les coordonnées $(x' ; y')$ du point M' en fonction de celles $(x ; y)$ de M .

Exercice 101 :.....

1) On note g l'application affine du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tels que $z = [\lambda - (\lambda^2 - 1)i]z' - 2i$ ou $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Quelle est la nature de g pour $\lambda = 1$? Précise alors son élément caractéristique.

b) Pour quelle valeur de λ , g est-elle une homothétie ? Donne ses éléments caractéristiques.

c) Existe-t-il de valeur de λ pour que g soit une rotation ? Si oui précise ses éléments caractéristiques.

2) a) Détermine les éléments caractéristiques de la similitude indirecte S qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tels que : $z' = (1 - i)\bar{z} + 1 + i$.

b) Soient les points $A(2 ; -2)$; $B(-1 ; 1)$ et $C(0 ; -1)$. Détermine l'expression complexe de la similitude indirecte S telle que $S(A) = C$; $S(B) = A$.

c) Soient les points $P(1 ; -1)$ et $Q(-2 ; 1)$. Détermine l'expression complexe de la similitude directe s de centre $\omega(-1 ; -1)$ telle que $S(Q) = P$.

d) Détermine l'expression complexe de la similitude directe s de centre $\omega(-1 ; -1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

Exercice 102 :.....

Dans le plan complexe P rapporté au repère ortho normal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, unité graphique 2cm, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$.

Soit la fonction f de P privé du point A dans P qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i \left(\frac{z-3i}{z+1} \right) (1)$

1) Soit C le point d'affixe $z_C = 2 - i$. Montrer qu'il existe un seul point D tel que $f(D) = C$.

2) Déterminer la nature du triangle ABC .

3) A l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et B :

$$OM' = \frac{BM}{AM} \text{ et } (\vec{i}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$$

4) En déduis et construire les ensembles de points suivants :

a) l'ensemble (E) des points M tels que l'image M' soit situé sur le cercle (Γ) de centre O de rayon 1.

b) l'ensemble (F) des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.

Exercice 103 :.....

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ d'unité 2cm.

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

Soit $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, et f_α l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe Z , associe le point M' d'affixe Z' telle que : $z' = (1 + i \tan \alpha)z - i \tan \alpha$

- 1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f_α .
- 2) Soit Ω le point d'affixe 1 et M un point du plan distinct de Ω . Montre que si $\alpha \neq 0$, alors $MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M . Pour quelle valeur de α , ce triangle est-il isocèle ?
- 3) On pose dans cette partie $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et on note A, B, C et D les points d'affixes respectives : i ; $2i$; -1 et $-1 + i$.
 - a) Place les points A, B, C, D dans le plan.
 - b) Démontre que $ABDC$ est un parallélogramme dont on précisera l'aire en cm^2 .
 - c) Donne l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{4}}$.
 - d) En déduis les coordonnées des points A', B', C' et D' , images respectives par $f_{\frac{\pi}{4}}$ des points A, B, C et D .
 - e) Place ces images dans le plan et montre que $A'B'D'C'$ un parallélogramme dont on précisera l'aire en cm^2 .

Exercice 104 :

Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, (unité graphique : 1cm.)

On donne les points A et B d'affixes respectives 12 et $9i$. On note f la similitude directe dont l'écriture complexe est : $z' = \frac{3}{4}iz + 9i$

- 1) Détermine le centre Ω , l'angle et le rapport de f .
- 2) Quelles sont les images par f des points A et O ? Montrez que Ω est un point commun aux cercles C_1 et C_2 de diamètres respectif $[OA]$ et $[OB]$. Etablissez que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB et montrez que $\Omega A \cdot \Omega B = \Omega O^2$.
- 3) Faites une figure comportant les points A, B, Ω ainsi que les cercles C_1 et C_2 .

Exercice 105 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ l'unité de longueur est le centimètre.

Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre de son cercle circonscrit. On désigne par M le milieu de $[BC]$, N celui de $[AB]$. Les affixes respectives des points M, N et P sont notées m ; n et p .

- 1) Dans cette question, $m = -1 - 3i$; $n = 2$.
Construisez les triangles MNP et ABC .

- 2) Soit f la transformation du plan qui à chaque point M d'affixe $Z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $Z' = x' + iy'$ telle que : $z' = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(-z + m + n + p)$
Quelle est la nature de f ? Donnez ses éléments caractéristiques.

- 3) Soit a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C .
 - a. Montrez que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$ puis Déduisez que $a = n + p - m$
 - b. Exprimez b et c en fonction de m, n et p .
- 4) On pose : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.
On désigne par a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C' .
 - a) Démontrez que : $a' = (1 + i)m$, $b' = (1 + i)n$, $c' = (1 + i)p$.
 - b) Déduisez-en que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux et que A appartient à la droite (BC) .
 - c) Montrez de même que B' appartient à la droite (AC) et que C' appartient à la droite (AB) .
- 5) Complétez la figure réalisée au 1, par les points A', B', C'

Exercice 106 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points :

A d'affixe -4 ; B d'affixe 4 ; E d'affixe $4i$; C et D tels que les quadrilatères $AOEC$ et $BOEC$ soient des carrés.

- 1) Placez les points précédents dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et donnez les affixes des points C et D.
 - 2) Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $Z' = (1+i)Z + 4 + 4i$.
- a) Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f .
 - b) Précisez les points $f(A)$ et $f(O)$.
 - c) Déterminez l'image par f de la droite (CA) , et celle de la médiatrice du segment $[AO]$
 - d) Exprimez, pour tout point M d'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de Z . Déduisez-en que $MM' = MC$ et, pour M distinct de C , montrez qu'une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{MM'}; \overrightarrow{MC})$ est $\frac{\pi}{2}$.
- 3) Soit J le milieu du segment $[EB]$ et I le milieu de $[AO]$. Déterminez l'image de J par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 107 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On note A le point d'affixe 2. Soit φ l'application de P vers P qui à tout point M d'affixe Z associe le point :

$$M' = \varphi(M) \text{ d'affixe } z' \text{ définie par : } z' = \frac{3+\sqrt{3}i}{4}z + \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

- 1) Déterminez :
 - a) L'affixe de l'image $\varphi(A)$ du point A .
 - b) L'affixe du point P tel que $\varphi(P) = 0$.
- 2) Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de φ .
- 3) Lorsque le point M est distinct du point A :
 - a) Démontrez que le triangle AMM' , $M' = \varphi(M)$, est rectangle en M' .
 - b) Le point M et le milieu du segment $[AM]$ étant donnés, déduisez-en une construction au compas du point M' .

Exercice 108 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $1 - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Pour chaque point M du plan, d'affixe Z , M_1 d'affixe Z_1 désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis M' d'affixe Z' l'image de M_1 par la translation de vecteur $-\vec{u}$.

- 1) Enfin on note T la transformation qui à chaque point M associe le point M' .
 - a) Démontrez que $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z - 1$
 - b) Déterminez l'image du point B par T .
 - c) Montrez que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.
- 2) On pose $Z = x + iy$, avec x et y des réels.
 - a) Pour Z non nul, calculez la partie réelle du quotient $\frac{Z'}{Z}$ en fonction de x et de y .
 - b) Démontrez que l'ensemble (E) des points M du plan tels que le triangle OMM' soit rectangle en O , est un cercle (C) , dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points.
 - c) Tracez (E) .
- 3) Dans cette question on pose $Z = 1 + i$.
 - a) Vérifiez que M appartient à (E) . Placez M et M' sur la figure.
 - b) Calculez le module de Z' .
 - c) Calculez l'aire, en cm^2 , du triangle OMM' .

Exercice 109 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit I le point d'affixe 1. On note C le cercle de diamètre $[OI]$ et on nomme son centre Ω .

Partie I

On pose : $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.

- 1) Montre que le point A_0 appartient au cercle C .
- 2) Soit B le point d'affixe b , avec $b = -1 + 2i$, et B' le point d'affixe b' telle que $b' = a_0 b$.
 - a) Calcule b' .
 - b) Démontre que le triangle OBB' est rectangle en B' .

Partie II

Soit a un complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.

A tout point M d'affixe Z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $Z' = aZ$.

- 1) On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M' .
 - a) Interprète géométriquement $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$
 - b) Montre que $(\overrightarrow{M'O}; \overrightarrow{M'M}) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{R}$).
 - c) En déduis que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle C privé de O et de I .
- 2) Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O . On note x son affixe
- 3) On choisit a de manière à ce que A soit un point de C différent de I et de O .
 - a) Montre que le point M' appartient à la droite (OA) .
 - b) En déduis que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

Arithmétiques

Raisonnement par récurrence.

Exercice 1 :

Démontre par récurrence les propositions suivantes :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 2^n > 5(n + 1)$.
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 2^n > n$.
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- 4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- 5) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n-2) = (n+1)(n+2) \dots \times 2n$
- 6) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$
- 7) $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est divisible par } 7.$
- 8) $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } 3^{n+3} - 4^{4n+2} \text{ est divisible par } 11.$
- 9) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } n^3 - n \text{ est un multiple de } 3.$
- 10) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } n^7 - n \text{ est un multiple de } 7.$
- 11) Le nombre 2798793 est-il divisible par : 2 ; 3 ; 11 ?
- 12) $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1) \times 2^n + 1$
- 13) $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Divisions Euclidienne dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{N}$.

Exercice 2 :

- 1) La division de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r . Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?
- 2) Détermine les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.
- 3) Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b . Sachant que $a + b + c = 3025$ et $q = 50$. Rétablis la division.
- 4) Trouve les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240. Calcule l'entier naturel n tel que $n^2 - 240$ est un carré parfait.

Exercice 3 :

Résous dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| a) $x^3 - y^3 = 469$ | e) $x^2 - y^2 = 35$ |
| b) $x^3 - y^3 = 631$ | f) $4x^2 - y^2 = 20$ |
| c) $x^2 - y^2 = 13$ | g) $x^2(y-1) = 3$ |
| d) $x^2 - y^2 = 28$ | h) $2x^3 + xy - 11 = 0$ |
| e) $9y^2 - (x+1)^2 = 32$ | |

Exercice 4 :

α et β et sont deux entiers naturels et $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N .

- 1) Prouve que $(\alpha-1)(\beta-1) = 3$
- 2) En déduis les valeurs de N .

Exercice 5 :

- 1) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n^2+3n+1}{n-1}$ est-il un entier relatif ?
- 2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier relatif ?
- 3) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n-1}{n+17}$ est-il un entier relatif ?
- 4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , le nombre $\frac{n-1}{n+16}$ est-il un entier naturel ?
- 5) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , le nombre $\frac{2n+18}{n+3}$ est-il un entier naturel ?

Congruences

Exercice 6 :

Résous dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

- a) $2x \equiv 3[7]$ a) $4x \equiv 5[9]$ i) $424 + 161x \equiv 0[16]$ l) $2x \equiv 6[8]$
- b) $9x \equiv 4[11]$ f) $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$ j) $34x \equiv 2[15]$ m) $14x \equiv 3[4]$
- c) $5x \equiv 2[7]$ g) $15x \equiv 9[12]$ k) $3x \equiv 7[9]$ n) $11x \equiv 79[8]$
- d) $x^2 \equiv -1[5]$ h) $2x + 1 \equiv 5[9]$ l) $4x \equiv 2[5]$ o) $15x \equiv 25[35]$

Exercice 7 :.....

Démontre par congruence les propositions suivantes :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $3^{n+3} - 4^{n+2}$ est divisible par 11.
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $n^3 - n$ est un multiple de 3.
- 4) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $n^7 - n$ est un multiple de 7.
- 5) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $5^{2n} - 3^n$ est divisible par 11.
- 6) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $8^{2002} + 2$ est divisible par 11.
- 7) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111.
- 8) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $n(n^4 - 1)$ est un multiple de 5..
- 9) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.
- 10) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Exercice 8 :.....

A) Résous dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

- a) $\begin{cases} x \equiv 7[8] \\ x \equiv 11[12] \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases}$; c) $\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$; d) $\begin{cases} 15x \equiv 9[12] \\ 4x \equiv 5[7] \end{cases}$; e) $\begin{cases} x \equiv 3[11] \\ x \equiv 4[15] \end{cases}$;
- f) $\begin{cases} x \equiv 0[6] \\ x \equiv 3[4] \end{cases}$; g) $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$; h) $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases}$; i) $\begin{cases} x \equiv 1[6] \\ x \equiv 5[9] \end{cases}$; j) $\begin{cases} 7x \equiv 5[19] \\ 3x \equiv 1[11] \end{cases}$;
- k) $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 7x \equiv 9[11] \end{cases}$; l) $\begin{cases} x \equiv -1[34] \\ x \equiv 1[15] \end{cases}$

B) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

$$\begin{cases} 7x + 5y \equiv 2[8] \\ 5x + 4y \equiv 16[8] \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 7x + 5y \equiv 2[9] \\ 5x + 4y \equiv 16[9] \end{cases}$$

Reste de la division

Exercice 9 :.....

1) Détermine dans chacun des cas suivants, le quotient et le reste la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

- a) $a = 3453$ et $b = 13$ b) $a = -1454$ et $b = 22$
c) $a = 11111$ et $b = 333$ d) $a = -994567$ et $b = 3432$
e) $a = 15141$ et $b = 143$ f) $a = -396562$ et $b = 4478$

2) Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de :

- a) 11^n par 7 b) 4^n par 7 c) 5^n par 11
d) 3^n par 11 e) 3^n par 7 f) $851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ par 7

3) Détermine le reste de la division euclidienne de :

- a) 200^{539} par 17 b) 2^{437} par 7
c) $7^{2002} + 2$ par 9 d) 11^{1999} par 7

e) 2^{456} par 5

f) 32064512 par 9

g) $\overline{2103211}^4$ par 7

h) 999888777666555444333222111 par 7

Exercice 10 :.....Soient a et b deux entiers relatif vérifiant $a \equiv 4[5]$ et $b \equiv 3[5]$.Détermine le reste de la division euclidienne de $7a^2 - 4b^2 + 2ab$ par 5.**Exercice 11 :**.....

- 1) La somme de 2 entiers naturels a et b avec ($a > b$), est 444. La division Euclidienne de a par b donne $q = 4$ pour quotient et $r = 24$ pour reste. Détermine les entiers a et b .
- 2) Soient 2 entier naturels a et b ($a > b$). La division Euclidienne de a par b donne pour quotient $q = 6$ et $r = 47$ pour reste. Par ailleurs $a + b + r = 591$. Détermine a et b .
- 3) Quelle peuvent être le diviseur et le reste d'une division Euclidienne dont le dividende est 542 et le quotient est 12 ?
- 4) La division Euclidienne de l'entier naturel a par b donne pour quotient q et pour le reste r . D'autre par ($a + 15$) diviser par ($b + 5$) donne q pour quotient et r pour reste. Détermine q .
- 5) La division Euclidienne de l'entier naturel a par b donne pour quotient $q = 356$ et pour le reste $r = 4623$. Détermine n pour que ($a + n$) divisé par ($b + n$) donne pour quotient $q = 356$.

PGCD et PPCM.**Exercice 12 :**.....Dans chacun des cas suivants, vérifier si les nombres a et b sont premiers entre eux :

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1) $a = 122$ et $b = 32$ | 2) $a = 85631$ et $b = 111$ |
| 3) $a = 712379$ et $b = 1551$ | 4) $a = 96777$ et $b = 45777$ |
| 5) $a = 101230$ et $b = 1200$ | 6) $a = 9975462199$ et $b = 324411220$ |

Exercice 13 :.....Dans chacun des cas suivants, déterminer le PGCD et le PPCM des réels a et b .

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1) $a = 24$ et $b = 33$ | 2) $a = 48$ et $b = 46$ |
| 3) $a = 1455$ et $b = 335$ | 4) $a = 114$ et $b = 22$ |
| 5) $a = 999$ et $b = 18$ | 6) $a = 14422$ et $b = 332$ |
| 7) $a = 6666$ et $b = 111$ | 8) $a = 42137$ et $b = 41$ |
| 9) $a = 1655$ et $b = 77$ | |

Exercice 14 :..... d et m désignent respectivement le PGDC et le PPCM des entiers a et b .Détermine l'ensemble des couples ($a ; b$) d'entiers relatifs vérifiant les conditions données ci-dessous :

- | | |
|---|---|
| 1) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} a^2 + b^2 = 801 \\ m = 120 \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} d = 90 \\ m = 180 \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} a + b = 168 \\ d = 21 \end{cases}$ |
| 5) $\begin{cases} d = 7 \\ m = 84 \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} m = 168 \\ ab = 1008 \end{cases}$ |
| 7) $\begin{cases} a + b = 60 \\ d = 12 \end{cases}$ | 8) $m^2 + 16d^2 = 16660$ |
| 9) $m^2 - 127d^2 = 612$ | 10) $\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$ |

$$11) \begin{cases} m + d = 126 \\ 5 < d < 10 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} a + b = 135 \\ m = 504 \end{cases}$$

$$15) 3m - 2d = 30$$

$$17) \begin{cases} PGCD(a; b) = 354 \\ a + b = 5664 \end{cases}$$

$$12) 2m + 5d = 123$$

$$14) \begin{cases} d = 9 \\ ab = 972 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} PPCM(a; b) = 168 \\ a \times b = 1008 \end{cases}$$

$$18)$$

Exercice 15 :

1) Détermine les entiers naturels n tels que :

a) $PPCM(n; 6) = 96$

b) $PPCM(72; n) = 216$

2) Détermine l'entier naturel n tel que : $\begin{cases} 600 < n < 1100 \\ PGCD(n; 630) = 105 \end{cases}$

Exercice 16 :

1) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{12n+1}{30n+2}$ est irréductible.

2) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , le nombre $\frac{n+16}{n-2}$ est-il irréductible ?

3) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , le nombre $\frac{2n+18}{n+3}$ est-il irréductible ?

Exercice 17 :

Soit n un entier naturel non nul. On pose $A = n + 3$ et $B = 3n + 4$. et

1) Montre que tout diviseur commun de A et B est un diviseur de 5.

2) Pour quelles valeurs de n le PGCD de A et B est-il égal à 5 ?

Exercice 18 :

Un ouvrier dispose d'une plaque de métal rectangulaire de 110 cm de longueur sur 88 cm de largeur. Il veut découper dans cette plaque des carrés tous identiques, les plus grands possible, de façon à ne pas avoir des pertes.

1) Détermine la longueur du côté de carré qui convient.

2) Détermine le nombre de carrés qu'il pourra découper dans la plaque de métal.

Exercice 19 :

On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :

1) La distance comprise entre deux arbres.

2) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

Exercice 20 :

Un Champ a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 119m et 91m ; les deux autres cotés mesurent 56m et 35m. Pour la clôture, le propriétaire M. KONAN a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

1) Quelle est la distance entre deux poteaux quelconques ?

2) Détermine le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.

Exercice 21 :.....

Deux voitures A et B démarrent en même temps d'une même ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

- 1) Détermine un autre moment (autre que le départ) où les deux voitures se croisent sur la ligne de départ.
- 2) Précise le nombre de tours effectués par chaque voiture.

Equations diophantiennes**Exercice 22 :**.....

Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations suivantes :

- | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|
| a) $11x - 7y = 1$ | b) $6x - 3y = 5$ | c) $3x - 5y = 6$ |
| d) $x + 3y = 2$ | e) $35x - 27y = 2$ | f) $3x - 7y = 23$ |
| g) $34x - 15y = 0$ | h) $2x - 3y = 3$ | i) $22x - 18y = -2$ |
| j) $23x + 7y = 1$ | | |

Exercice 23 :.....

Un général décide de compter ses soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 16 ; il reste 3 soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 25 ; il reste 5 soldats. Sachant que la troupe est constituée de moins de 400 soldats.

Détermine le nombre de soldats.

Exercice 24 :.....

Montre que l'équation : $(x ; y)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $6y - 3x = m$ admet des solutions si et seulement si m est un multiple de 3.

- 1) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a) $6y - 3x = 5.$

b) $6y - 3x = 3.$

- 2) Déduis-en de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation : $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1.$

Système de numération**Exercice 25 :**.....

- 1) Ecris dans le système décimal le nombre : $\overline{432}^5$; $\overline{FOA3}^{16}$; $\overline{10110011100011110000}^2$
- 2) Ecris dans le système binaire le nombre : $\overline{127}^{10}$; $\overline{DA00DA}^{16}$; 2021
- 3) Ecris dans le système de base 8 les nombres : $\overline{BABA}^{16}$; $\overline{FOA3}^{16}$; $\overline{10110011100011110000}^2$
- 4) Ecris dans le système binaire le nombre : $\overline{21210}^4$ sans passer par le système décimal
- 5) Ecris dans le système de base 5 le nombre : $\overline{729}^{10}$.
- 6) Sachant que $14 = 13 + 1$, écris 14^8 dans le système de base 13.
- 7) Un nombre s'écrit BABA (Avec : $A = 10$ et $B = 11$) dans le système hexadécimal. Ecris ce nombre dans le système octal.

Exercice 26 :.....

On considère l'entier naturel N qui s'écrit : $\overline{53x4}^8$

Détermine tel que :

- 1) N soit divisible par 7
- 2) N soit divisible par 6
- 3) En déduis la valeur de x pour que N soit à la fois divisible par 6 et par 7.
- 4) On prend $x = 2$. Détermine l'écriture décimale de A . Quel est le nombre de diviseurs de A ?

Trouve le plus petit nombre entier naturel non nul par lequel il faut multiplier A pour que le produit soit un carré parfait.

Exercice 27 :.....

On donne $A = \overline{114}^n$; $B = \overline{111}^n$ et $C = \overline{13054}^n$ et $A \times B = C$

Trouve n et l'écriture décimale de A, B, C.

Vérifie que le PGCD (A, B) = 1

Exercice 28 :.....

Dans le système d'énumération de base 3, un nombre s'écrit $\overline{2101}$ Dans quel système d'énumération s'écrit $\overline{224}$. Existe-t-il un nombre de système d'énumération dans lequel ce nombre s'écrit $\overline{174}$?

Exercice 29 :.....

I- Soit x un entier naturel à base 10 tel que $x = \overline{abcabc}$

Montre que n est le produit du naturel $\overline{abc}$ par un naturel k. En déduis que :

- a) x est divisible par 7, 11 et par 13
- b) x peut être un carré parfait

II- Soit x un entier naturel $x \geq 5$ on considère les entiers $n = \overline{100x}$ et $n' = \overline{x001}$ dans le système de base (x + 1)

- a) Ecris n et n' dans le système de base x.
- b) Ecris $n + n'$ dans le système de base x et vérifie que $n + n'$ est divisible par (x + 1) puis donne le quotient q de cette division en base x.
- c) Détermine les entiers a et b tel que : $q = \overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x$

Exercice 30 :.....

Dans le système de numération de base trois, un nombre s'écrit : $\overline{21013}^3$

- 1) Dans quel système de numération n ce nombre s'écrit : $\overline{224}^n$?
- 2) Existe-t-il un système de numération dans lequel il s'écrit : $\overline{174}$.
- 3) Soit α un entier naturel strictement supérieur à 2. On considère les nombres $N = 2(\alpha - 1)$ et $N' = (\alpha - 1)^2$

Ecris N et N' dans le système de base α

- 4) Démontre que dans tout système de numération de base b (avec $b \geq 4$) le nombre $\overline{1331}$ est le cube d'un entier x.

Exercice 31 :.....

- 1) Un nombre s'écrit $\overline{x2x31}$ dans le système décimal. Détermine x pour qu'il soit divisible par 11.
- 2) Un nombre s'écrit $\overline{x3y1x}$ dans le système décimal. Détermine x et y pour qu'il soit divisible par 35.
- 3) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans le système décimal. Détermine x et y pour qu'il soit divisible par 2 et 9.
- 4) Un nombre s'écrit $\overline{28x75y}$ dans le système décimal. Détermine x et y pour qu'il soit divisible par 3 et 11.
- 5) Soit N en entier naturel tel que $N = \overline{a0b}^5$ et $N = \overline{bac}^7$. Détermine les entiers a, b et c.
- 6) a) Trouve trois entiers naturels a, b et c différents de 1, premiers entre eux deux à deux et tels que : $a \times b \times c = 495$.
- c) x, y et z étant des chiffres de la base dix, on considère le nombre $A = \overline{x13y8z}$ en base dix. Détermine tous les triplets (x, y, z) pour lesquels A soit divisible par 495.

Exercice 32 :.....

- 1) Trouve dans le système décimal un entier $N = \overline{abcd}$ divisible par 45 et tels que le couple

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

(b ; c) soit solution de l'équation : $x^2 - y^2 = 24$.

2) Un entier naturel s'écrit xy_7 dans le système décimal et $y00x$ dans le système à base 8.

a) Sachant que $x = y = 4$. Détermine x et y .

b) Ecris ce nombre en système décimal, binaire, octal, décimal et hexa décimal.

Exercice 33 :

Effectue les opérations suivantes :

a) $\overline{101101}^2 + \overline{10011}^2$

b) $\overline{10110101}^2 - \overline{11011}^2$

c) $\overline{1010}^2 \times \overline{110}^2$

d) $\overline{2357}^8 - \overline{263}^8$

e) $\overline{9654}^{16} - \overline{5321}^{16}$

f) $\overline{974B}^{16} - \overline{587C}^{16}$

g) $\overline{FACE}^{16} + \overline{8B7}^{16}$

h) $\overline{94}^{16} \times \overline{12}^{16}$

i) $\overline{ABC}^{16} \times \overline{23}^{16}$

j) $\overline{477}^8 + \overline{342}^8$

Exercice 34 :

Un nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de gauche le nombre (1). Un autre nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de droite le nombre (1) D'autre par ce nombre est encore le triple du précédent.

Détermine les nombres initiaux.

Exercice 35 :

En utilisant la factorisation de $(x^2 + 3x + 1)^2 - 1$, montré que dans tout système d'énumération dont la base est supérieure à 3 on a : $\overline{10} \times \overline{11} \times \overline{12} \times \overline{13} + 1 = (\overline{131})^2$

Exercice 36 :

Soit $N = (x - 1)^3$ et $N' = (x + 2)(x - 1)$. Ecris N et N' en base x et vérifie que les mêmes chiffres sont utilisés dans N et N' .

Détermine x et y pour que l'entier naturel qui s'écrit $x43y$ dans le système décimal soit divisible par 2 ou par 9.

Les classes modulo

Exercice 37 :

1) Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation suivante : $\dot{3}x^2 - x + \dot{4} = \dot{0}$

2) Résous dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, l'équation suivante : $x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$

3) Résous dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, l'équation suivante : $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$

4) Résous dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'équation suivante : $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$

5) Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation suivante : $x^2 + \dot{2}x + \dot{6} = \dot{0}$

Exercice 38 :

1) Résous dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ et dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2$ le système : $\begin{cases} \dot{3}x + \dot{3}y = 3 \\ \dot{2}x + y = \dot{5} \end{cases}$

2) Résous dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ le système : $\begin{cases} \dot{2}x - \dot{4}y = \dot{2} \\ x + \dot{5}y = \dot{2} \end{cases}$

Exercices de perfectionnement

Exercice 39 :

1) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2) On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont deux entiers relatifs.

a) Vérifie en utilisant la question 1), que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduis un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0; y_0)$ de l'équation (E).

b) Détermine l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exercice 40 :.....

Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- Le 1er chiffre est pair ;
- La somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- Le troisième est la différence des deux premiers (le 1er moins le 2ème);
- Le 1er chiffre est le produit du troisième par le quatrième;
- Le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ?

Exercice 41 :.....

- 1) On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x + 10y = 1$.
 - a) Énonce un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).
 - b) Détermine une solution particulière de (E) et en déduis une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.
 - c) Résous (E').
- 2) Monte que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).
- 3) On considère l'équation (E'') $A_3x + A_2y = 3\,296$.
 - a) Détermine les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation (E'')
 - b) Montre que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer. Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Exercice 42 :.....

1. Pour $1 \leq n \leq 6$, calcule les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
2. Démontre que, pour tout n , $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduis que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
3. A l'aide des résultats précédents, calcule le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.
4. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
5. En déduis que, pour tout entier naturel n , 3^n est premier avec 7.
6. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où n est entier naturel supérieur ou égal à 2.
 - a) Montre que si U_n est divisible par 7 alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
 - b) Réciproquement, montre que si $3^n - 1$ est divisible par 7 alors U_n est divisible 7.
 - c) En déduis les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

Exercice 43 :.....

1. Détermine PGCD (2 688 ; 3 024).
2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.
 - a) Montre que les équations (1) et (2) sont équivalentes :
 (1): $2\,688x + 3\,024y = -3\,360$ et (2): $8x + 9y = 10$.
 - b) Vérifie que (1 ; -2) est une solution particulière de l'équation (2).
 - c) Déduis de ce qui précède les solutions de (2).
3. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On considère les plans P et L d'équation respectives : $x + 2y - z = -2$ et $3x - y + 5z = 0$
 - a) Montre que P et L se coupent suivant une droite D .
 - b) Montre que les coordonnées des points de D vérifient l'équation (2).
 - c) En déduis l'ensemble T des points de D dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Exercice 44 :.....

- 1) Détermine dans la base dix, l'entier naturel N tel que N^2 s'écrit $\overline{244}$ dans la base six. Quel est le nombre des diviseurs de N^2 dans $\mathbb{N}$?
- 2) Démontrer en raisonnant par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $N^{6n+2} + N^{3n+1} + 1$

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

est divisible par 111.

- 3) a- Soit n un entier naturel. Déterminer suivant n , le reste de la division par 7 de 3^n ; en déduis le reste de la division par 7 de 9^{991} .

b- Soit A un nombre qui s'écrit $\overline{651x}$ en base 10. Détermine x pour que $\overline{651x} + 9^{991}$ soit divisible par 7.

Exercice 45 :.....

I. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Détermine, suivant les valeurs de n le reste de la division par 7 de l'entier 3^n . En déduis le reste de la division par l'entier naturel par $(506390)^{128}$.
- 2) Dans le système de numération décimal, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$.
- 3) Détermine x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

II.

- 1) Détermine le plus grand commun des nombres 21590 et 9525
- 2) Déterminer l'ensemble des entiers x tel que : $34x \equiv 2[15]$.
- 3) Résous l'équation : $(x; y) \in \mathbb{Z}^2 : 21590x + 9525y = 1270$.
- 4) Quel est le chiffre des unités entiers naturel 7^{1980} dans le système décimal ?

Exercice 46 :.....

- 1) Le système de numération est le système décimal.
- a) Détermine l'entier naturel : $N = \text{PGCD}(17787; 689; 297)$
- b) Résous l'équation : $\{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 : 13x - 84y = 7\}$.
- 2) a- Détermine tous les couples $(a; b)$ d'éléments de $\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$ tel que : $\begin{cases} a \times b = 0 \\ a - b = 5 \end{cases}$
- c- Résous dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 3x - 4 = 0$.
- d- Démontre que, quel que soit l'entier naturel n , on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$
- 3) Détermine l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(\alpha; \beta)$ dans chacun des cas suivants : a- $17\alpha - 19\beta = 2$ b- $17\alpha - 19\beta = -2$
- 4) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que :
a) $n \equiv 0[17]$ et $n \equiv -2[19]$
b) $n \equiv 0[19]$ et $n \equiv -2[17]$
- 5) En déduis l'ensemble des entiers n tels que $n^2 + 2n$ soit divisible par 323.

Exercice 47 :.....

I.

- 1) Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes ci-dessous ; puis écrire sous la forme trigonométrique $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in \mathbb{R}$.

$$Z_1 = -2(\sin x + i\cos x); Z_2 = -3e^{-\frac{2\pi}{3}i}; Z_3 = \frac{-2\cos 2x + i\sin 2x}{2\cos 3x - 2i\sin 3x}$$

- 2) Détermine les suites d'entiers rationnels de raison 6 dont le produit des 4 premiers termes est 385.
- 3) Un lot à usage d'habitation à la forme trapèze dont les deux bases mesurent Respectivement 30cm et 21cm ; les deux autres coté » mesurent 18cm et 12cm. Pour la clôture, le propriétaire a besoin des poteaux du support à égale distance mesurée en nombre entier de mètres pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.
- a) Quelles est la distance entre deux poteaux ?
- b) Détermine le nombre de poteaux nécessaire à la clôture.

II.

- 1) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $(p; q) : 11p - 7q = 1$.

- 2) la division euclidienne d'un entier naturel n par 7 donne pour reste 4 ; le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Quel sera son reste dans la division par 77?
- 3) Détermine les valeurs de l'entier naturel n inférieures 200.

Exercice 48 :.....

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1X416}$ dans le système de numération de base sept.

- 1) Détermine X pour que :
 - a) A soit divisible par six.
 - b) A soit divisible par cinq.
 - c) En déduis qu'il existe X tel que A soit divisible par une trente.
- 2) On donne à X la valeur zéro, détermine l'écriture décimale de A . Dans ce cas quel est le nombre de diviseurs positifs de A ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec trois ?

Exercice 49 :.....

- 1) Démontre que le couple $(x; y)$ est solution de l'équation(E): $2x + 3y = 78$.

On se propose de trouver tous couples de points $(B; C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

- a) Montre que l'on est ramené à l'équation (E) ; avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
- b) A partir de la définition de B et de C trouver une solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E).
- c) Démontre qu'un couple $(x; y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x; y) = (12 + 3k; 18 - 2k)$ ou k est un entier relatif.
- d) Combien y a-t-il de couples de points $(B; C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs tels que : $-6 \leq x \leq 12$ et $-5 \leq y \leq 14$?

Exercice 50 :.....

Deux commerçants, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues.

Chaque manque coûte 5F l'unité. Awa dit à Fanta je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de base huit et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de base sept.

- 1) Détermine les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.
- 2) Détermine le montant que dispose chacune des deux commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.
- 3) a- Décompose m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers.

b- En déduire le nombre de diviseurs m_1 et m_2 puis le $\text{pgcd}(m_1; m_2)$.

- 4) Résous $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1u + m_2v = 5$ ou u et v sont deux entiers relatifs.

Exercice 51 :.....

- 1) Résous dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^3 - y^3 = 631$.
- 2) a- Trouve le reste de la division euclidienne de 111 par 7 et de 10^n par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel n .
b- Soit entier naturel $N = 999888777666555444333222111$.

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

- Montre que N peut s'écrire en fonction de 111.
- Quel est le reste de la division euclidienne par 7 ?

Exercice 52 :.....

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$

- 1) Détermine un couple $(\alpha ; \beta)$ d'entiers relatifs solution de l'équation : $23\alpha + 7\beta = 1$
- 2) En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution de l'équation (E): $23u - 7v = -6$. Résous complètement l'équation (E)
- 3) Démontre que x est solution de l'équation (S) si et seulement si il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs vérifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$. En déduis l'ensemble des solutions de (S).
- 4) Détermine la plus petite solution (entier naturel) de (S) divisible par 16.

Exercice 53 :.....

- I. On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :
 - 1) La distance comprise entre deux arbres.
 - 2) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.
- II. On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.
 - 1) Vérifie que le couple $(-7 ; -3)$ est une solution de (E).
 - 2) Résous alors l'équation (E).
 - 3) En déduis le couple d'entiers relatifs (p, q) solution de (E) tel que : $0 \leq p \leq 25$.

Exercice 54 :.....

On considère l'équation (E): $8x + 5y = 1$, ou $(x; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

1. a- Donne une solution particulière de l'équation (E).

b- Résous l'équation(E).

2. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a; b)$, de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a- Montre que le couple $(a, -b)$ est solution de (E).

b- Quel est le reste de la division de N par 40 ?

3.a- Résous l'équation $8x + 5y = 100$, ou $(x; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b- Au VIII^e siècle, un groupe composé d'homme et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge.

Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 55 :.....

- 1) Démontre que pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$, est un multiple de 7. En déduis que $2^{3n+1} - 2$ et $3^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.
- 2) Détermine les restes de la division par 7 des puissances de 2.
- 3) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
 - a) Si $p \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division par 7 de A_p par 7 ?
 - b) Démontre que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
 - c) Etudie le cas où $p = 3n + 2$.

Exercice 56 :

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1 .

- 1) Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1 . Montrer que le couple $(u ; v)$ est solution de l'équation (E1) : $35x - 27y = 2$.
- 2) a) Détermine un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ solution particulière de l'équation (E2) : $35x - 27y = 1$
 - b) En déduis une solution particulière $d(u_0; v_0)$ de (E1).
 - c) Détermine toutes les solutions de l'équation (E1).
 - d) Détermine la solution $(u ; v)$ permettant de déterminer J_1 .
- 3) a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?
 - c) le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile).
 - d) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

Exercice 57 :

L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

- 1) On considère l'équation (E) : $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 1$.
 - a) Soit $(x; y)$ un couple solution de (E). Démontre que : $2x \equiv 1[7]$
 - b) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2x \equiv 1[7]$
 - c) En déduis que l'ensemble des solutions de (E) est $\{(4 + 7k; -5 - 9k), k \in \mathbb{Z}\}$
- 2) Résous l'équation (E') : $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 200$
- 3) L'AMAD est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes. Les cotisations sont de 900 F CFA pour les hommes et de 700 F CFA pour les femmes. Pour sa fête annuelle, le parrain de l'AMAD désire offrir des tee-shirts aux hommes et des pagens aux femmes. Malheureusement, il ne connaît pas le nombre d'hommes et de femmes de cette association. Cependant sait que les cotisations de tous les membres s'élèvent à 20000 F CFA. Détermine le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

Exercice 58 :

En un temps T_0 un athlète A_1 , étant à son 2^{ème} tour pénètre dans le champ visuel de la caméra d'arrivée d'un marathon de tour du quartier. Six (6) minutes plus tard, avant que A_1 n'échappe à la caméra un autre athlète A_2 étant à son 1er tour y fait son entrée. Des investigations sportives ont affirmé que A_1 fait le tour du quartier en 32 minutes tandis que A_2 le fait en 58 minutes. On se propose de déterminer le nouveau temps T_1 auquel A_1 et A_2 réapparaîtront ensemble dans le champ de la caméra. Pour cela on note n_1 le nombre de tours effectués par A_1 et n_2 celui effectués par A_2 entre T_0 et T_1 .

- 1) Vérifie que $(n_1 ; n_2)$ est solution de l'équation (E) : $16x - 29y = 3$.
- 2) a) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).
 - b) En déduis les valeurs de n_1 et n_2 permettant de déterminer T_1 .
- 3) a) Détermine le nombre de minutes s'écoulant entre T_0 et T_1 .
 - c) Sachant que T_0 était 8h00, détermine le temps T_1 en heures et minutes.
- 4) A cause d'une panne électrique, la caméra manque le spectacle simultané de T_1 . Combien de minutes doit-on attendre pour un nouveau spectacle simultané en un autre temps T_2 ? Évalue ces minutes en heures.

Exercice 59 :.....

- 1) On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) : $91x + 10y = 1$.
 - a) Énonce un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).
 - b) Détermine une solution particulière de (E) et en déduis une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.
 - c) Résous (E').
- 2) Montre que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8.
- 3) On considère l'équation (E'') : $A_3x + A_2y = 3296$.
 - a) Détermine les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de l'équation (E'').
 - b) Montre que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Détermine-le.

Exercice 60 :.....

Un Champ a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 119m et 91m ; les deux autres cotés mesurent 56m et 35m.

Pour la clôture, le propriétaire M. KONTE a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

- 1)
 - a) Quelle est la distance entre deux poteaux quelconques?
 - b) Détermine le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.
- 2) Selon le type de clôture et la qualité de fil de fer choisi, M. KONTE a dépensé $\overline{\alpha 1630}^{11}$ F CFA (où $\alpha = 10$) pour un nombre x entier rangées de fil de fer et $\overline{53008}^9$ F CFA pour un nombre entier y de jours de mains d'œuvre.

Après évaluation M. KONTE s'est rendu compte que le coût total des travaux était de $\overline{656\alpha 5}^{13}$ F CFA et le nombre de rangées de clôture dépassait le nombre de jours de travail.

- a) Exprime tous les montants dans le système décimal.
 - b) Précise le nombre de rangées de fil de fer et le nombre de jours de mains d'œuvre.

Fonctions numériques d'une variable réelle

Domaine de définition

Exercice 1 :

Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1} ; f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4} ; f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} ; f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} ; f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$$

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x + 4|} ; f(x) = x^3 - 3x - 4 ; f(x) = \frac{3-\sqrt{5+2x}}{x-2} ; f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} ; f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} ; f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1} ; f(x) = \frac{x^2+2x}{|x|-2} ; f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-3x+2}} ; f(x) = \frac{|x^2-2x|}{x+1}$$

$$f(x) = -x + \sqrt{x^2 + x - 2} ; f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-x} ; f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1 ; f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x-3|-5}$$

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1} ; f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{9x^2}} ; f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1} ; f(x) = |x^3 - 3x - 4| ; f(x) = \frac{-x^2+5}{x^2+5x-6}$$

$$f(x) = \frac{4x+3}{x^3-x^2} ; f(x) = \frac{-3x^2-4x+3}{-x^2+1} ; f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6} ; f(x) = \frac{x^3-9x}{2(x^2-1)} ; f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}$$

Exercice 2 :

1) Limites de fonctions polynômes et rationnelles quand $x \rightarrow \infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -2x^3 - 3x^2 + 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)^2}{1-2x^2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 - 3x^2 + 1}{5x^2 + 4x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{2x^2}$
---	---	---	--

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 + 3x^2 + 1$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1-x)^3$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-2x^3 - 3x)(x+1)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - \frac{2}{x-3}$
---	--	--	---

2) Limites de fonctions rationnelles quand $x \rightarrow$ réel annulant le dénominateur et le numérateur

$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}$	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 + 3x + 2}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x - 1}$
$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x^3}{x^3 + x^2 + 4x + 1}$

3) Limites de fonctions rationnelles quand $x \rightarrow$ réel annulant le dénominateur

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x + 1}{x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - x}{x - 3}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x + 1)^3}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 7}{x^2 - 1}$
$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{(x + 1)^2}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x + 5}{(x - 2)(1 - x)}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 3x}{x^2 - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x}{x^2 - 2x + 1}$

4) Limites de fonctions racines carrées quand $x \rightarrow \infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x + 2} - \sqrt{4x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x^2 + 1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 1} - x$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{9x^2}}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + 1} - 3x$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} - 3x$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x} + 3x + 5$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5 - x} - \sqrt{1 - x}$

5) Limites de fonctions trigonométriques

$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + \cos x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \sin x}{1 - \sqrt{2} \cos x}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{3x - \pi}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2}{4 + \cos x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{2 \sin x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x - 3)}{x^2 - 9}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 3x - \sin^2 4x}{1 - \cos 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \tan 2x}{\sin 4x - \tan x}$

6) Limites de fonctions trigonométriques avec taux de variation

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x - \pi}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x - \sqrt{2}}{2x - \frac{\pi}{2}}$
--	---	--	---

7) Limites de fonctions trigonométriques avec théorème des gendarmes

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \cos x}{x^2 + 1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sin x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^3 + 1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{5x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2 + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

8) Limites des fonctions rationnelles avec taux de variation ou expression conjuguée

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{3x+1}-1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5}-3}{1-x}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-\sqrt{5+2x}}{x-2}$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{3x-\sqrt{4x^2+5x}}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+2}-2}{4x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+16}-4}$	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2+5x-1}-7}{\sqrt{x^3+6}-9}$
$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{2x^2-2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2-\sqrt{4+x}}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2-7x+1}-3}{x-1+\sqrt{x^2-x+2}}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x}-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

Continuité en point x_0

Exercice 3 :.....

Etudie la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \text{ et } x_0 = 2; \\ f(2) = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} \text{ et } x_0 = 1; \\ f(1) = 2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \text{ si } x \neq 9 \\ f(9) = \frac{1}{6} \text{ et } x_0 = 9 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2+3x-4}{2x-2} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{2} \text{ et } x_0 = 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\sqrt{2-x}-2}{\sqrt{x+3}-1} \text{ si } x \neq -2 \\ f(-2) = -\frac{1}{2} \text{ et } x_0 = -2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{3x^2-1}{x-1} \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = 1 \text{ et } x_0 = 2 \end{array} \right.$$

Exercice 4 :.....

On considère la fonction h définie par : $\begin{cases} h(x) = \frac{x^2-6x-16}{x^2-3x+2}, \text{ si } x \neq 2 \\ h(2) = 10 \end{cases}$

- Détermine le domaine de définition D de h .
- Etudie la continuité de h en 2 et en 1.
- Calcule les limites de h aux bornes de D

Continuité sur un intervalle

Exercice 5 :.....

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 - x + 1 \text{ si } x \in [0; 1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} \text{ si } x \in]1; 3] \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} f(x) = -x^2 - 2x + 5 \text{ si } x \in]-\infty; 1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3} \text{ si } x \in [1; 3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3} \text{ si } x \in [3; +\infty[\end{array} \right.$$

Etudie la continuité de f en 1.

Etudie la continuité de f en 1 et en 3.

Exercice 6 :.....

I. Soit h la fonction définie par :

$$\begin{cases} h(x) = |x^3 + x^2|, \text{ si } x < 0 \\ h(x) = x\sqrt{x}, \text{ si } 0 \leq x < 2 \\ h(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}, \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Détermine le domaine de définition de h .
- Ecris $h(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- Etudie la continuité de h en -1, en 0 et en 2

II. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2}; x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2}; x < 2 \\ f(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

1. Détermine D_f ensemble de définition de f .
2. Montre que f est continue en 2.
3. Etudie la continuité de f sur D_f

Détermination de a et b pour que f soit Continue en x_0 .

Exercice 7 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$$

Détermine la valeur de a pour que f soit continue en $x_0 = 2$

Exercice 8 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax \text{ si } x \in]-\infty; -1[\\ f(x) = 2x - 1 \text{ si } x \in]-1; 1[\\ f(x) = b(x^2 - 1) \text{ si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

- a) Détermine a pour que f soit continue au point $x_0 = -1$
- b) Pouvez – vous déterminer la valeur de b pour que f soit continue au point $x_0 = 1$?

Exercice 9 :

- I.** Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = x + 1, \text{ si } x \geq 3 \\ g(x) = ax^2 - 2x, \text{ si } x < 3 \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Détermine la valeur de a pour que g soit continue en 3.

- II.** Soit la fonction f définie par : $f: x \mapsto \begin{cases} 2x^2 - 3x + 2, \text{ si } x \leq -1 \\ \frac{2m-x}{x^2+x+1}, \text{ si } -1 < x \leq 1 \\ \sqrt{2x^2 + 2x - 4}, \text{ si } x > 1 \end{cases}$

1. Détermine le domaine de définition de f .
2. Détermine m pour que f soit continue en -1.
3. Pour la valeur de m trouver, étudie la continuité de f en 1 et détermine le domaine de continuité de f .
1. Détermine Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- III.** Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x - 2}, \text{ si } x < 2 \\ f(x) = ax^2 + bx - 9, \text{ si } 2 \leq x \leq 3 \\ f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x+6} - 3}, \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

2. Détermine le domaine de définition de f .
3. Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
4. Détermine a et b pour que f soit continue en 2 et en 3.

Exercice 10 :

Détermine le nombre réel a pour que la fonction f donnée soit continue

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2a}{1-x} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\sin 2x}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}; \begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2} \text{ si } x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + ax + 1 \text{ si } x < 2 \end{cases}; \begin{cases} f(x) = 3x^2 - 2x + a \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{4x+1}{4x} \text{ si } x > 1 \end{cases};$$

Exercice 11 :

Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x+a}{x^3+1} \text{ si } x \leq 1 \\ f(1) = b \\ f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$
. Détermine a et b pour que f soit continue en 1.

Exercice 12 :

Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = ax + 5b \text{ si } x \geq 0 \\ f(0) = 4 \\ f(x) = \frac{\sin ax}{bx} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$
. Détermine a et b pour que f soit continue en 0.

Prolongement par continuité en x_0

Exercice 13 :

Dans chacun des cas suivants, précise l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0 .

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}; \begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \\ x_0 = 2 \end{cases}; \begin{cases} f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^2} \\ x_0 = 0 \end{cases}; \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4} \\ x_0 = 3 \end{cases}; \begin{cases} f(x) = \frac{2x+\sqrt{x+5}}{x^2-1} \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

Exercice 14 :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$$

a- Détermine les ensembles de définitions D_f et D_g respectivement des fonctions f et g .

b- Vérifie que la fonction g est le prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

Exercice 15 :

On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$

1. Détermine son ensemble de définition D_g .
2. Montre que g admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par h .

3. Montre que h est dérivable en 2 puis donner l'équation de la tangente à la courbe (C) de h au point d'abscisse 2.

Exercice 16 :.....

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) f admet-elle un prolongement par continuité au point 4 ? Si oui, donne alors ce prolongement.

Exercice 17 :.....

Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{4x}{|x+2|-|x-2|}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{3x+10}-x}{\sqrt{2x^2-2x-4}-x-1}$

1. Précise le domaine de définition de f et de g , puis écris f sans le symbole de valeur absolue.
2. Démontre que f est prolongeable par continuité en 0 et détermine son prolongement.
3. Calcule la limite de g en 5.
4. Peut-on prolonger h par continuité en 5 ? si oui donne un prolongement.

Asymptotes, positions relatives et branches infinies

Exercice 18 :.....

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3x-3}{1-x^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) Calcule les limites aux bornes de D_f .
- 3) Interprète graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 19 :.....

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).
- 2) Etudie la position relative de (C) par rapport à (Δ).

Exercice 20 :.....

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2-5x+7}{3-x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de f , puis calcule les limites aux bornes de D_f .
- b) Interprète graphiquement si possible les résultats obtenus.
- 2) a) Détermine les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{3-x}$.
- b) Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C).
- c) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).

Exercice 21 :.....

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \sqrt{1+x^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) a) Calcule les limites aux bornes de D_f .
- c) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 22 :.....

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-x^3+2x^2}{x-1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) Calcule les limites aux bornes de D_f . Interprète graphiquement le résultat de la limite en 1.
- 3) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

Calcul de dérivées**Exercice 23 :**.....

Détermine la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3 ; f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} ; f(x) = (-x^2 + 2x)^3 ;$$

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} ; f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1} ; f(x) = (1 - 3x^2)(-x^2 + 1) ;$$

$$f(x) = (x^4 - 7)^3 ; f(x) = (3x^2 + 2x - 4)^{-4} ; f(x) = (x - 1)\sqrt{x^3 - x^2} ;$$

$$f(x) = x - \frac{2}{x-1} ; f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1} ; f(x) = \frac{-3x^2-4x+3}{-x^2+1} ; f(x) = \frac{4x+3}{x^3-x^2}$$

Dérivabilité en point x_0 **Exercice 24 :**.....

Etudie la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

$$f(x) = x\sqrt{x} \text{ et } x_0 = 1 ; f(x) = |x^2 - 4| \text{ et } x_0 = 2 ; f(x) = \frac{x+5}{x-3} \text{ et } x_0 = 2$$

$$f(x) = x^2 - 3x \text{ et } x_0 = 4 ; f(x) = \sqrt{3x+1} \text{ et } x_0 = 1$$

Exercice 25 :.....

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = -x^2 + x \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) = x^2 - x \end{cases}$. Etudie la dérivabilité de f en 1.

Continuité et dérivabilité x_0 **Exercice 26 :**.....

Détermine les réels a , et b pour que f soit continue et dérivable aux points x_0 donnés :

$$a- \begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} \text{ si } x > 1 \end{cases} \quad b- \begin{cases} f(x) = 2ax^2 - x + b \text{ si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3} \text{ si } x > -2 \end{cases}$$

$$c- \begin{cases} f(x) = ax^2 - 3x + 4 \text{ si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{x+b}{x+3} \text{ si } x > -2 \end{cases}$$

Exercice 27 :.....

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$c- \begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} \text{ si } x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a \text{ si } x < -1 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue au point -1 ?
 Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction f au point -1 .

Exercice 28 :.....

I. On donne la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-2}, & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2ax + a - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$$

1. Etudie la continuité de f en 1
2. a. Etudie la dérivabilité de f à gauche et à droite de 1 .
 b. pour que valeur du réel a , f est-elle dérivable en 1 ?

II. Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x + \sqrt{2x^2 + x}, & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = x \times \sqrt{\frac{x}{x-2}}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Etudie la continuité de g en 0 .
2. a- Etudie la dérivabilité de g en 0 .
 b- Précise les équations des demi-tangentes de (C_g) en 0 .
3. Calcule les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

Exercice 29 :.....

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
2. Démontre que : $\forall x \in D_f, f(x) = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$
3. Etudie la continuité de f .
4. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Que pouvez-vous en déduire ? Sur quelle partie de D_f la fonction f est-elle dérivable ? détermine sa fonction dérivée f' .

Exercice 30 :.....

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) Etudie la continuité de f sur $[-1; +\infty[$
- 3) Montre que f est dérivable en 0 et détermine l'équation de la tangente à sa courbe représentative en $A(0; \frac{1}{2})$.

Tangentes

Exercice 31 :.....

Détermine une équation de la tangente au point d'abscisse x_0 des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 5}$ et $x_0 = 1$
- 2) $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 2}$ et $x_0 = 0$
- 3) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$ et $x_0 = -1$
- 4) $f(x) = x^2 - 3x$ et $x_0 = 4$
- 5) $f(x) = \sqrt{x + 1}$ et $x_0 = 3$

Exercice 32 :.....

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 2$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) Montre que (C) admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -2x + 4$.
- 2) Donne une équation de chacune de ces tangentes

Exercice 33 :.....

Soit a et b deux réels. On considère la fonction g définie par : $g(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$ et (C_g) sa courbe.

1. Détermine les réels a et b sachant que $g(2) = 2$ et $g'(2) = 0$.
2. Détermine l'équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 2.

Détermination de paramètre

Exercice 34 :.....

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Détermine les réels a , b et c sachant que (C) passe par $A(2; 6)$ et admet comme tangente au point d'abscisse 6 la droite d'équation $y = -3x + 20$.

Exercice 35 :.....

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Détermine les réels a , b et c sachant que f admet 2 comme extremum relatif en 1 et que la tangente à sa représentation graphique au point d'abscisse 2 admet 3 comme coefficient directeur.

Exercice 36 :.....

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Détermine les réels a , b et c sachant que (C) passe par $A(0; 4)$ et que la tangente au point $B(2; 1)$ est parallèle la droite (OI).

Exercice 37 :.....

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Détermine les réels a ; b ; c et d tel que :

- a) La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.
- b) La courbe C_f passe par le point $A(-\frac{1}{2})$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -5 .

Exercice 38 :.....

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Détermine les réels a ; b ; c et d tel que :

- a) La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$.
- b) La courbe C_f n'admet pas d'asymptote parallèle à l'axe (ox).
- c) La courbe C_f passe par le point $A(-\frac{1}{2})$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 2 .

Exercice 39 :.....

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Détermine les réels a , b , c ; m ; n et p tel que :

- a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

- b- La courbe C_f passe par le point $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -3 .

Etude de fonctions :

Problème 1:

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f .
- 2) Calcule les limites aux bornes de D_f .
- 3) Détermine les réels $a; b$ et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$
- 4) a- Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe C_f .
b- Détermine la position de la courbe C_f et de la droite (D) .
- 5) Montre que le point $I\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ est centre de symétrie pour la courbe C_f .
- 6) Détermine une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -2
- 7) Etudie la continuité et la dérivabilité de la fonction f au point d'abscisse nul.
- 8) Calcule la dérivée f' de la fonction f puis dresse le tableau de variation de f .
- 9) Construis la courbe C_f et la droite (D) dans le même repère

Problème 2:

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Etudie les variations de f .
- 2) Précise les asymptotes à la courbe C_f .
- 3) Soit Δ l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, détermine la position de C_f par rapport à Δ dans l'intervalle $]-1; 1[$.
- 4) Construis-en C_f .

Problème 3 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1. Etudie les variations de et dresse son tableau de variation.
2. Détermine les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$
3. Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C) .
4. Etudie la position relative entre (C) et (D) .
5. Montre que le point $I(1; -1)$ est un centre de symétrie de (C) .
6. Détermine une équation de la tangente (T) aux d'abscisses 2 .
7. Détermine les coordonnées du point d'intersection entre (C) et l'axe des ordonnées.
8. Trace (D) , (T) et (C) .

Problème 4:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1. Détermine l'ensemble de définition de f .
2. Calcule les limites aux bornes de D_f .
3. Interprète graphiquement le résultat de la limite obtenu en 1.
4. Vérifie que $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x - 1}$
5. Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) .
6. Etudie la position relative entre (C) et (D) .
7. Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
8. Démontre que le point $A(1; 3)$ est un centre de symétrie de (C) .
9. Trace (D) et (C) .

Problème 5:

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
2. Détermine les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$
3. Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C) .
4. Etudie la position relative entre (C) et (D) .
5. A est le point d'intersection des asymptotes à (C) .
- a) Détermine les coordonnées du point A .
- b) Montre que le point A est un centre de symétrie de (C) .
6. Détermine une équation de la tangente (T) aux d'abscisses 1.
7. Détermine les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des repères.
8. Trace (D) , (T) et (C) .

Problème 6:.....

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$. Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Etudie et construis la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
2. Montre que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (C_f)
3. Discute graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 + 2(1-m)x + 4 = 0$
4. Montre que la restriction h de f à l'intervalle $I = [2; +\infty[$ est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. Construis la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} de h dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$; puis calcule $(h^{-1})'(\frac{7}{2})$.

Problème 7:.....

On note $f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où x désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années. On donne $f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$ où $x \in [0; +\infty[$.

1. Détermine les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+10}$ pour $x \in [0; +\infty[$.
2. a- Calcule la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.
b- Justifie que la population est croissante.
3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 52$.
b- En déduis à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.
4. a- Quelle est la limite de f en $+\infty$?
b- En déduis une interprétation quant à la population de cette ville;
5. Trace la courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
Echelle : 1 cm $\rightarrow$ 10 ans sur l'axe des abscisses
1 cm $\rightarrow$ 10.000 habitants sur l'axe des ordonnées.

Problème 8:.....

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2}$.

Soit C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité : 1cm.

- 1- Détermine les réels a , b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$.
2. a- Calcule limites aux bornes de l'ensemble définition D_f de la fonction f .
b- Démontre que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à C_f .

c- Etudie la position relative de C_f et de (D) .

3- Calcule la dérivée f' de la fonction puis dresser la tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4. a- Détermine les coordonnées des points de la courbe C_f ou la tangente est parallèle à la droite (D) .

b- Détermine une équation de ces tangentes.

Soit α un nombre réel avec $(\alpha \geq 0)$.

c- Démontre que le point $I\left(\frac{0}{2}\right)$ est le centre de symétrie pour la courbe C_f

5- Construis la courbe C_f et la droite (D) dans le même repère.

Problème 9:.....

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

On désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1) Montre que (C_f) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.

2) Précise la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.

3) Etudie les variations de f .

4) Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$?

Si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.

5) Tracez la courbe (C_f) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J)

6) Montre que la restriction g de f à l'intervalle $I =]1 ; 2]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

7) a- Calcule $(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right)$

b- Dressez le tableau de variation de g^{-1} puis trace sa courbe représentative dans le même repère que celle de f .

Problème 10:.....

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$, et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique 1cm).

1) On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

a- Etudie le sens de variation de g , et montrer que l'équation, $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

b- Précise le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

2) a- Calcule $f'(x)$ et étudie le sens de variation de f .

b- Etudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$, puis dresse le tableau de variation de f .

3) a- Montre qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.

b- En déduis que C admet une asymptote oblique Δ et étudier la position de C par rapport à Δ .

Vérifie en particulier que C rencontre Δ en un point unique A .

4) Détermine les abscisses des points B et B' de C admettant une tangente parallèle à Δ .

5) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$; en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.

6) Construis la courbe C .

Problème 11:.....

Partie A :

On donne la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1) Etudie les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2,19 < \alpha < 2,20$
- 3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$
Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f .
- 2) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, on a : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$
- 3) Etudie le signe de $f'(x)$ et en déduis les variations de f puis son tableau de variation de la fonction f .
- 4) Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe C_f . Etudie la position de C_f et (D) .
- 5) Trace C_f .

Problème 12:.....

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

- a) Etudie les variations de la fonction g .
- b) Montre que $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.
- c) En déduis le signe de g sur $\mathbb{R}$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$.

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On note (D) et (D') les droites d'équations respectives : $y = -3x$ et $y = x$.

- a) Etudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
- b) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- c) En déduis le tableau de variation de f .
- d) Détermine la limite en $-\infty$ de $f(x) - (-3x)$. Quelle conséquence graphique peut-on déduire de ce résultat ?
- e) Montre la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$
- f) Etudie la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D') .
- g) Trace la courbe (C) , les droites (D) et (D') .

Problème 13:.....

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{1 - x^3}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 1$

- 1) Etudie la fonction g (limites et sens de variation)
- 2) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$, puis en déduis l'arrondi d'ordre 2 de l'abscisse x_0 du point d'intersection I de la courbe de g avec l'axe des abscisses.
- 3) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

- 1) Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenues.
- 2) a- Prouve que le signe de la fonction dérivée f' de f dépend en signe et en racine de la fonction g étudiée dans la **partie A**.
b- Détermine $g(x_0)$ où x_0 est l'abscisse x_0 du point d'intersection I de la courbe de g avec l'axe des abscisses obtenu dans la **partie A 2)**.
c- Dresse le tableau de variation de f .
- 3) Trace la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Problème 14:

Soit la fonction f définie par $f(x) = x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Donne l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) Étudie les variations de f , puis trace avec soins sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,6$ et $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -0,3$

Problème 15:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x - \sqrt{x^2 + 8} < 0$
b) Étudie les limites de f aux bornes de D_f . En déduire que la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.
c) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en $-\infty$
- 2) a) Calcule $f'(x)$. Puis en déduire de 1) a) le sens et le tableau de variation de f .
b) Trace (C) et (D) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm)

Problème 16:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Détermine le domaine de définition de f et écris $f(x)$ sans les symboles "valeur absolue"
- 2) Étudie la dérivabilité de f en -1 et en 0 , puis interpréter géométriquement les résultats
- 3) Étudie les variations de f
- 4) Montre que les droites d'équations $y = -x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à la courbe (C) et f
- 5) Trace (C)

Problème 17:

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f
- 2) Écris $f(x)$ sans valeur absolue
- 3) Étudie la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et en $x_0 = 3$ puis interpréter graphiquement vos résultats.
- 4) Montre que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$.
- 5) Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (Δ) et (D)
- 6) Étudie le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation
- 7) Trace dans un repère orthonormé la courbe (C) de f .

Problème18:

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f de f
- 2) a) Etudie la dérivabilité de f au point $x = 0$, en déduis l'ensemble de dérivabilité de f .
b) Calcule $f'(x)$ pour x élément des intervalles de dérivabilité.
c) Calcule les limites de $f(x)$ aux bornes de D_f et précise les équations des asymptotes à la courbe (C) de f .
d) Dresse le tableau de variation de f
- 3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty, 0]$
a) Montre que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g et $(C_{g^{-1}})$ sa courbe.
b) Calcule $f(0), f(-1), f(2), f(3)$
c) Construis dans le même repère orthonormé les courbes (C) et $(C_{g^{-1}})$
d) Calcule $(g^{-1})'(\frac{3\sqrt{3}}{2})$

Problème19:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Etudie suivant les valeurs de x , le signe du polynôme et l'expression de $f(x)$ sans le symbole "valeur absolue".
- 2) Etudie la continuité et la dérivabilité de f , en particulier en 1 et en 5. La courbe admet-elle des tangentes en ces points ?
- 3) Etudie les variations de f .
- 4) Démontre que la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie pour la courbe (C) .
- 5) Démontre que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à la courbe (C) .
- 6) Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de la courbe (C) avec ses deux asymptotes, A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.
- 7) Soit I le point de coordonnées $(3; 0)$. Démontre que $\forall x \in [1; 5]$ le point M de coordonnées $(x, f(x))$ est à une distance constante du point I. En déduis la nature géométrique de la courbe (C) , lorsque $1 \leq x \leq 5$
- 8) Trace (C) et ces asymptotes. Fais figurer les points A et B.

Problème 20:

La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation.

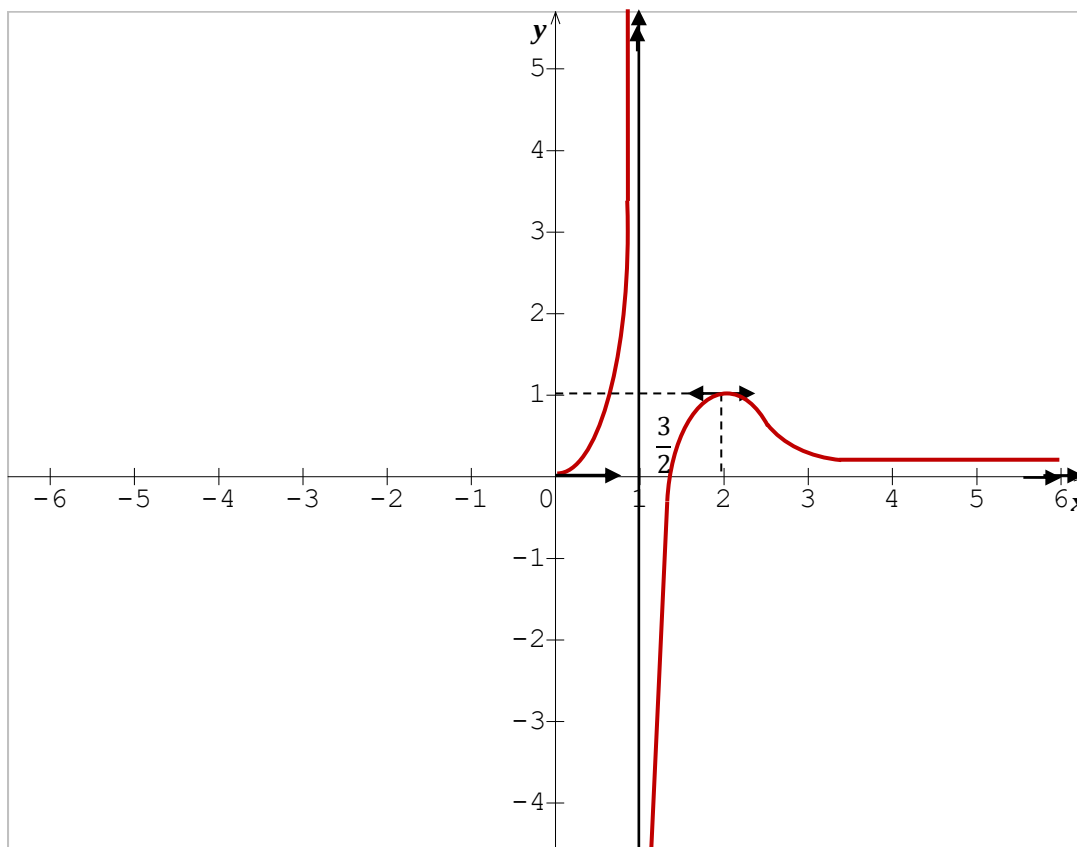
On sait de plus que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour la courbe C de f .

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
		0	-	-
$f'(x)$		1		$+\infty$
			$-\infty$	3

- 1) Trace la courbe C de f
- 2) Complète le tableau de variation de f
- 3) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \alpha}$
a- Détermine les réels $a; b; c; \beta$ et α
b- Montre que la restriction g de f à $I =]2; 4]$ réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
c- Donne l'équation de la tangente à la courbe C' de g^{-1} au point d'abscisse 1
d- Trace C'

Problème 21:

On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction g .



- 1) Complète la courbe de la fonction g sachant que g est impaire.
- 2) Donne les équations des asymptotes à (Cg)
- 3) Quel est le domaine de définition de g sous forme de réunion d'intervalles
Donne les limites de g aux bornes de Dg .
- 4) Dresse le tableau de variation de g .

Problème 221:.....

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+d}$ où a, b, c, d sont des réels et (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Trouve les réels $a; b; c$ et d sachant que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote et (Cf) passe par les points $A(2; 3)$, $B(4; 7)$ et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.
- 2) Dans la suite du problème on prendra $a = 1; b = -1; c = -5$ et $d = -3$

- a- Etudie la fonction f
- b- Etudie la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique
- c- Montre que la restriction g de f à l'intervalle $[4; +\infty[$ réalise une bijection de $[4; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- d- Calcule $g(5); g(6); (g^{-1})'(\frac{15}{2})$
- 3) Montre que (Cf) admet un centre de symétrie que l'on déterminera
- 4) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β
- 5) a- Montre que $\forall x \in [4; 5]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$
b- En déduis que $\left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$
- 6) Trace (Cf) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ainsi que (Cg^{-1}) la courbe de g^{-1}

Problème 23:.....

Partie A :

Soit f la fonction numérique définie sur $Df =]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

- 1) Montre que la dérivée de f garde un signe constant sur Df .
- 2) Étudie les variations de f (limite et sens de variation)
- 3) En déduis que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1; 2[$

Partie B:

On se propose de résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $]1; 2[$.

- 1) Montre que l'équation $f(x) = 0$, a même ensemble de solution que l'équation : $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$
- 2) On appelle g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$
(On a donc $g(\alpha) = \alpha$ et $1 \leq \alpha \leq 2$)
 - a) Montre que si x est élément de $]1; 2[$ alors $g(x)$ est aussi élément de $]1; 2[$.
 - b) Justifie la dérivabilité de g sur $]0; +\infty[$ Calculer la dérivée de g puis montrer que pour tout $x \in [1, 2]$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
 - c) En déduis que pour tout x de $[1, 2]$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

Problème 24:.....

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Étudie la fonction f (limites, variations).
- 2) a- Détermine les réels a ; b ; c et d tel que $\forall x \neq 1$ on a : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}$
b- En déduis que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (C)
c- Précise la position de la courbe (C) et la droite (D) et les coordonnées du point commune I à la courbe (C) et (D) .
- 3) Trace (C) et (D)
- 4) a- Détermine l'abscisse du point J de la courbe (C) où la tangente est parallèle (D) ; puis l'équation de cette tangente. Tracer cette tangente (T) .
b- En déduis graphiquement suivant les valeurs de m , le nombre de solution de l'équation $f(x) = x + m$.
- 5) On se propose de retrouver par calcul le résultat trouvé en 4)
a) Montre que les abscisses des points d'intersection de (C) et de la droite d'équation $y = x + m$ sont les solutions de l'équation :

$$(m + 2)x^2 + (-2m - 7)x + m + 4 = 0 \quad (E)$$

b) Trouve suivant les valeurs de m , le nombre de solution de l'équation (E) .
c) Pour quelles valeurs de m la courbe (C) et la droite d'équation $y = x + m$ ont-elles deux points communs M et N ?
d) Dans ce cas, calculer en fonction de m , l'abscisse du milieu I de $[MN]$.
e) Montre que lorsque m varie, le point I appartient à la courbe (C') d'équation :

$$y = x + \frac{7-4x}{2x-2}$$

Problème 25:.....

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et (C) sa courbe.

- 2) Démontre que la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est au dessus de sa tangente en tout point.
b- En déduis que $\forall \alpha \in [0; +\infty[$, on a : $\frac{1}{1+\alpha} \geq 1 - \alpha$ (1)
- 3) Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$, par $g(x) = \sqrt{x+1}$ et soit α un réel strictement positif.
- 4) Détermine la dérivée première et seconde de g sur $]0; +\infty[$
- 5) Vérifie que $\forall x \in [0; \alpha[$ on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$
- 6) En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[0; \alpha]$, démontre que $1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq \sqrt{1+\alpha} \leq 1 + \frac{\alpha}{2}$ (2)

7) a) Déduis des relations (1) et (2) que : $\forall \alpha \in [0 ; +\infty[, on a : 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4} \leq \sqrt{1+\alpha} \leq 1 + \frac{\alpha}{2}$

b) Etablis alors l'inégalité suivante : $1,0475 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,05$

c) En déduis une valeur approchée de $\sqrt{1,1}$ tout en précisant la marge d'incertitude.

8) Etudie la fonction f puis tracer la courbe (C).

Problème 26:

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^4 x}$ et (C) sa courbe.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) Etudie la parité et la périodicité de f . En déduis qu'il suffit d'étudier la fonction f sur un nouvel ensemble d'étude D_E
- 3) Montre que $\forall x \in D_f$ on a : $f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$
- 4) Etudie le signe de $(1 - 2\cos x)$ sur D_E puis en déduire les variations de f sur D_E .
- 5) Trace la courbe (C).

Problème 27:

On considère, dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.

Soit A le point de coordonnées (1; 0) et A' le point de coordonnées (-1 ; 0).

- 1) Pour tout point H du segment $[AA']$, distinct de A et A', on mène la perpendiculaire (Δ) à la droite (AA'). La droite (Δ) coupe le cercle (Γ) en M et M'.
On pose $\overline{OH} = x$. Calcule en fonction de x l'aire du triangle AMM'.
- 2) Soit f la fonction définie sur $] -1; 1 [$ par $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$.
a- Etudie les variations de f .
b- Montre que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

Problème 28:

Soit f la fonction définie sur $] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} [$ par : $f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos^3 x}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Détermine D_f
- 2) Etudie la périodicité et la parité de f puis en déduis un intervalle d'étude D_E .
- 3) Etudie les limites aux bornes de D_E .
- 4) Montre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{3\cos 2x}{\cos^4 x}$ puis dresse le tableau de variation de f .
- 5) Trace (C_f).

Problème 29:

On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = \sin 2x \cos x$.

Soit C_g sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) a- Prouve que la verticale $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe C_g et étudier la parité de g .
b- Justifie que l'on peut étudier g sur $D_E = [0 ; \frac{\pi}{2}]$ puis décrire les étapes à suivre pour avoir la courbe C_g sur $\mathbb{R}$.
- 2) a- Détermine $g'(x)$ et justifier que son signe est celui de $3\cos^4 x - 2$ pour tout $x \in D_E$
b- En admettant que $\cos(0,45) = 0,9$ et que $\cos(2,69) = -0,9$ et en exploitant les résultats obtenus en 1), établis le tableau de variation de g sur D_E
- 3) a- Trace (C_g) sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$
b- En déduis le trace de (C_g) sur $[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$.

Problème 30:

Partie A :

On considère la fonction numérique h de variable réelle u définie sur $[-1 ; 1]$ par : $h(u) = 2u^3 + 8u^2 - 4$.

- 1) Détermine l'arrondi d'ordre zéro de $h(-0,79)$ et de $h(0,66)$.
- 2) Etablir le tableau de variation de h et donner les signes de $h(u)$ pour $u \in [-1 ; 1]$.

Partie B :

On donne la fonction numérique g telle que $g(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x + 2}$.

Soit C_g sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_g .
- 2) En étudiant la périodicité et la parité de g puis montre que l'on peut étudier g sur un nouvel ensemble d'étude $DE = [0 ; \pi]$ d'amplitude 2π .
- 3) Détermine $g'(x)$ et prouver $g'(x)$ dépend en signe et en racine de : $2\cos^3 x + 8\cos^2 x - 4$ pour tout $x \in D_E$
- 4) En admettant que $\cos(0,85) = 0,66$ et que $\cos(2,49) = -0,79$, établis le tableau de variation de g sur D_E .
- 5) a- Trace C_g sur D_E .
b- En déduis le trace de C_g sur I .

Problème 31:.....**Partie A :**

- 1) Détermine l'arrondi d'ordre quatre de $\sin(-0,1396)$.
- 2) A l'aide d'un changement de variable convenable, résous dans $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $-2\sin^2 x - 8\sin x - 1 \geq 0$.

Partie B :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + 2}$.

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Quel est le domaine de définition D_f de f ?
- 2) Prouve que les droites $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ sont des axes de symétrie pour C_f .
- 3) Après avoir étudié la périodicité de f , justifie que l'on peut étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ puis donne le processus à suivre pour compléter l'étude de f sur $[-\pi ; \pi]$.
- 4) (On rappelle que $\sin 2x = 2\cos x \sin x$ et que $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$)
a- Détermine $f'(x)$ pour tout $x \in D_E$ puis établis que $f'(x)$ dépend en signe et en racine de $-2\sin^2 x - 8\sin x - 1$
b- Comment sont les tangentes à C_f aux points d'abscisses $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$?
- 5) Détermine l'arrondi d'ordre quatre de $f(-0,1396)$ puis dresser le tableau de variation de f sur l'ensemble D_E .
- 6) Trace C_f sur D_E en mettant en évidence les points d'intersection de C_f avec les axes de coordonnées. En déduis le tracé de C_f sur $[-\pi ; \pi]$.

Problème 32:.....

Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = (2m - 1)x^4 - (m + 4)x^2 - m + 5$. Où x est la variable et m est un paramètre réel. Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Montre que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Etudie les fonctions f_0 et f_1 puis représente leur courbe respectives (C_0) et (C_1) .

Problème 33:.....

Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3}$.

Où x est la variable et m est un paramètre réel.

Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Montre que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées.

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

- 2) Détermine m pour que le point d'intersection I de (C_m) et l'asymptote parallèle à $(x'ox)$ ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.
- 3) Étudie les fonctions f_0 et f_1 puis représente leur courbe respectives courbe (C_0) et (C_1) .

Problème 34:.....

Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 1}$.

Où x est la variable et m est un paramètre réel.

Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Donne le tableau de variation de la fonction f_m suivant les valeurs de m .
(On distinguera les cas où $m \neq 1$ et $m \geq 0$).
- 2) Compare $f_m(x)$ et $f_{-m}(-x)$ puis donne la position relative des courbes (C_m) et (C_{-m}) .
- 3) Quelle sont les coordonnées des points de (C_m) à tangentes parallèles à (ox) quand ceux-ci existent ?
- 4) Montre que ces points sont sur une même courbe fixe.
- 5) Étudie les fonctions f_0 et f_1 puis représente leur courbe respectives (C_0) et (C_1) .

Primitives-intégrales

Primitives

Exercice 1:.....

En utilisant les formules de primitives directes, calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = 4x^3 + x^2 - 4 ; f(x) = (x^2 - 3)^3 ; f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1 ; f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = 3(-x - 2)(3x + 2)^2 ; f(x) = \cos(-6x + 5) ; f(x) = 3\sin(1 - 4x) ;$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 5 ; f(x) = \cos\left(\frac{x+\pi}{5}\right) ; f(x) = \sin(-2x + \pi) ; f(x) = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + 8x^2 ; f(x) = \frac{-2}{x^2} + \frac{5}{x^3} ; f(x) = -x^3 - 2x^2 + 1 ; f(x) = 4x + \frac{1}{\sqrt{x}} ; f(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + 1}{5x^2}$$

Exercice 2:.....

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = (x + 3)^5 ; f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x ; f(x) = x^2(x^3 - 9)^5 ; f(x) = (2x + 1)^4 ;$$

$$f(x) = (5 - 2x)^6 ; f(x) = x(x^2 + 1)^5 ; f(x) = (6x + 3)(x^2 + x + 1)^4 ; f(x) = \cos x \cdot \sin^4 x$$

$$f(x) = \frac{6}{x^2} \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 ; f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - x)^4 ; f(x) = \tan^3 x + \tan^5 x ; f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$$

Exercice 3:.....

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3}{(3x + 1)^3} ; f(x) = \frac{-5}{(7x + 3)^3} ; f(x) = \frac{3x}{(1-x^2)^4} ; f(x) = \frac{3x+6}{(x^2+4x+3)^4} ; f(x) = \frac{3}{(3-2x)^4} ; f(x) =$$

$$\frac{1}{x^3+3x^2+3x+1} ; f(x) = \frac{-1}{(3-4x)^2} ; f(x) = \left(\frac{x}{x^3+1}\right)^2 ; f(x) = \frac{\sin x}{\cos^4 x} ; f(x) = \frac{-x+1}{(x^2-2x)^4} ;$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x} ; f(x) = \frac{x^2}{(x^3+1)^5} ; f(x) = \frac{-x}{(x^2-9)^5} ; f(x) = \frac{1}{\tan^3 x} + \frac{1}{\tan x} ;$$

$$f(x) = -x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{(x+3)^2} ; f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3}$$

Exercice 4:.....

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{-6}{\sqrt{-6x+5}} ; f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x+1}} ; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} ; f(x) = \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x}} ; f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} ; f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}} ; f(x) = \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x+1}} ; f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} ; f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-6x+1}} ; f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}} ;$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 5:.....

Détermine les primitives des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{-3x+2} ; f(x) = 3x\sqrt{x^2+1} ; f(x) = \sqrt{x+5} ; f(x) = x\sqrt{9+x^2} ;$$

$$f(x) = x^2\sqrt{1+x^3} ; f(x) = \sqrt{4x+9} ; f(x) = (-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4} ; f(x) = \sqrt{x+2}$$

$$f(x) = \cos x \sqrt{1+\sin x} ;$$

Exercice 6:.....

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) ; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}) ; f(x) = \frac{\cos\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} ; f(x) = 2x\sin(x^2) ;$$

$$f(x) = (x+1)^3 \sin(x+1)^4 ; f(x) = (x+1)\cos(x^2+2x) ; f(x) = (2x+1)\sin(x^2+x+1)$$

$$f(x) = 3\cos(2x+1)\sin^3(2x+1) - 1 - \tan^2 x$$

Exercice 7:.....

Détermine les primitives des fonctions suivantes

$$f(x) = x\cos x + \sin x ; f(x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} ; f(x) = x(2\cos x - x\sin x) ; f(x) = \sqrt{x}\cos x + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = x^2 + 2x\tan x + x^2\tan^2 x ; f(x) = \frac{x\sin x + \cos x}{x^2} ; f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} ; f(x) = \frac{x\cos x - \sin x + \cos x}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{2x\cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}} ; f(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 8:.....

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \cos 2x \cdot \cos 3x; f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin 2x}; f(x) = \cos^5 x; f(x) = \sin^4 x; f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$f(x) = \cos^3 x \times \sin^3 x; f(x) = \cos^2 x \times \sin^3 x; f(x) = \sin x \cdot \cos 2x; f(x) = \cos^5\left(\frac{3}{2}x\right)$$

$$f(x) = \sin 3x \cdot \cos 4x; f(x) = \sin x \cdot \cos 3x; f(x) = \cos^6 x; f(x) = (\sin x + \cos x)^2$$

Exercice 9 :

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \tan^2 x; f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3(x+1)^2}; f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}; f(x) = \frac{1}{x + \cos x}; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$$

Exercice 10 :

Détermine la primitive F de la fonction vérifiant la condition indiquée :

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1 \text{ et } F(0) = 7; \quad f(x) = (x-3)^6 \text{ et } F(3) = 0$$

$$f(x) = \frac{2}{(3-x)^3} \text{ et } F(0) = 0; \quad f(x) = (x-3)^6 \text{ et } F(3) = 0$$

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} \text{ et } F(0) = \sqrt{5}; \quad f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \text{ et } F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^3 x} \text{ et } F(\pi) = 1; \quad f(x) = \sin x \cos^4 x \text{ et } F(\pi) = 0$$

Détermination des réels a , b et c

Exercice 11 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}$$

- 1) Détermine l'ensemble de définition
- 2) Détermine les réels a , b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$
- 3) Dédus-en la primitive de f qui s'annule en 0

Exercice 12 :

Soit les fonctions f et F définies par : $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$

Détermine les réels a ; b et c tel que $\forall x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right], F$ soit une primitive de f sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$

Exercice 13 :

Dans chacun des cas suivants, détermine les réels a , b et c puis en déduis les primitives de f :

$$1) F(x) = \frac{-1}{x^2(1+x)} \text{ et } f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

$$2) F(x) = \frac{x^2-4x+2}{(x-3)^2} \text{ et } f(x) = a + \frac{B}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}$$

$$3) F(x) = \frac{2x-5}{-x^2+3x-2} \text{ et } f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{1-x}$$

$$4) F(x) = \frac{x^3-x^2-8x+8}{(x-2)^2} \text{ et } f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$$

$$5) F(x) = \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^3(x+1)^2} \text{ et } f(x) = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^2}$$

Intégrales

Intégrations à l'aide d'une primitive

Exercice 14 :

En utilisant les formules des primitives, calcule les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)dx; \quad 6) I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\begin{array}{ll}
2) I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-2x + \pi) dx & ; \quad 7) I = \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx \\
3) I = \int_0^4 \sqrt{4x+9} dx & ; \quad 8) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} dx \\
4) I = -4 \int_{\sqrt{2}}^{\frac{5}{x^2}} dx & ; \quad 9) I = \int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx \\
5) I = \int_{-1}^2 (x+2)\sqrt{x+2} dx & ; \quad 10) I = \int_0^1 (-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4} dx
\end{array}$$

Intégrations par parties

Exercice 15:

En utilisant la formule de l'intégration par partie, calcule les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll}
1) I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 2x dx & ; \quad 4) I = \int_{-2}^1 (x-5)\sqrt{2-x} dx \\
2) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx & ; \quad 5) I = \int_{-1}^2 (x+2)\sqrt{x+1} dx \\
3) I = \int_0^4 x\sqrt{4x+9} dx & ; \quad 6) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x+1) dx
\end{array}$$

Exercice 16:

Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos^2 2x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin^2 2x dx$

- 1) Calcule : $I+J$.
- 2) Calcule : $I-J$ en utilisant la technique de l'intégration par parties.
- 3) Déduisez – en les valeurs de I et J .

Intégrations par changement de variable

Exercice 17:

En utilisant un changement de variable, calcule les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll}
1) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx & ; \quad 3) I = \int_{-2}^1 (x+1)\sqrt{x^2-2} dx \\
2) I = \int_{-1}^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} dx & ; \quad 4) I = \int_2^7 (x+2)\sqrt{x+2} dx
\end{array}$$

Exercice 18:

Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 12x - 16$.

- 1) Montre que -2 est un zéro double de P .
- 2) Calcule I en utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, l'intégrale : $I = \int_4^5 p(x) dx$

Deux intégrations par parties

Exercice 19:

Calcule chacune des intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx ; I = \int_{-\pi}^0 x^2 \sin 2x dx ; I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx ;$$

Intégrales et suites

Exercice 20:

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

- 1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouve une relation entre I_n et I_{n-1} (On posera : $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$).
- 2) Calcule I_0 ; I_1 ; I_2 et I_4

Exercice 21:.....

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ($n \geq 0$)

- 1) Calcule I_0
- 2) En intégrant par parties, montre que $\forall n \geq 1$ on a : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.
- 3) En déduis la valeur de I_1 ; I_2 et I_3 .

Exercice 22:.....

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$

- 1) Détermine le seul réel a tel que : $\forall x \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{a \cos x}{1 + \sin x}$.
- 2) Calcule la valeur de I_0 .
- 3) Démontre à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :
 $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}}$ (On pourra poser : $\frac{1}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \times \frac{1}{\cos^2 x}$)

Exercice 23:.....

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

- 1) Calcule I_1 .
- 2) En intégrant par parties, montre que $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ (on posera $x^n = x \cdot x^{n-1}$)

Exercice 24:.....

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^{n+1}} dx$; $n \in \mathbb{N}$

- 1) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$; I_n est croissante et majorée.
- 2) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$. En déduis la limite de la suite I_n .

Exercice 25:.....

On pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$ ou n est un entier naturel.

- 1) Calcule I_0 et I_1 .
- 2) Vérifie que $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$.
- 3) En déduis I_2 et I_3 .

Exercice 26:.....

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$; $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Démontre que $I_n = 2 \int_0^1 (x^2 - 1)^n dx$, puis calcule I_0 et I_1 .
- 2) Démontre que $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
- 3) En déduis I_2 et I_3 .

Exercices de perfectionnement

Exercice 27:.....

Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

- 1) Calcule I
- 2) Soit la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$
 - a) Montre que $\forall x \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$
 - b) Déduis une relation entre I et J .
 - c) Calcule J .

Exercice 28:.....

Soient les intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x \cos^2 x \, dx$

- 1) Calcule $I - J$ et $I + J + K$
- 2) Calcule la primitive de $\cos 4x$
- 3) Déduis la valeur de : $I + J - 3K$ puis celles de I , J et K .

Exercice 29:.....

Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \, dx$

- 1) Calcule $I + J$ et $I - J$.
- 2) Déduis les valeurs de I et J .

Exercice 30:.....

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx$

1. a) Montre que l'intégrale I peut s'écrire $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx$
 c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3}J$
 d) Montre de même que $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3}I$
2. a) Montre que $I + J = \frac{3\pi}{4}$.
 b) Montre que $J - I = 0$.
 c) Déduis les intégrales I et J .

Exercice 31:.....

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$

- 1) Trouve les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$
- 2) En déduis $I = \int_1^2 f(x) \, dx$

Exercice 32:.....

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$

- 1) Trouve les réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$
- 2) En déduis $I = \int_0^3 f(x) \, dx$

Exercice 33:.....

Soit la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-3}$

- 1) Trouve les réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$
- 2) En déduis $I = \int_0^2 f(x) \, dx$

Exercice 34:.....

1) Soient f et g les fonctions numériques définies sur par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$

- a) Calcule $I_1 = \int_0^1 f(x) \, dx$
- b) Soit $I_2 = \int_0^1 g(x) \, dx$. Calcule $I_1 + I_2$. En déduis la valeur de I_2 .
- 2) a) Détermine trois réels a , b et c tels que pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, $\frac{x^2-1}{2x-1} = ax + b + \frac{c}{2x-1}$
- b) Calcule $\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1} \, dx$

Exercice 35:.....

Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos^2 2x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin^2 2x \, dx$

1. Calcule : $I + J$.
2. Calcule : $I - J$ en utilisant la technique de l'intégration par parties.
3. Déduisez – en les valeurs de I et J .

Exercice 36:.....

1. f est la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; -1[$ par $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 1}{x+1}$.

a- Détermine les réels $a; b; c$ et d tels que pour $x \neq -1$, $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$.

b- Calcule l'intégrale $I = \int_{-3}^{-2} f(x) dx$.

2. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur $D = \mathbb{R} - \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x) = \frac{9x^2 + 14x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$.

a- Vérifie que $\forall x \in D$, on a : $f(x) = 3 - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{3x-1}$.

b- En déduis l'ensemble des primitives f sur D .

Exercice 37:.....

- 1) a- Vérifie que tout nombre réel $x \neq 1$ et $x \neq -1$ on a : $\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$.
- c- Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Déduis de a.) la valeur de l'intégral

$$J(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2} dx$$

- 2) a- En utilisant une intégration par partie, calcule en fonction de α l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$$

b- Détermine la limite $I(\alpha)$ quand le nombre réel positif tend vers 0.

- 3) Soit $A = \overline{10101010}$ un nombre écrit en base deux. Ecrire A dans le système de numération décimale.

Fonction Logarithme

Exercice 1 :

Exprime en fonction de $\ln 2$ les réels suivants :

$$A = \ln 8 + \frac{1}{2} \ln 16 - \ln \sqrt{2} \quad B = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) + \ln\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)$$

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

$$C = \ln 2\sqrt{2} + \ln 2^3 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \quad D = 2\ln\sqrt{2} + \ln\sqrt{2^3} - \frac{\ln 2^{\sqrt{2}}}{3\ln 2^2}; E = \ln(2 + \sqrt{3})^{20} + \ln(2 - \sqrt{3})^{20}$$

Exercice 2 :

Exprime en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les réels suivants :

$$A = \ln 18 + \ln 12$$

$$B = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{9}{8} \right)$$

$$C = \ln \left(\frac{1}{12} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)$$

$$D = \ln(3^{-3}) + \ln 24$$

$$E = \ln 3\sqrt{2} + 2\ln 6$$

$$F = \ln 3\sqrt{2} + \ln 2\sqrt{3}$$

$$G = \ln 144$$

$$H = 2\ln 2 - \ln 36 + 3\ln 3$$

$$I = \ln \left(\frac{\sqrt{8}}{2} \right) + \ln \left(\frac{\sqrt{12}}{4} \right)$$

Exercice 3 :

Exprime en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$ les réels suivants :

$$A = \ln 2000$$

$$B = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{32}{25} \right)$$

$$C = \ln 0,001 + 3\ln 4$$

$$D = \ln 0,025 + \ln 40$$

$$E = \ln 0,625$$

$$F = \ln \left(\frac{25}{320} \right)$$

$$G = \ln 0,05 + \ln 16$$

$$H = 2\ln \left(\frac{2}{5} \right) - 6\ln 10$$

$$I = \ln 25 + 4\ln 10$$

$$J = \ln 0,5 + \ln 80$$

$$K = \ln 50 - 2\ln 20$$

$$L = 3\ln 100 - 5\ln 10$$

Exercice 4 :

Simplifie les expressions suivantes :

$$A = \ln \left(\frac{1}{e} \right)$$

$$B = \ln \sqrt{e}$$

$$C = \sqrt{6\ln e - \ln e^2}$$

$$D = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{e}}{e} \right)$$

$$I = 6\ln e^2 \sqrt{e}$$

$$E = 5\ln \left(\frac{1}{e} \right) - \ln e^2$$

$$F = 3\ln e^{-1} + \ln e^2$$

$$G = 4\ln e \sqrt{e} - 2\ln e$$

$$H = \ln \sqrt{\sqrt{e}}$$

$$J = \sqrt{\ln e^4} - 2\ln \sqrt{e}$$

Exercice 5 :

Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$a. \ln(2x+7) = \ln(x-3)$$

$$b. \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$$

$$c. \ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$$

$$d. \ln(x-3) = \ln(x+7) - \ln(x+1)$$

$$e. \ln(2x-2) + \ln(x+2) = 3\ln 2$$

$$f. \ln(x-2) + \ln(x+3) = 2\ln(x+1)$$

$$g. \ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$$

$$h. \ln|x-1| + \ln[2x-1] = 0$$

$$i. \ln\sqrt{x+1} = \ln(3-x) - \frac{1}{2}\ln 2x$$

$$j. \ln \left(\frac{x-1}{2x-3} \right) = 0$$

$$k. 3(\ln x)^2 - 7\ln x + 2 = 0$$

$$l. -5(\ln x)^2 + (\ln x) + 6 = 0$$

Exercice 6 :

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\ln(2-3x) > \ln x$$

$$\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2\ln 2$$

$$\ln(x^2 + 2x + 2) \geq \ln(-x^2 + x + 3)$$

$$\ln(x+8) - \ln(x+14) + \ln(x+2) \leq 0$$

$$\ln(2x-1) - \ln(1-x) < \ln 3$$

$$\ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1)$$

$$(\ln x)^2 - \ln x - 6 < 0$$

$$(\ln x)^2 + 2\ln x + 1 = 0$$

$$\ln(x^2 + 2x + 2) > \ln(3+x-x^2)$$

$$\ln(5x^2 + 6x + 1) < 0$$

Exercice 7 :

Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \frac{3}{2} \\ x + y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 4y = 12 \\ \ln(x-1) + \ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 0 \\ 4\ln x + \ln y = 3 \end{cases}$$

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

$$\begin{cases} x \cdot y = 243 \\ 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\ln(x-1) + 3\ln(x+y) = -2 \\ 3\ln(x-1) + 5\ln(x+y) = -4 \end{cases}$$

Exercice 8 :

1. Soit le polynôme p définie par $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$
 - a. Calcule $p(-1)$ puis factorise $p(x)$ en trois produits de facteur du premier degré.
 - b. Résous l'équation $p(x) = 0$
 - c. En déduis la résolution de l'équation : $2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 4 \ln x + 3 \leq 0$
2. Soit le polynôme q définie par $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.
 - a) Calcule $q(1)$ puis résoudre l'équation $q(x) = 0$ et $q(x) \geq 0$
 - b) En déduis la résolution de :
 - l'équation : $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 3 = 0$
 - l'inéquation $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 3 \geq 0$

Exercice 9 :

Soit le polynôme P définie par : $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

1. a- Calcul $P(-1)$
b- Détermine les nombres réels a et b tels que : $P(x) = (x-1)(2x^2 + ax + b)$
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
3. Déduis-en dans $\mathbb{R}$ la résolution de l'équation et l'inéquation :
 - a. $2(\ln x)^3 + 7(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 = 0$
 - b. $\ln(2x+3) + \ln(x^2 + 2x + 2) \leq \ln(8x+9)$

Exercice 10 :

On considère le polynôme : $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.

1. a) Vérifie que $P(-1)$;
b) Ecris $P(x)$ sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
2. a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
- c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) \leq 0$
3. Déduis-en dans $\mathbb{R}$:
 - a. L'équation : $2(\ln x)^3 + 7(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 = 0$.
 - b. L'équation : $\ln(4-x^2) + \ln(2x+7) = \ln(10x+25)$
 - c. L'inéquation : $2(\ln x)^3 + 7(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \leq 0$.

Exercice 11:

Dans chacun des cas suivants, démontre $f'(x)$ donnée :

$$1) \begin{cases} g(x) = 2\ln x + x - 1 \\ f(x) = \frac{x+\ln x}{x^2} \\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \end{cases} ; 2) \begin{cases} g(x) = x^2 - 2\ln x \\ f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1+\ln x}{x} \\ f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2} \end{cases} ; 3) \begin{cases} g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x \\ f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2} \\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} g(x) = x + \frac{1}{2} - x\ln x \\ f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x(1-x\ln x) \\ f'(x) = g(x) \end{cases} ; 5) \begin{cases} g(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1| \\ f(x) = x\ln|x-1| \\ f'(x) = g(x) \end{cases} ; 6) \begin{cases} g(x) = \ln x + x + 1 \\ f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} \\ f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2} \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} g(x) = x \ln x - 1 \\ f(x) = \frac{1+x}{1+\ln x} \\ f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+\ln x)^2} \end{cases} ; 8) \begin{cases} g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x \\ f(x) = \frac{x+\ln x}{x^2} \\ f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2} \end{cases}$$

Exercice 12 :

Etudie la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes en $x_0 = 0$

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; 2) \begin{cases} f(x) = x + \frac{1}{2} - x \ln x; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases} ;$$

$$3) \begin{cases} f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x(1 - x \ln x); \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} f(x) = x^2 - 2x \ln x; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; 5) \begin{cases} f(x) = \frac{1+x}{1+x-\ln x}; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; 6) \begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}; \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 13 :

1. Dresse le tableau de variation des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } f(x) = \ln(2-x) & \text{b. } f(x) = \ln(-x^2 + 2x + 3) & \text{c. } f(x) = x \ln x - x \\ \text{d. } f(x) = \frac{2x \ln x}{x+1} & \text{e. } \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) & \text{f. } f(x) = \ln|x^2 - 3x + 2| \end{array}$$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1) \ln x + 1, \text{ si } x \neq 1 \\ f(x) = 0, \text{ si } x = -1 \end{cases}$$

- a. Etudie la continuité et la dérivabilité de f en -1
b. Dresse le tableau de variation de f puis construire sa courbe

3. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$ par : $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$

- a. Détermine les nombres réels a, b et c tel que : $\forall x \in]1; +\infty[$; on ait : $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$
b. Détermine une primitive de la fonction g sur $]1; +\infty[$
c. A l'aide d'une intégration par partie, calculer : $I = \int_2^3 \frac{x \ln x}{(x^2-1)^2} dx$

Exercice 14 :

Calcule les limites suivantes

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 5 - \ln x & \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x + 2 & \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x + 1 - 7 \ln x & \lim_{x \rightarrow 3} \ln(3-x) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{3x-2}{x+1}\right) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x+1} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + x + 1) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln x & \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x & \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{\ln x} + \frac{x}{\ln x} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + x - 1)}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2} \cdot \ln(x+1) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{x \ln x} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) \ln x - x & \lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^5 \\ & & \text{et} & \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} + \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x \ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \frac{1}{x} - (\ln x)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x + \ln^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x \ln x - x}{x - e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln^5 x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x+1}{4x+1}\right) \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{1+\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - 2 \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{5x+2} - \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x - \frac{1}{x} + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 4 \ln^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4x - 5 + \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{3 \ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x^2 + 1} - 2x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \frac{2 \ln x - 1}{x}$$

Exercice 15:

Calcule chacune des intégrales suivantes à l'aide d'intégration par parties :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$I = \int_1^3 \ln x dx$$

$$I = \int_0^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$I = \int_1^2 x^2 \ln x dx$$

$$I = \int_0^1 (x^3 + 1) \ln x dx$$

$$I = \int_1^3 (x+2) \ln x dx$$

Problème :

Problème 1 :

f et g sont deux fonctions $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies sur l'intervalle $]0; +\infty]$ par :

$f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. On désigne par (C) et (H) les courbes représentatives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 4cm.

Partie A :

1. a) Prouve que $f'(x)$ est du signe de $-4\ln x$ sur $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
c) Préciser les droites asymptotes à (C) .
2. Etudie la position de (C) par rapport à l'axe des abscisses et donnez une équation de la tangente à (C) au point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
3. Calcule l'intégrale $\int_1^2 g(t)dt$.
4. Construis (C) et (H) .

Partie B :

1. Démontre la position relative (C) peut se réduire du signe de $h(x) = 1 + 2\ln x - x$.
2. En utilisant les variations de la fonction h , prouve que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0 ; 2[$.
3. Calcule $h(x)$ puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $]2 ; +\infty[$ dont on précise la valeur. Justifier l'encadrement $3 < \beta < 4$.
4. Précise le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x et π et conclure sur la position relatives des courbes (C) et (H) .
5. Calcule l'intégrale : $I_{(\alpha)} = \ln \int_{\alpha}^{\ln 2} (-4e^{2x} + 8e^x)dx$ où α est un réel strictement inférieur à $\ln 2$.

Problème 2 :**Partie A :**

Soit la fonction f définie sur $[10 ; 100]$ par : $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}$

- 1) Calcule f'
- 2) Démontre que $f'(x)$ est positive sur l'intervalle $[10 ; e^3]$ et négative sur $[e^3 ; 100]$.
- 3) Dresse le tableau de variation de f .

Partie B :

On se propose d'exprimer la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge.

x représente en année et $g(x)$ la capacité pulmonaire en litres, on admet que sur l'intervalle $[10 ; 100]$ on a : $g(x) = 110f(x)$ où f est la fonction définie dans la **partie A**.

- 1) Calcule la capacité pulmonaire à 10ans, 15ans, 30ans et 60ans.
- 2) Trace la courbe représentative de g dans un repère orthogonal (en abscisse : 2cm pour 10ans et en ordonnée 3cm pour 1 litre).
- 3) A quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ? Quelles cette capacité maximale ?
- 4) Détermine graphiquement l'intervalle du temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à 5 litres.

Problème 3 :

1) Soit la fonction numérique g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

a- Etudie le sens de variation de g et calcule $g(1)$.

b- En déduis le signe de $g(x)$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2 - x$.

a- Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b- Calcule $f'(x)$.

c- Montre que $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. En déduire le tableau de variation de f .

d- Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 ; donnez, justifiant, un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune d'elles.

3) On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère ortho normal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 4cm.

a- Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à (C) .

b- Etudie la position de (C) par rapport à (D) .

c- Détermine les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D) .

d- Trace (C) et (D) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Problème 4 :

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = x + \frac{2(1+\ln x)}{x}$.

1. a) Déterminez l'ensemble de définition de f et les limites de f aux bornes de cet ensemble.
b) On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x^2 - 2\ln x$:
 - Etudiez les variations de h sur $]0; +\infty[$.
 - En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0; +\infty[$
- c) Etudiez les variations de f ; dressez son tableau de variation.
d) Prouvez que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
2. a) Tracez la courbe (C_f) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(O; I; J)$
b) On désigne par $A(k)$ l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = k$. Calculez $A(k)$.
c) Pour quelle valeur de k a-t-on $A(k) = 8$?

Problème 5 :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, de déterminer ensuite dans la partie B la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie C, cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

Partie A :

1. Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1$
 - a. Montre que la fonction g est dérivable et que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$
 - b. Etudie les variations de la fonction g puis détermine le signe de $g(x)$.
2. a. Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b. Montre que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donne le tableau de variations de f .

Partie B :

(C) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère ortho normal $(O; I; J)$, unité graphique 2 cm.

1. soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.

- a) Étudie le sens de variation de h puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0,4 ; 0,7]$.
 - b) Montre que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$.
2. a- Vérifie que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
b- Utilise les résultats de la question 1.a) pour déterminer les positions relatives de Γ et Δ .
 3. Construis Γ et Δ dans le repère ortho normal $(O ; I ; J)$.
 4. a- Calcule au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dx$.
b- En déduis l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe (C) , la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Problème 6 :

Dans tout le texte e désigne le nombre réel qui vérifie $\ln e = 1$. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère ortho normal $(O ; I ; J)$, unité graphique : 2 cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = -2\ln x - xe + 1$.

- c. Détermine les limites de g en 0 et en $+\infty$.
- d. Étudie le sens de variation de g .
- e. Montre que dans $[0,5 ; 1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α .
Détermine un encadrement de α à 0,1 près.
- f. En déduis le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B : Etude de la fonction f

1. Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Soit f' la fonction dérivée de f . Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis étudie le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
3. Montre que $f(\alpha) = \frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$
4. Donne le tableau de variation de f .
5. Construis (C)

Problème 7 :

1. Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$
 - a. Dresse le tableau de variation de g .
 - b. Calcule $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
2. Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$
 - a. Dresse le tableau de variation de f .
 - b. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions α et β ($\alpha < \beta$).
 - c. i- Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f .
ii- Étudie le signe de $f(x) - y$ puis en déduis la position de (C) et (Δ) .
 - d. Tracer (C) et (Δ) dans le même repère.

Problème 8 :

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

1. Étudie les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
2. Dresse le tableau de variation de g puis en déduire son signe sur $]0 ; +\infty[$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + 2 \frac{\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation.
c) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) , puis étudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ) .
2. Détermine les coordonnées du point A sachant que la courbe (C) admet au point A une tangente (T) parallèle à (Δ) .
3. Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
4. Trace (C) et (Δ) dans le même repère.
5. Hachure puis calcule l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) ; la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Problème 9 :

Pour tout x appartient à $\mathbb{R} - \{-2\}$, on pose : $U(x) = \frac{3x-6}{x+2}$.

1. a) Résous dans $\mathbb{R} - \{-2\}$ l'équation $U(x) = -1$.
c) Résous dans $\mathbb{R} - \{-2\}$, l'équation $U(x) = 1$.
d) Etudie le signe de $U(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R} - \{-2\}$.
2. a- Etudie les variations de la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{3x-6}{x+2}\right)$.
b -Le plan affixe euclidien étant rapporté à un repère orthonormé. Tracer la courbe représentative (C) de la fonction f .
3. Soit la fonction g définie par : $g(x) = \ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|$.
a. Ecris l'expression de $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
b. Etudie les variations de la fonction g .
c. Trace la courbe représentative (Γ) de la fonction g dans un repère orthonormé.
d. Montre que (Γ) admet pour centre de symétrie le point $w(0; \ln 3)$.
4. Soit h l'application de $] -2; 2[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = \ln\left(\frac{-3x+6}{x+2}\right)$.
Montre que h est une bijection de $] -2; 2[$ sur $\mathbb{R}$ puis détermine l'application réciproque h^{-1} de h .

Problème 10 :

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$.

On considère par (C) la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
2. a- Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition de D_f .
b- En déduis l'équation des éventuelles asymptotes à la courbe (C) . On note Δ l'asymptote oblique.
3. Dresse le tableau de variation f .
4. Démontre que le point $A(0; 0)$ est centre de symétrie pour la courbe (C) de f .
5. Construis la courbe (C) .
6. A l'aide d'une intégrale par parties, calcule l'aire de la surface délimitée par la courbe (C) , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$.

Problème 11 :

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 1 - \ln x)$ et de construire sa courbe représentative (C_f) ce qui fait l'objet de la partie A; puis de décrire un procédé d'approximation du nombre par lequel f admet un minimum, ce qui fait l'objet de la partie B.

A/1- On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$.

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

- a- Etudie le sens de variation g et ses limites aux bornes de l'intervalle de définition.
- b- En déduis l'équation de $g(x) = 0$ admet une solution et une seule et que $1,30 \leq \alpha \leq 1,35$.
- c- Etudie le signe de $g(x)$.
2. a/ Etudie les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
- b- Exprime $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire sens de variation de f .
- 3/ Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; i; j)$ d'unité graphique 2 cm.
- a- Démontre que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) .
- b- Détermine le point d'intersection B de (C_f) et Δ ; préciser la position (C_f) par rapport à Δ .
- c- Construis (C_f) et Δ en précisant la tangente en B à position (C_f) .
- 4- Pour tout réel $t \geq e$; calculer l'aire $A(t)$ de la portion du plan compris entre (C_f) et Δ et les équations $x = e$; et $x = t$.
- B/ Approchement de α .
- 1.a- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$ ou h est la fonction définie sur $I = [1,30; 1,35]$ par $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$.
- b- Justifie la croissance de h sur I et montrer que pour tout x de I ; $h(x)$ appartient à h .
- c- Prouve que pour tout x élément de I , $\frac{-1}{3} \leq h'(x) \leq 0$.
- En déduis pour tout x de I , $|h'(x)| \leq \frac{1}{3}$.
- d- Démontre que à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que pour tout élément de I , $|h(x) - \alpha| \leq |x - \alpha|$.
- 3- Soit (U_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = h(U_n)$ et la condition initiale $U_0 = 1,30$.
- a- Démontre à l'aide de l'inégalité des accroissements finis pour tout entier naturels n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$.
- b- En déduis pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \frac{5}{100} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
- c- Détermine la suite de la limite de la suite (U_n) .
- d- Détermine un entier naturel n_0 , tel que $|U_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-6}$. Que représente U_{n_0} pour α ?
Donne la valeur de U_{n_0} et une valeur approchée près de α .

Problème 12 :

Dans ce problème n 'est un entier naturel différent de zéro et on considère la famille de fonction f_n définie sur

$$[0; +\infty[\text{ comme suite : } \begin{cases} f_1(x) = x^n \ln(1 + \frac{1}{x}) \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2cm, et on note (C) la courbe représentative de la fonction f_n .

A- Dans cette première partie, on propose d'étudier la fonction f_1 .

1.a- Etudie la continuité de f_1 en 0 comportement en $+\infty$.

b- Etudie le comportement de rapport $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Que peut-on conclure pour la fonction f_1 et la courbe (C_1) ?

2.a- Justifie la dérivabilité f_1 sur $[0; +\infty[$. Calculer $f'_1(x)$ puis $f''_1(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $[0; +\infty[$.

b- Etudie successivement les variations de f'_1 et de f_1 et dressé le tableau de variation de f_1 .

3- Trace la courbe (C_1) , son asymptote et tangente au point O. Tapez une équation ici.

B- La seconde partie est consacrée à l'étude des fonctions f_n lorsque $n \geq 2$.

1. Etudie la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 puis le comportement de f_n en $+\infty$.

Justifie la dérivabilité f_n sur $[0; +\infty[$.

Démontre que: $f'_n : x^{n-1}g_n(x)$ ou g_n est une fonction définie sur $]0, +\infty[$ que l'on déterminera.

b- Etudie les variations de g_n et en déduire le signe de $g_n(x)$.

c- Dresse le tableau de variation de f_n .

C- La troisième partie porte sur la courbe C_n lorsque $n \geq 2$

1- Quelle est la tangente à (C_n) en O origine du repère ?

2- Etudie la position relative de (C_n) et (C_{n+1}) pour $n \geq 2$. Quelle est la position (C_1) par rapport à toutes les courbes (C_n) ?

3. a- Détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]$. Que peut-on conclure pour (C_2) .
 b- On précisera la position de (C_2) par rapport à la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$.
 4. Trace (C_2) et (C_3) dans le même que (C_1) .

Problème 13 :

A. La fonction numérique de la variable réelle x , est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x.$$

1. a- Calcule les limites de faux bornes de son ensemble de définition.
 b. Etudie le sens de variation f puis dresser son tableau de variation.
 2. a- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique ℓ et que $\ell \in]1; 2[$.
 b. Etudie le signe de $f(x)$ lorsque x décrit sur $\mathbb{R}_+^*$.
 B. On se propose dans cette partie de calculer une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.
 a) Etudie les variations de $\varphi(x)$. Prouver que l'image par $\varphi(x)$ de l'intervalle $[1; 2]$ est un intervalle contenu dans $[1; 2]$.
 b) Montre que ℓ est l'unique solution de $\varphi(x) = x$.
 2. On considère alors la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \end{cases} n \in \mathbb{N}$
 a) Démontre que pour tout entier naturel n , on a $1 \leq U_n \leq 2$.
 b) Prouve que pour tout entier x de $[1; 2]$ on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

- c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montre que, pour tout entier n on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |U_n - 1|$
 d) Montre que la suite U converge vers ℓ .
 e) Détermine un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-2} près de ℓ .

C. La fonction g est définie sur $[0; 1]$ par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = \frac{-7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \end{cases} \text{ pour } 0 < x \leq 1$$

a) Etudie la dérivabilité de g en 0.

b) Soit g' la dérivée de la fonction g .

Calcule $g'(x)$ pour $x \neq 0$, puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $0 < x \leq 1$.

c) En déduis le signe de $g'(x)$ lorsque x décrit $]0; 1]$. Dresse le tableau de variation de la fonction g .

D. Dans cette partie, l'objectif est le tracé de la courbe représentative (C) de la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (Unité graphique 10cm.)

1. a- Montre qu'une équation de la tangente (d) à la courbe (C) de g en son point d'abscisse 0 est $y = x$.
 b- Détermine les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et de la courbe (d) .
 c- Etudie la position relative de (C) et de (d) .
 d- Soit α la fonction définie sur $\left[0; e^{\frac{-7}{2}}\right]$ par $\alpha(x) = g(x) - x$.

Etudie le sens de variation de fonction et en déduire que pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0; e^{\frac{-7}{2}}\right]$ on a : $0 \leq \alpha(x) \leq 5 \cdot 10^{-5}$. Sachant que l'épaisseur d'un trait de crayon est de l'ordre du dixième de millièmètre, est-il possible de distinguer, sur l'intervalle $\left[0; e^{\frac{-7}{2}}\right]$ courbe (C) de la droite (d) ?

2. Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction β définie sur $[0; 1]$ par :

$$\beta(x) = \frac{-7}{8}x^2 + x$$

- a) Montre que la droite (d) est la tangente à la courbe (Γ) en son point d'abscisse 0.
 b) Etudie la position relative de (C) et de (Γ) .
 c) Trace, sur un même repère graphique (d) ; (Γ)

Problème 14 :

Partie I

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$.

1. Précise l'ensemble de définition D_f de f , et en déduis les variations de f' . En énonçant le théorème utilisé.

2.a- Etudie la dérivabilité de f' fonction dérivée f , et en déduis les variations de f' .
 b. Soit F la restriction de f' à l'intervalle $I =]-1; 0]$. Démontre que F est une bijection de I sur un intervalle à préciser. En déduis que dans I l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique notée α . On ne cherchera pas à calculer α , mais on montrera que $\alpha > -\frac{1}{2}$.

c- Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

d- Des résultats précédents, déduis le signe $f'(x)$ pour $x \in Df'$ et les variations de f .

1. Détermine les limites de f aux bords Df .

2. Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

a- Démontre que h est le prolongement par continuité de f en 0.

b- Etudie la dérivabilité de h en zéro.

Conclusion de la partie I Donne le tableau de variation de f et construis sa courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en précisant l'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

Partie II

$\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien muni repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la Δ d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

1. Soit $C = S(C)$ (image de C par S) comme courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Vérifie que $g(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x} \right|$ et précise Dg , ensemble de définition de g .

2. Résous graphiquement $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.

Partie III

1. Justifie que $\forall n \in \mathbb{N}^* f(n) < 1 < g(x)$. En déduire l'encadrement suivant de e :

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n+1}$. Précise cet encadrement si $n=1$.

Soit $l(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^* l(n)$ est majoré par $\frac{2}{n}$.

2. Donne un rang n partir duquel l'encadrement ci-dessus de e permet d'obtenir une valeur approchée de e à 10^{-3} c'est-à-dire $\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| < 10^{-3}$.

Problème 15 :

I. Pour réel k strictement positif ; on considère la fonction f_k définie sur $[0; +\infty[$ par : $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$. Soit (C_k) la courbe représentant les variations de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé, d'unités (5cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

1. Etudie le sens de variation de g .

2. En déduis que pour tout réel α positif ou non nul, $\ln(1+x) \leq \alpha$.

II.

1- Calcule $f'_1(x)$ pour tout réel x appartenant à $[0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1 .

2- Montre que pour tout réel x appartenant à $[0; +\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$.

En déduis la limite de f_1 en $+\infty$.

3. Dresse le tableau de variation de f_1 .

III-

1- Calcule $f'_k(x)$ pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k .

2. Montre que pour tout réel x appartenant à $[0; +\infty[$ $f_k = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)$.

En déduis la limite de f_k en $+\infty$.

3.a- Dresse le tableau de variation de f_k

b- Montre que pour tout réel x appartenant à $[0; +\infty[$, on a $f_k(x) \leq \frac{k}{2}$.

4. Détermine une équation de la tangente T_k à (C_k) .

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Etudier la position relative C_p à (C_m) .
 6. Trace les courbes (C_1) à (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives T_1 à T_2 en O dans le repère orthogonal du plan.

IV-

Soit λ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire en unité d'aire, du domaine de délimité par la courbe (C_k) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Sans calculer $A(\lambda)$, montrer que $A(\lambda) \leq \int_0^\lambda kxe^{-x} dx$ (on pourra utiliser les résultats de la question préliminaire I-)

2. Calcule à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale : $\int_0^\lambda kxe^{-x} dx$.

3. On admet que $A(\lambda)$ a une limite en $+\infty$. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) \leq k$.

Interprète graphiquement ce résultat.

Problème 16 :

Partie A :

Soit f la fonction numérique de la variable x définie sur $] -1 ; 1]$ par : $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2cm.

I.1- Prouve que la courbe (C) admet deux asymptotes dont on donnera les équations.

2. a- Détermine f^{-1} .

b- Dresse le tableau de variation de f , puis trace (C) .

3. a- Par la technique de l'intégration par parties, calcule l'intégrale : $J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$.

b- En déduis l'aire A de la portion du plan située dans le premier quadrant et limitée par (C) , l'axe des abscisses et la droite d'équation : $x = \frac{1}{2}$.

II. On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = f(\sin x)$ ou f est la fonction définie ci-dessus.

1. a- Démontre que g est une primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$h(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

b- Calcule l'intégrale $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} dt$. On donnera le résultat sous la forme $J_2 = \ln a$ ou a est un réel strictement positif.

2. On considère la suite (I_n) $n \in \mathbb{N}$ définie par : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t} dt$.

Explique brièvement pourquoi $I_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. On pose pour tout entier naturel n , $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{4^n \cos t} - \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t} \right) dt$

a- Prouve que $K_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

b- En déduis que, pour tout entier naturel n on a : $0 \leq I_n \leq \frac{\ln b}{c^n}$ ou b et c sont deux réels à déterminer.

c- Détermine la limite de la suite (I_n) $n \in \mathbb{N}$.

Partie B :

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction F_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$F_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} + \dots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}$$

c- Soit F_n' la fonction dérivée de F_n . Calcule $F_n'(t)$.

On établira que pour tout réel t de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $F_n'(t) = \frac{1 - \sin^{2n} t}{\cos t}$.

d- Calcule $F_n(0)$.

2.a- Exprime l'inégalité $\ln n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_n(t) dt$ en fonction de J_2 et J_2 et I_0 . En déduis que :

$$F_n = \left(\frac{\pi}{6}\right) = \alpha g\left(\frac{\pi}{6}\right) + \beta I_n \text{ ou } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes réelles à déterminer.}$$

b- En déduis la limite de la suite (U_n) $n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2^2} + \frac{1}{5 \times 2^7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \times 2^{2n-1}}.$$

Problème 17 :

Partie A :

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(-1 + \sqrt{1+x})$$

1. Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentant les variations de f dans le muni du repère orthonormé $(0, \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ et A le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 3.

Calcule l'ordonnée de A . Soit B le point $(\mathcal{C})$ d'abscisse $\frac{5}{4}$; P le projeté orthogonal de B sur l'axe $(0, \vec{e}_1)$ et H le projeté orthogonal de B sur $(0, \vec{e}_2)$.

Détermine les coordonnées des points B ; P et H .

Place les points A ; B , et H puis trace la courbe $(\mathcal{C})$ dans $(0, \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Partie B :

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. A tout point M d'affixe z , la rotation r associe le point M' d'affixe z' .

1.a- Exprime z' en fonction de z . On notez $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$; $(x; y; x'; y') \in \mathbb{R}^4$. Exprime x' et y' en fonction de x et y puis x et y en fonction de x' et y' .

b- Détermine les coordonnées des points A' , B' et P' images respectives des points A , B , et P par la rotation r .

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$ et (Γ) la courbe représentant les variations de g dans le repère $(0, \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

a- Montre que si $M \in (\mathcal{C})$, son image M' par r appartient à (Γ) .

b- Trace sur le graphique précédent la courbe (Γ) et les points A' ; B' et P' .

Partie C :

1- Calcule $\int_0^{2\ln 2} g(x) dx$. Interprète graphiquement cette intégrale.

2-.a-Détermine en unité d'aire (u. a), l'aire α du domaine plan limité par $[AO]$, $[OH]$ et $[HB]$ et m'arc de courbe $(\mathcal{C})$, d'extrémité B et A .

b- Soit $I = \int_{\frac{5}{4}}^3 \ln(-1 + \sqrt{1+x}) dx$. Trouve une relation entre α et I puis en déduire la valeur de l'intégrale I .

Fonction exponentielle

Exercice 1 :

Simplifie les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 4}$$

$$B = e^{\ln 3} \cdot e^{\ln 5}$$

$$C = \ln\left(\frac{e^{-1}}{e}\right) - e^{\ln 7}$$

$$D = e^{\ln 1} - 1$$

$$E = e^{\ln \frac{1}{5}} + e^{\frac{4}{5}}$$

$$F = 3 \ln(\ln e) - e^{\ln 1}$$

$$G = e^{\ln \sqrt{e}} - \sqrt{9e^{\ln e}}$$

$$H = e^{(\ln 3^2 - \ln 2)}$$

$$I = (e^{\ln 6} - 1)(e^{\ln 6} + 1)$$

$$J = \ln(e^3 + 1) - \ln(1 + e^{-3})$$

Exercice 2 :

Démontre pour tout nombre réel x , les relations suivantes :

$$\ln(e^x + e^{-x}) = \ln(1 + e^{-2x})$$

$$x + \ln(1 + e^{-x}) = \ln(1 + e^x)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

$$\frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

Exercice 3 :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$e^x = -2 ; 2e^x - 1 = 0 ; e^{2x-1} = e^{3-2x} ; e^{x^2+7} = e^{-3x+5} ; -1 + 2e^{-x} = 0 ; e^{3x+2} = 4 ; e^x + e^{-x} = 2$$

$$\frac{e^x}{1-2e^x} = 5 ; (e^x - 3)(e^x + 2) = 0 ; e^x(e^x - 4) = 0 ; \frac{1}{2+e^x} = 2e^{-x} ; e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 ; 4e^{2x} - e^x + 2 = 0$$

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0; 2e^{2x} - 2e^x - 3 = 0; e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0; \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} = 7; e^{4x} - 4e^{2x} - 21 = 0;$$

$$e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0; e^{2x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0; 4^x + 2^{x+3} - 3 = 0; 5^{2x} + 5^x - 2 = 0;$$

$$2^{2x+1} - 2^x - 105 = 0; 2^{2x+3} - 3 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0$$

Exercice 4 :

Résous dans les inéquations suivantes :

$$e^x > -2; e^{3x-1} \leq e^{2x+4}; e^{x^2-2} \leq e^{4-x}; e^{\frac{1}{x}} > e^{x-2}; e^{2x+3} < 3; e^{-x} < 0; 2e^x - 1 \geq 0$$

$$3e^{2x} + e^x - 4 < 0; e^{2x} - 4e^x - 5 \leq 0; 2e^{2x} - 3e^x + 2 > 0; e^{2x} - 4e^x + 3 \geq 0; 3e^{6x} + 5e^{3x} - 2 > 0;$$

$$2e^{3x} - 2e^{2x} - 20e^x - 16 \leq 0; (e^x - 3)(2 - e^x) \geq 0$$

Exercice 5 :

Résous dans les systèmes équations suivants :

$$\begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^{x-y} = 2 \end{cases}; \begin{cases} 3e^x + e^y = 13 \\ e^x - 2e^y = -5 \end{cases}; \begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}; \begin{cases} e^{4x} \times e^y = e^{-2} \\ xy = -2 \end{cases}; \begin{cases} e^x + 2e^y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{e^x}{e^{2y}} = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3e^x - 2\ln y = 13 \\ 5e^x + 3\ln y = 9 \end{cases}; \begin{cases} \ln(y+6) - \ln x = 3\ln x \\ e^{6x} \times e^y = e^{-6} \end{cases}; \begin{cases} \ln(x+4) - \ln(y+1) = 3\ln 2 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{cases}; \begin{cases} x^y - y^x = 0 \\ x^4 - y^8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 2\sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x - 2^{2+y} = 0 \end{cases}; \begin{cases} 3^x \times 3^{2y-1} = 1 \\ 3^{x+2} \times 3^y = 3 \end{cases}$$

Exercice 6 :

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$

- 1) a) Calcule $P(1)$
b) Vérifie que : $p(x) = (x-1)(2x^2 - 7x - 15)$
- 2) a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.
b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) \leq 0$
- 3) déduis-en dans $\mathbb{R}$, la résolution de :
a) l'équation : $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 - 8\ln x + 15 = 0$
b) l'équation : $2e^{3x} - 9e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$.
c) L'inéquation : $2e^{3x} - 9e^{2x} - 8e^x + 15 \leq 0$.

Exercice 7 :

Soit le polynôme P définie par : $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$

1. a) Calcule $P(1)$
b) Détermine les réels a, b et c tels que : $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
2. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.
3. Déduis-en dans $\mathbb{R}$ la résolution des équations suivantes :
a) $4(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - \ln x + 1 = 0$
b) $e^{-3x} + 4 = e^{-2x} + 4e^{-x}$
c) $2^{3x+2} - 2^{2x+2} - 2^x + 2 = 0$
d) $4(\log_a x)^3 - 4(\log_a x)^2 - \log_a x + 1 = 0$

Exercice 8 :

1. On considère la fonction f définie $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1)e^{-3x}$. Trouve trois nombre réels $a; b; c$ tels que la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$ soit est une primitive de f dans $\mathbb{R}$.
2. Détermine les réels a et b pour que la fonction F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .
a. $f(x) = (2x+1)e^x$ et $F(x) = (ax+b)e^x$ b. $f(x) = (x+1)e^{-\frac{x}{2}}$ et $F(x) = (ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$
3. Détermine les réels a, b et c pour que la fonction F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f
 $f(x) = x^2 - 1$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-3x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$

Exercice 9 :

calcule les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3 - e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x - e^x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 4)e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)^2 e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x + 4}{e^x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x - e^{-2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 2x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x^2 e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(1 - x^3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{e^x - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + xe^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + 2e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - (x + 1)e^{1-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 2x - 1}{e^x - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - x^2 e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x - e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{e^x - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)e^{1-x} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)(1 + e^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + 1 + e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2)e^{-x} + x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + e^{-x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 4e^x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{1}{e^x - 1} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{2x} - 5e^x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + e^{\frac{-x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 4 + \frac{4}{e^x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{1 + xe^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x} + 2e^{-x})$$

Exercice 10 :.....

Dans chacun des cas suivants, démontre $f'(x)$ donnée :

$$\begin{cases} g(x) = x - 2 + 2e^{-x} \\ f(x) = (x - 3)e^x + 2x + 3 \\ f'(x) = e^x g(x) \end{cases} ; \begin{cases} g(x) = 2e^x + 2x - 7 \\ f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x}) \\ f'(x) = e^{-x} g(x) \end{cases} ; \begin{cases} g(x) = (x + 2)e^{x-1} - 1 \\ f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{1}{2} x^2 \\ f'(x) = xg(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = xe^{-x} - 1 \\ f(x) = (x+1)e^{-x} + x \\ f'(x) = -g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) = (1-x)e^{1-x} + 1 \\ f(x) = xe^{1-x} + x - 2 \\ f'(x) = g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) = 1 + (2x-3)e^{-2x} \\ f(x) = x - (x-1)e^{-2x} \\ f'(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = 1 - x^2 e^x \\ f(x) = \frac{x}{1+xe^x} \\ f'(x) = \frac{g(x)}{(1+xe^x)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) = 1 - (1+x)e^{1-x} \\ f(x) = \frac{x}{1-e^{1-x}} \\ f'(x) = \frac{g(x)}{(1-e^{1-x})^2} \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) = (2+x)e^{-x} - 2 \\ f(x) = \frac{x^2}{e^{-x}-1} \\ f'(x) = \frac{xg(x)}{(e^{-x}-1)^2} \end{cases}$$

Exercice 11 :

Etudie la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes en $x_0 = 0$

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^{-x}-1}; \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}; 2) \begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}+1}; \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}; 3) \begin{cases} f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}; \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} f(x) = (1-e^{-x})\ln x; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}; 5) \begin{cases} f(x) = x - e + \frac{e}{\ln x}; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = -e \end{cases};$$

Exercice 12 :

1. Calcule chacune des intégrales suivantes à l'aide d'intégration par parties :

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)} dx; I = \int_0^{\ln 2} \frac{4e^x}{e^{2x}+4} dx; I = \int_{-3}^0 xe^{2x} dx; I = \int_{-1}^1 (2x+1)e^x dx$$

2. Calcule chacune des intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties

$$I = \int_0^\pi e^{2x} \sin x dx; I = \int_0^\pi e^x \sin x dx; I = \int_0^1 (x+1)^2 e^{-x} dx; I = \int_1^{e^3} x(\ln x)^2 dx; I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$I = \int_0^1 (3x^2 - x + 1)e^x dx; I = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx; I = \int_1^2 x^2 \ln x dx$$

Problème :

Problème 1 :

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x - 5$.

1. Etudie le sens de variation de E . (On ne demande pas de déterminer g , ni de construire sa courbe)
2. a- Calcule $g(0)$ et $g(2)$.
b- Démontrer que l'équation : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x + x + 5 = 0$ admet une solution unique α et tels que $1,30 < \alpha < 1,31$.

Partie B :

Soit la fonction numérique f définie sur $] -\infty; 5[$ par : $f(x) = \ln(5-x)$.

1. Prouve que $f(\alpha) = \alpha$.
2. a- Démonstre que $\forall x \in [0; 3]; \text{ on a : } |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
b- En déduis que $\forall x \in [0; 3]; \text{ on a : } |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.
c- Démonstre que si $0 \leq x \leq 4$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$.
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique (3cm), on désigne (C) la représentation graphique de la fonction f .
a. Trace la courbe (C), puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées (x, y) tels que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ on note (S) cette partie.
b. En remarquant que, $\forall x \neq 5, \frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$; Montre que $\int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$

- c. Prouve que l'aire A de la partie (S) en cm^2 est donnée par $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$.

Problème 2 :

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 2 - \frac{4}{e^x + 1}$. (C) Désigne sa courbe représentation graphique dans le plan muni d'un repère d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

- Détermine la limite de f aux bornes de son ensemble de définition
- a- Prouve que la droite (Δ_1) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.
b- Précise la position de (C) par rapport à (Δ_1) .
- a- Justifie que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on : $f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1}$.
b- En déduis que la droite la droite (Δ_2) d'équation $y = x = 2$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
c- Précise la position de (C) par rapport (Δ_2) .
- a- Prouve que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$.
b- Etudie le signe de $f'(x)$. En déduis le sens de variation de f . Dresse le tableau de variation de f .
- Trace les droites (Δ_1) et (Δ_2) puis la courbe (C) en précisant sa tangente au point d'abscisse nulle.
- Détermine l'ensemble des primitive de f sur de $\mathbb{R}$.

Problème 3 :

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$

On désigne par (C) sa courbe representative dans le plan muni d'un repere orthonorme.

- Détermine la limite de $f(x)$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interprète ces résultats.
- a- Etablis que pour x reel $f'(x) = -(x + 1)e^{-x}$. En deduis le signe de $f'(x)$, puis le tableau de variation de f .
b- Ecris l'équation de la tangente (T) a la courbe (C) au point d'abscisse $x = 0$.
c- Construis la courbe (C) et la tangente (T) dans le muni du repère orthonormé $(O ; I ; J)$ (unité 2cm)
- Démontre que l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions distinctes sur $[-2 ; 4]$
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x}$.
a. Détermine les réels a et b pour que g soit une primitive de f .
b. Calcule en unité d'aire la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limite par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 2$ et $x = 4$. Donne une valeur approchée de l'aire a 10^{-2} près par défaut en cm^2 .

Problème 4 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$.

- a- Démontre que pour tout réel x , on a : $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$.
b- Démontre que pour tout réels x , on a : $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$.
d- Détermine les limites en ∞ et en $+\infty$.
e- d- Dresse le tableau de variation de f sur son ensemble de définition. Représenter la fonction f dans un repère orthothonormé. (unités 4cm sur ox et 2cm sur oy)
- On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t ou t est positif et exprimer en seconde, la concentration g de la substance de la substance injectée est :
 $g(t) = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On rappelle que la « la concentration » est rapport entre la quantité du liquide et la quantité du sang qui le contient.
a. En utilisant les résultats de la question 1- ; donne le tableau de variation de la concentration du sang en fonction du temps t .

- b. Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ? On donnera une valeur approchée par défaut de ce résultat en concentration est-elle maximale ? On donnera une valeur approchée par défaut en centime de secondes.
- c. Détermine les instants t_1 et t_2 pour les quels la concentration est égale au quart de sa valeur maximale.

Problème 5 :

Partie A :

A l'instant $t = 0$ on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3ml d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en ml en fonction du temps t en heures est $f(t)$, où f est sur $[0 ; 12]$ par :

$$f(t) = 3e^{-0,1t}.$$

1. Détermine $f'(t)$ et justifier que pour tout $t \in [0 ; 12]$, $f'(t) < 0$.
2. Dresse le tableau de variation de f sur $[0 ; 12]$.
3. Calcule $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; $f(6)$ et $f(8)$. Que représente chacune de ces valeurs ?
4. Trace la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques (1cm sur (ox) et 4cm sur (oy)).

Parti B :

Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieur à **1,25ml**, ainsi on procède à une seconde injection.

- 1) Au bout de combien de temps on procèdera à la seconde injection ? (On déterminera ce temps graphiquement et par calcul).
- 2) On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de **4,5ml**. Le patient court -il un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection ?

Problème 6 :

On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une petite. Le nombre de bactéries en centaine est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où t représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

- 1) a- Calcule $f(0)$ et interprète ce résultat.

b- Montre que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$. En déduis la limite de f en $+\infty$.

On appelle cette valeur la saturation. Que peut-on en conclure pour la courbe (C) de f ?

c- L'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions ? Justifier la réponse.

- 2) Montre que la dérivée f' de f vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 1)^2}$. En déduis le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

- 3) Soit (T) la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe (C). Déterminer l'équation de (T).

- 4) Recopie et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant à 10^{-2} près.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$								

- 5) Trace (C), (T) ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à (C).

- 6) Calcule à la minute près l'instant t_0 où le nombre de bactéries sera égal à 200.

- 7) Détermine graphiquement au bout de combien de temps, la population de cette colonie dépassera 80% de sa saturation.

Problème 7 :

A)

1) Résous l'équation différentielle : $4y'' + y = 0$.

2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative (C) passe par le point $\Omega(0 ; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

B)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - 2x + e^{2x}$

a- Etudie les variations de la fonction g .

b- En déduis le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$. (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité 2cm sur (Ox) et 1cm sur (Oy)

a) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Démontre que la droite $(\Delta) : y = x + 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudie la position de (C) et (Δ) .

d) Calcule $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}}$ puis dresse le tableau de variation de f .

e) Trace (C) et (Δ) .

3) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x}$.

a. Prouve que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Calcule en cm^2 l'aire $A(D)$ de la partie du plan limitée par (C) , l'axe des abscisses et les d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Problème 8 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$.

On désigne par (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ unité graphique : 1cm .

1) Dresse le tableau de variation de f .

2) Montre que f réalise une bijection de $[1 ; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

3) Trouve l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse nulle.

4) Trouve les coordonnées des points d'intersections de la courbe (Cf) avec les axes du repère.

5) Trace la courbe (Cf) et la tangente (T) dans le même repère.

6) soit F la fonction définie par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. Où $a ; b ; c$ sont des nombres réels.

a- Détermine les réels $a ; b ; c$ pour que : F soit une primitive de f .

b- Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Cf) , la tangente (T) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Problème 9 :

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^x$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère

Orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Dresse le tableau de variation de la fonction f puis Trace sa courbe.
Trace dans le même repère la courbe (C_g) de la fonction $g(x) = e^x$

Détermine les points communs à (C_f) et (C_g) .

Calcule l'aire de la portion du plan définie par l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$-1 \leq x \leq \text{et } f(x) \leq g(x)$$

Problème 10 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère ortho normal $(O; I, j)$.

1. Etudie la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$).
2. Démontre que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$ et précise la position de la courbe C par rapport à la droite Δ .
3. a) Calcule la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f .
b) Dresse le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.
c) Calcule $f'(1)$ et en déduis le signe de $f'(x)$ pour tout réel x .
d) Dresse le tableau de variation de la fonction f .
4. Soit I l'intervalle $[1, 9; 2]$. Démontre que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α .
5. Trace la droite Δ et la courbe C (unité graphique : 2 cm).

Problème 11 :

PARTIE A :

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$

1. Calcule $g'(x)$ et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Détermine les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Dresse le tableau de variation de g .
4. Donne le signe de $g(x)$.

PARTIE B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Calcule $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$.
2. a) Détermine la limite de f en $-\infty$.
a. Détermine la limite de f en $+\infty$.
3. On pourra remarquer que : si on pose : $X = 1 + 2e^x$, $f(x)$ s'écrit $4 \frac{X}{(X-1)^2} \frac{\ln X}{X}$
4. Dresse le tableau de variation de f .
5. Trace C .
6. Soit α un réel strictement positif.
a. Vérifie que, pour tout réel x , $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$
b. En déduis la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$
c. Calcule, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$
d. Donne une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

Problème 12 :

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Détermine la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Étudie le sens de variation de g , puis dresse son tableau de variation.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
 - a. Vérifie que 0 est l'une de ces solutions.
 - b. L'autre solution est appelée α . Montre que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
4. Détermine le signe de (x) suivant les valeurs du réel x .

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1. Détermine la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).
2. Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Étudie le sens de variation de f .
3. Montre que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la **partie A**. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).
4. Établi le tableau de variation de f .
5. Trace la courbe (C) , représentative de f dans le plan rapporté à un repère ortho normal (unité graphique 2 cm).

Problème 13 :

On désigne par $\mathbb{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, a, b et c des réel quelconques. Les fonctions f_0, f_1, f_2 , et f sont respectivement définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réel par :

$$f_0(x) = e^{-\frac{x}{2}}; \quad f_1(x) = xe^{-\frac{x}{2}}; \quad f_2(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad f(x) = (a + bx + cx^2)e^{-\frac{x}{2}}$$

On désigne par C_0, C_1 , et C_2 les courbes représentative de $f_0; f_1$ et f_2 dans le repère.

A- On se propose de représenter C_0, C_1 , et C_2 .

1- Étudie les variations des fonctions $f_0; f_1$ et f_2

2- Précise par leurs coordonnées dans le repère $\mathbb{R}$, les points d'intersection de (C_0) et (C_1) ; (C_1) et (C_2) .

3- Étudie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, le signe de chacune des expressions :

$$f_1(x) - f_0(x); \quad f_2(x) - f_0(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) - f_1(x);$$

4. Trace les courbes C_0, C_1 , et C_2 dans le repère $\mathbb{R}$, et hachuré le domaine fermé (E) déterminé par trois courbes C_0, C_1 , et C_2 , c'est-à-dire l'ensemble E des points M du plan dont les coordonnées (x, y) dans le repère

$$\text{vérifient : } \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ f_2 \leq y \leq f_0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f_1 \leq y \leq f_0 \end{cases}$$

B- On propose de calculer l'aire de (E)

1. Soit n , un entier naturel quelconque. Démontre qu'en posant : $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-\frac{t}{2}} dt$.

On définit une fonction I_n qui l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels pour une ensemble définition.

2. Soit n , un entier naturel et x un réel quelconque.

Démontre que : $I_{n+1} = -2x^{n+1}e^{-\frac{x}{2}} + 2(n+1)I_n(x)$.

3. Soit x un réel quelconque :

a- Calcule $I_0(x)$ en fonction de x .

b- En déduis les expressions $I_1(x)$ et $I_2(x)$ en fonction de x .

4. Calcule l'aire de (E)

On se propose de calculer la dérivée d'ordre n de f . On désigne par f^0 (ou f).

f^1 (ou f') ; f^2 (ou f'') ; f^3 (ou f''') etc les dérivées successives de la fonction f .

1. Démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n , on peut trouver trois réels $\alpha_n; \beta_n$ et γ_n vérifiant tout nombre réel : $f^{(n)}(x) = (\alpha_n + \beta_n x + \gamma_n x^2) e^{-\frac{x}{2}}$.

On trouve $\alpha_0 = a; \beta_0 = b$ et $\gamma_0 = c$ et pour tout entier naturel n ; le raisonnement par récurrence montrera que $\alpha_{n+1}; \beta_{n+1}$ et γ_{n+1} vérifie :

$$\alpha_{n+1} = \beta_n - \frac{1}{2}\alpha_n; \quad \beta_{n+1} = 2\gamma_n - \frac{1}{2}\beta_n \quad \text{et} \quad \gamma_{n+1} = -\frac{1}{2}\gamma_n.$$

2. Pour chaque entier naturel ; on pose :

$$\beta'_n = 4\beta_n - 4n\gamma_n \quad \text{et} \quad \alpha'_n = \alpha_n + 2n\beta_n + 4n(n+1)\gamma_n - \frac{1}{2}$$

Démontre que (γ_n) ; (β'_n) ; et (α'_n) sont des suites géométriques de raison $\frac{-1}{2}$.

3. En déduis pour chaque entier naturel n ; l'expression de α_n ; β_n et γ_n en fonction de n ; a ; b et c .

Problème 14 :

Partie A :

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto e^{2x} - 2e^x$$

1. a- Vérifie que le tableau de variation de f est bien le suivant

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	0	$+$
$f(x)$	0	-1	0	$+\infty$

2. Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-\ln 2$.

3. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g'(x)$ puis celui de $g(x)$.

a- Détermine $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout réel x .

b- Du signe de $g''(x)$, déduis celui de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$.

c- Etudie la position de (C) par rapport à un repère orthonormé d'unité graphique 1cm .

Partie B :

Pour tout entier naturel n , on note f_n la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$ et (C_n) a courbe représentative. Prouve que toutes les courbes (C_n) passent par un même point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

Partie C :

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie par :

$$h(x) = \frac{1}{e-1} e^x - x - \frac{1}{e-1}$$

On désigne par $(\mathcal{H})$ la représentation graphique de h dans le plan rapporté un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm .

1. a- Calcule $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$.

b- Dresse le tableau de variation de h .

c- Prouve que la courbe $(\mathcal{H})$ admet un point une asymptote dont on précisera l'équation.

d- Utilise les variations de h pour déterminer le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x .

2. Trace la courbe $(\mathcal{H})$.

3. On considère la fonction numérique φ de la variable réelle x définie par :

$$\varphi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}. \text{ On note } (\Gamma) \text{ sa courbe représentative de admet } \varphi \text{ dans le repère précédent}$$

a- Etudie le sens de variation de φ en précisant ses limites aux bornes de son intervalle de définition.

b- Prouve que la courbe (Γ) admet une asymptote dont on précisera.

c- Etudie les positions relatives des courbes $(\mathcal{H})$ et (Γ) .

d- Trace la courbe (Γ) sur le même graphique que la courbe $(\mathcal{H})$.

4. a- Etabli que pour tout réel x : $(\varphi) = \int_x^{x+1} h(t) dt$.

b- Donne une interprétation géométrique de $\varphi(0)$.

Problème 15 :

Partie A :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ direct. On désigne par f l'application du plan qui à tout point M distinct de O et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{5}{z}$ ou $\bar{z}$ est conjugué de z .

1. Détermine l'affixe du point A' image par f du point A d'affixe $1 + i$.

Vérifie que les points O, A et A' sont alignés.

2. Montre que pour tout point M distinct de O , les points O, M et M' sont alignés.

3. Trouve l'ensemble (Γ) des points invariants par f .

4.a- Soit $z \neq 0$, montrer que si $|z - (1 + i)| = \sqrt{2}$.

b- En déduis que si M est un autre point O du cercle (C) de centre A passant par O , alors son image M' par f appartient à une autre droite (D) que l'on déterminera.

c- Montre que tout point de (D) est l'image par f d'un point de $(C) - \{O\}$ par f .

d- Trace $(C), (\Gamma), (D)$ et (C) dans le même repère.

e- En déduis l'image $(C) - \{O\}$ par f .

Partie B :

n est un entier non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$.

1.a- Étudie les variations de f_1 puis donne une équation de la tangente (T) à sa courbe (C_1) au point d'abscisse 0 .

b- Trace (C_1) et (T) dans le même repère (unité 3cm).

c- Exprime en cm^2 l'aire du domaine plan limité par $(T), (C_1)$ et la droite d'équation $x = 1$.

2- Montre que f_1 réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. Construis sur le même repère que (C_1) la courbe (C'_1) de la bijection réciproque f_1^{-1} .

3. a- Calcule $f'_n(x)$ et donne son signe sur $[0; +\infty[$. Précise $f'_n(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Donne le tableau de variation de f_n . Calcule $f_n(n)$; quel est son signe ?

b- Démontre par récurrence que, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $e^{n+1} > 2n + 1$, en déduis le signe $f_n(n + 1)$.

d- Démontre que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n; n + 1]$.

Cette solution est notée U_n .

e- Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n}$.

f- En remarquant que pour tout $x \in [0; +\infty[$ $\frac{x-n}{x+n} = 1 - \frac{2n}{x+n}$, Montre que sa valeur moyenne

M_n et f_n sur $[0; U_n]$ est égale à : $1 - \frac{1}{U_n} + \frac{e^{-U_n}}{U_n} - 2 \left(\frac{n}{U_n} \right) \ln \left(\frac{U_n}{n} - 1 \right)$. En déduis $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

Equation différentielle

Exercice 1 :.....

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

$$f' - 5f = 0 ; f' + 7f = 0 ; 7f' = f ; 3f' + \frac{4}{3}f = 0 ; -2f' + \sqrt{2}f = 0 ; 2f' - f = 0 \quad f' - 4f = 0 ;$$

Exercice 2

Vérifie que les fonctions f données sont solutions des équations correspondantes.

1. $f(x) = xe^{2x}$ et $y' - 2y = e^{2x}$
2. $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $2y' + y = x^2 + 2x - 2$
3. $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ et $y' + y = 2(x + 1)e^{-x}$
4. $f(x) = (x + 1)e^{-2x}$ et $y' + 2y = e^{-2x}$
5. $f(x) = 1 - 2xe^{2x}$ et $y' - 2y = -2(e^{2x} + 1)$

Exercice 2 :.....

1. Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = x^2 + 1$ et $g(x) = ax^2 + bx + c$.
Détermine les réels a, b et c tels que g soit une solution de (E)
2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = xe^x$ et $g(x) = (ax + b)e^x$
Détermine les réels a et b pour que g soit une solution de l'équation (E')
3. Soit (E'') l'équation différentielle : $y' + 3y = \sin x$ et $g(x) = a \cos x + b \sin x$
Détermine les réels a et b pour que g soit une solution de (E'')

Exercice 3 :.....

Dans chacun des cas suivant, détermine la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

$$f' - f = 0 \text{ et } f(2) = 0 ; 2f' + 3f = 0 \text{ et } f(0) = 5 ; -f' + 6f = 0 \text{ et } f(3) = 1 ; f' + 3f = 0 \text{ et } f(1) = 1$$
$$2f' - 5f = 0 \text{ et } f(1) = -1 ; -f' + 2f = 0 \text{ et } f(3) = -2$$

Exercice 4 :.....

- 1) Résous l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$. Détermine la solution particulière dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (2 ; 1)
- 2) Résous l'équation différentielle (E') : $y' - 3y = 0$. Détermine la solution particulière de l'équation (E') qui s'annule en 0.
- 3) Résous l'équation différentielle (E'') : $4y' - 3y = 0$. Détermine la solution particulière de l'équation (E'') qui prend la valeur 1 en -4.

Exercice 5 :.....

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

$$y' = x^2 + x - 2 ; y' = \cos 3x ; y'\sqrt{x} = 1 ; y' = x + \sin x ; (x^2 + 1)y' = x ; xy' = 1 ; x^3y' + x^2 + 1 = 0 ;$$
$$y' = 2 ; y' = 1 + \tan^2 x ; y' \sin x - \cos x = 0 ; y' = 3x$$

Exercice 6 :.....

1. Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y = x^2$.
 - a. Détermine une fonction polynôme g , de degré deux, solution de (E).
 - b. Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E') : $y' + 2y = 0$
 - c. Résous l'équation (E').
 - d. Donne les solutions de l'équation (E).
2. a) Résous l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$
b) Détermine un polynôme du second degré $P(x)$ solution de l'équation différentielle :
$$y' - 2y = 8x^2 - 8x \quad (1)$$

c) Démontre que les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{2x} - 4x^2$, où k est un réel donné quelconque, sont solutions de l'équation différentielle (1).

Exercice 7 :.....

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = x^2 + 1$

1. Détermine une fonction polynôme g de degré solution de (E)
2. Démontre qu'une fonction est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation (E') : $y' + 2y = 0$.
 - a) Résous l'équation (E')
 - b) Donne les solutions de l'équation (E)

Exercice 8 :.....

Soit l'équation différentielle (E) : $f' + 2f = 5\cos x$

1. Résous l'équation différentielle (F) : $f' + 2f = 0$.
2. Détermine les nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = a\cos x + b\sin x$ est une solution de (E)
3. Démontre qu'une fonction h est une solution de (E) si et seulement si $h - g$ est une solution de (F)
4. En déduis les solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 9 :.....

On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$.

1. Résous l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$.
2. Soient a et b deux réels et soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^x$
 - a) Détermine a et b pour que g soit solution de l'équation (1).
 - b) Montre que h est une solution de l'équation (2) si et seulement si $g + h$ est solution de l'équation (1)
 - c) En déduis l'ensemble des solutions de l'équation (1)
3. Détermine la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Exercice 10 :.....

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2x + 1 - e^{-2x}$.

- 1) Vérifie que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x - (x + 3)e^{-2x}$ est solution de (E)
- 2) a) Montre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
 - c) Résous (E') et en déduis les solutions de (E)
- 3) Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$.

Exercice 11 :.....

Vérifie que les fonctions f données sont solutions des équations correspondantes.

1. $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ et $y'' - 4y = 0$
2. $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et $y'' + 2y' + y = 0$
3. $f(x) = x\sin x$ et $y'' + y = 2\cos x$
4. $f(x) = e^{-x}\sin x$ et $y'' + 2y' + 2y = 0$
5. $f(x) = x - 2$ et $4y'' + 4y' + y = x + 2$
6. $f(x) = e^{-x}\ln x$ et $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$

Exercice 12 :.....

Résolvez les équations différentielles proposées.

$$\begin{array}{ll} y'' - 4y' + 3y = 0 & y'' - y = 0 \\ y'' - 5y' + 6y = 0 & 2y'' - y' - y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} y'' + 2y' + y = 0 & y'' - 2y' + y = 0 \\ 9y'' + 6y' + y = 0 & 4y'' + 12y' + 9 = 0 \\ y'' + y = 0 & y'' + y' + y = 0 \end{array}$$

$$4y'' + 9y = 0 \qquad y'' + 3y' + 4y = 0$$

Exercice 14 :.....

Déterminez la solution f de l'équation différentielle donnée, vérifiez les conditions données.

- 1) $y'' - 2y' + y = 0$; $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$
- 2) $y'' - y' - y = 0$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$
- 3) $y'' + 4y = 0$; $f(0) = 6$ et $f'(0) = 10$
- 4) $y'' + y = 0$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$
- 5) $y'' - 4y' - 5y = 0$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = -6$
- 6) $y'' - 4y = 0$; $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$
- 7) $y'' - 3y' + 2y = 0$; $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$

Exercice 15 :.....

Etudiez les variations et tracez dans un plan muni d'un repère ortho normal la courbe représentative (C) de la solution f de l'équation différentielle proposée vérifiant la courbe des conditions (S) données.

1. $y' - 3y = 0$; (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.
2. $2y' - y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (2 ; e).
3. $y'' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (0 ; 0) et admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en ce point.
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
5. $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées (ln 2 ; 0) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4
6. $y'' - 2y + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 16 :.....

On se propose de déterminer les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle. (E)

(E) : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$

1. Déterminez une fonction polynôme du second degré, g , solution de l'équation (E).
2. Démontrez que φ est solution de (E) si et seulement si, $\varphi - g$ est solution de l'équation différentielle (E') définie par : (E') : $y'' + 2y' + y = 0$
3. Résolvez (E') ; puis déduisez - en l'ensemble des fonctions φ solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 17 :.....

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$.

1. a) Vérifiez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \ln x$ est solution de (E).
b) Résolvez l'équation différentielle (E') : $y'' + 3y' + 2y = 0$.
2. a) Montrez qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation différentielle (E').
b) En déduisez les solutions de (E).

Exercice 18 :.....

On considère les équations différentielles (E) : $f'' + 4f = 3\cos x$ et (E') : $f'' + 4f = 0$.

1. Quelles sont les fonctions g solutions de (E')
2. Vérifiez que la fonction cosinus est solution de (E)
3. g étant une solution de (E') vérifiez que toute fonction h définie sur par : $h(x) = g(x) + \cos x$ est solution de (E)
4. Parmi les fonctions h définies à la question 3), déterminez celle qui vérifie :
 $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 19 :.....

1. Soit (E) l'équation différentielle : $y'' - y = 4xe^x$ et $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$. Déterminez les réels a et b tels que g soit une solution de (E)
2. On considère l'équation différentielle : (E) : $y'' - y' - 6y = 0$ et $h(x) = ax + b$. Déterminez les réels a et b pour que h soit une solution de l'équation (E)
3. Soit (E) l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 3y = 6x^2 + 5x$ et $g(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminez les réels a , b et c tels que g soit une solution de (E).

Exercice 20 :.....

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

$$1 + 6x^2 + y'' = 0 ; y'' = \cos 3x ; 2y'' + e^{2x} - e^{-2x} = 0 ; y'' = (x+1)e^x ; y'' = 4x + 1 \text{ et } y'' = 3.$$

Exercices de perfectionnement

Exercice 21 :.....

On se propose de résoudre le problème suivant :

1. Trouvez une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété suivante : $\forall x > 0, f'(x) - 3f(x) = 3\sin x$ (E)
2. Trouve tous les polynômes P du 3^{ème} degré telles que, pour tout réel x : $x \times P'(x) - 3 \times P(x) = 0$
3. Soit une fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que $f(1) = 0$ et soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par la relation : $f(x) = x^3 \times h(x)$
 - a. Calcule $h(1)$ et calcule $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et $h(x)$.
 - b. Démontre que : f vérifie (E) ssi : $\forall x \in]0, +\infty[, h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$
 - c. On suppose que f vérifie (E). Démontre que h est définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} dt$
 - d. Détermine $h(x)$ en fonction de x par une intégration par partie
 - e. Démontre qu'il existe une unique fonction f solution du problème posé et donne l'expression de $f(x)$.

Exercice 22 :.....

On se propose de résoudre l'équation différentielle : $(E_1): y' - 2y = \frac{2}{1+e^{-2x}}$

1. Détermine la solution de l'équation différentielle $(E_2): y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x} \times g(x)$.
 - a. Calcule $g(0)$
 - b. Calcule $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.
 - c. Démontre que f est solution de (E_1) si et seulement si : $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$
 - d. En déduis l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E)

Exercice 23 :.....

On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1^{er} ordre tel que : $\begin{cases} y' + 4z = 2e^{2x} \\ z' - y = e^{2x} \end{cases}$ Où y et z désignent deux fonctions inconnues de variables réels x .

- a) Forme l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait $y(x)$
- b) Intègre l'équation (E) et en déduire la solution générale du système.
- c) Précise la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $z = -1$ pour $x = 0$.

Exercice 24 :.....

1. Résous l'équation différentielle d'inconnue f tel que : $x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$.
2. Soit l'équation (E) : $x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$.
3. On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
 - a- Montre que l'équation (E) est équivalente à $x^2 g'(x) + 2xg(x) = 1$.
 - b- Déduisez-en la résolution de l'équation (E).

Exercice 25 :.....

1. Résous l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
2. Soit (E) l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ où f' désigne la fonction dérivée de f .
 - a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de (E).
 - b. Soit f un élément de (E). Vérifie que pour tout réel x , $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
 - c. En déduire que si f un élément de (E) alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
 - d. Détermine l'ensemble solution de (E).

Exercice 26 :.....

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

Un échantillon de sang prélevé sur un individu, contient certaines quantités de globules (rouges et blancs) dont le rythme de croissance est modélisé par la fonction $R(t) = \frac{3000}{1+0,25t}$. Où t est le temps écoulé en jours.

On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la population $P(t)$ de globules c'est-à-dire que $P'(t) = R(t)$ et au temps $t = 0$, l'échantillon compte 1000 globules c'est-à-dire : $P(0) = 1000$.

1) a- Détermine $P(t)$ désignant la population de globules après t jours.

b- Evalue le nombre de globules présent dans l'échantillon au bout de 72 heures.

c- Après combien de jours le nombre de globules atteindra-t-il 12000 ?

2) a- Etudie le sens de variation de $P(t)$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b- Calcule la limite de $P(t)$ en $+\infty$.

3) On donne la fonction H définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $H(t) = 48000(1 + 0,25t)\ln(1 + 0,25t) - 11000t$

a- Montre que H est une primitive de P sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b- Calcule l'intégrale $I = \int_5^{10} P(t)dt$ puis en déduire interprétation concrète du résultat.

c- Calcule le nombre de globules entre le cinquième et dixième jour.

Exercice 27 :.....

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t , exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique y à variable réelle t . La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que : $y' = ky(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1. Détermine l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$.
2. Sachant qu'au bout de deux heures le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N le nombre de microbes au bout de trois heures.
3. Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures.

Exercice 28 :.....

Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, le nombre d'atome de radium $N(t)$ échappé à l'instant t est donné par la relation : $N'(t) = -25 \cdot 10^{-8} N(t)$ et $N(0) = N_0$ où (t est exprimé en années).

1. Détermine l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t .
2. Au bout de combien d'années le nombre d'atome de radium aura-t-il diminué de moitié ?

Exercice 29 :.....

Une population de poissons d'une certaine espèce croît au cours des années selon la loi :

$g' = \frac{g}{5}$ (1), où g désigne la quantité de poissons (exprimée en milliers) dépendant du temps t (exprimé en années).

1. Résoudre l'équation différentielle (1).
2. Sachant qu'à la date $t = 0$ la population comprend un millier de poissons, trouver l'expression de $g(t)$.
3. Au bout de combien d'années la population dépassera-t-elle pour la 1^{ère} fois 4 milliers de poissons ?
4. En réalité un prédateur de cette espèce empêche une telle croissance, tuant chaque année une certaine quantité de poissons (dépendant de l'effectif total).

La population suit la loi : $g' = \frac{g}{5} - \frac{g^2}{15}$ (2).

- a. On pose $h = \frac{g}{3-g}$ et on suppose que pour tout t on a : $g(t) \neq 3$. Montre que g est solution de (2) si et seulement si h est solution de (1).
- b. Trouve les fonctions h solutions de (1), puis les fonctions g solutions de (2).
- c. Trouve la fonction g solution de (2) telle que $g(0) = 1$.
- d. Vers quelle limite tend la population de poissons

Exercice 30 :.....

1. Le plan est muni du repère (O, I, J) .

- a. Détermine la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $9f'' - 18f' + 10f = 0$ et dont la courbe représentative passe par les points $A(0; \sqrt{3})$ et $B(\pi; 0)$.
- b. Détermine la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2g' + g = 0$ et dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$.
2. Soit θ la température d'un corps à l'instant t . La température ambiante est 30°C . À chaque instant t , on pose : $x(t) = \theta(t) - 30$. On suppose que la fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie : $x' = -k^2x$ ($k \in \mathbb{R}^*$). À l'instant 0 la température du corps est 70°C et au bout de 5 minutes elle n'est plus que 60°C .
 - a. Déterminer $\theta(t)$, où t est mesuré en minutes.
 - b. À quelle température sera le corps au bout de 20 minutes ?

Exercice 31 :

Un bloc de métallique est déposé dans un four dont la température constante est de 1000°C . La température θ est une fonction du temps t (en heures) qui vérifie l'équation différentielle (E) : $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$; $k \in \mathbb{R}_+^*$

1. On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$. Ecris une équation différentielle (F) satisfaite par y .
2. Résous (F) puis (E)
3. Le bloc, initialement à 40°C est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$. Sa température est de 160°C au bout d'une heure. En déduis l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.
4. a) Calcule la température du bloc au temps $t = 3$ heures
b) Détermine le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C .

Exercice 32 :

À l'instant $t = 0$, un corps à la température $\theta_0 = 60^\circ\text{C}$ est placé dans l'air ambiant à la température $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$.

Au bout de 10 minutes, la température du corps est 50°C . Sa température à la date t exprimée en minutes, est solution de l'équation différentielle : $\frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - \theta_1)$ où k est une constante réelle.

On pose : $\varphi(t) = \theta(t) - \theta_1$

1. a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par φ
b) Détermine $\varphi(t)$
c) En déduis $\theta(t)$ en fonction de k .
d) Détermine la constante k puis, en déduis l'expression définitive de $\theta(t)$
2. a) Au bout de combien de minutes la température du corps diminuera-t-elle de moitié ?
b) Quelle sera la température du corps au bout d'une heure ?

Suites Numériques

Généralité

Exercice 1 :

Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_n = 3n + 1$

1. Calcule U_0 ; U_1 et U_2 .
2. Exprime les termes U_{n+1} ; U_{n-2} , et U_{2n-3} en fonction de n .

Exercice 2 :

Soit la suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $V_n = n^2 + 2n - 1$

1. Calcule V_0 ; V_1 et V_2 .
2. Exprime les termes V_{n+1} ; V_{n-1} , et V_{2n} en fonction de n .

Exercice 3 :

Soit la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} W_0 = 2 \\ W_{n+1} = 2W_n - 1 \end{cases}$

1. Calcule W_1 et W_2
2. Détermine les termes W_{n+1} ; W_{n-2} , et W_{2n}

Exercice 4 :

1. Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4} \end{cases}$. Calcule U_1 ; U_2 et U_3 .
2. Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = \frac{1}{3}U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n \end{cases}$. Calcule U_2 ; U_3 et U_4 .

Exercice 5 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ représente sur $()$ à l'aide de la droite d'équation $y = x$ les 4 premiers termes de la suite (U_n) .

- a. $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = -U_n + 5 \end{cases}$ b. $\begin{cases} U_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n \end{cases}$ c. $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + 1 \end{cases}$

Exercice 6 :

Démontre par récurrence les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n-2) = (n+1)(n+2) \dots \times 2n$

Exercice 7 :

1. La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$. Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 2$
2. La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{9}{6-U_n} \end{cases}$. Démontre que la suite (U_n) est minorée par 3.
3. La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+4}{U_n+3} \end{cases}$. Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 2$.
4. La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3-U_n} \end{cases}$. Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < U_n < 2$.
5. La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$. Démontre par récurrence que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3 \times 2^n - 1$.

Exercice 8 :

Etudie le sens de variation des suites suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 4 - 5n ; \forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{n}{n+2} ; \forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{2n-3}{n+1} ; \forall n \in \mathbb{N}, U_n = n^2 - 2n + 5 ;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = -n^2 + 2n + 4 ; \forall n \in \mathbb{N}, U_n = 2^n - 4 ; \forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{2n} ; \forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$$

Exercice 9 :

1. La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n - 4}{U_n - 1} \end{cases}$. Etudie le sens de variation de (U_n) sachant que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 2$$

2. La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3 - U_n} \end{cases}$. Etudie le sens de variation de (U_n) sachant que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < U_n < 2$.

3. La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3 + U_n} \end{cases}$. Etudie le sens de variation de (U_n) sachant que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 3$.

4. La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = \ln(1 + U_n) \end{cases}$. Etudie le sens de variation de (U_n)

Suite arithmétique :**Exercice 10 :**

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison -2 .

- Donne l'expression de U_n en fonction de n .
- Calcule $U_1 ; U_2 ; U_3$ et U_{20}
- Calcule $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{20}$

Exercice 11 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 3$ et $u_{n+1} = U_n - 2$

- Calcule U_1 et U_2
- Montre que la suite (U_n) est une suite arithmétique.
- Exprime U_n en fonction de n .
- Calcule $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

Exercice 12 :

On considère (U_n) une suite arithmétique de raison r .

- Calcule r et U_0 sachant que : $U_3 = 3$ et $U_4 = 15$.
- Calcule r et U_0 sachant que : $S_{24} = 15$ et $U_6 = 20$.
- Calcule r et S_{12} sachant que : $U_5 = 7$ et $U_{12} = -8$.
- Calcule n et r sachant que : $U_1 = 1, U_n = 7$ et $S_n = 12$.
- Calcule r et U_0 sachant que : $U_1 + U_2 + U_3 = 9$ $U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 35$

Exercice 13 :

- Détermine le réel x sachant que $x, 4$ et 6 sont en progression arithmétique.
- Trouve 3 nombres consécutifs x, y et z d'une suite en progression arithmétique sachant :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x - 6y + z = 6 \end{cases}$$

Suites géométriques :**Exercice 14 :**

Soit (V_n) la suite géométrique de premier terme $V_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{3}$

- Donne l'expression de V_n en fonction de n .
- Calcule $V_1 ; V_2$ et V_{30}

3. Calcule la somme $S = V_0 + V_1 + \dots + V_{30}$.

Exercice 15 :

Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $U_n = \int_n^{n+1} e^{-2x} dx$

1. a) Montre que $U_n = \frac{1}{2}e^{-2n}(1 - e^{-2})$ pour tout entier naturel n .
b) Montre que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
 - a) Exprime S_n en fonction de n .
 - b) Montre que la suite (S_n) converge et précise sa limite.

Exercice 16 :

On considère (V_n) une suite géométrique de raison q .

1. Calcule q et V_0 sachant que $V_2 = 4$ et $V_5 = 32$.
2. Calcule V_5 et S_5 sachant que : $q = 3$ et $V_1 = 2$.
3. Calcule n et q sachant que : $V_1 = 48, U_n = 243$ et $S_n = 633$.
4. Calcule V_1 et q sachant que : $V_3 + V_4 = 160$ et $V_1 \times V_3 = 64$

Exercice 17 :

On considère la suite U_n ($n \geq 1$) des nombres réels définies par $U_0 = 1$ et $5U_n = 2U_{n-1} - 3$

1. Calcule u_1 et u_2 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n + 1$. Montre que la suite (v_n) est une suite géométrique.
3. Calcule v_n puis en fonction de n .
4. Quelle est la limite de u_n en $+\infty$?
5. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Calculer S_n .
6. Quelle est la limite de S_n en $+\infty$.

Exercice 18 :

On considère une suite géométrique (U_n) de premier terme u_i non nul et de raison $q > 0$.

1. Calcule la raison q de cette suite sachant que : $81u_{14} = u_{10}$.
2. On considère la somme $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Exprime S_n en fonction de u_n et n . Précise u_i sachant que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$

Exercice 19 :

1. Simplifie l'expression $E = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$
- a) On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = e^{2n-1}$
Calcule $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_{n+1}$
- b) Démontre $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite géométrique dont on précisera la raison.
- c) Exprime en fonction de n , la somme $S_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
- d) Trouve la valeur minimale de n telle que $S_n > 10$
2. Soit la suite v_n définie par $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \ln(u_n)$
 - a) Exprime la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n
 - b) Exprime le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ en fonction de T_n

Exercice 20 :

1. Détermine le réel y sachant que 4, y et 25 sont en progression géométrique.
2. Trouve 3 nombres consécutifs a, b et c d'une suite en progression géométrique sachant :

$$\begin{cases} a + b + c = 403 \\ c - a = 312 \end{cases}$$

Exercices de perfectionnement

Exercice 21 :

- 1) (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_1 = 2$.
 - a) Calcule u_n en fonction de n .
 - b) Calcule la somme $u_1 + u_2 + \dots + u_7$
 - c) (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $v_1 = 2$; Exprime v_n en fonction de n puis calculé $v_{30} + v_{31} + 32$
- 2) Résous les équations différentielles :
 - a) $y' + 5y = 0$.
 - b) $y'' + 9y = 0$.
- 3) a) Calcule l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$
c) En déduis la valeur de l'intégrale $A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$
- 4) Résous :
 - a) L'équation : $x \in \mathbb{R}, 2(\ln x)^2 - (\ln x) - 6 = 0$
 - b) L'inéquation : $x \in \mathbb{R}, \ln(x - 3) + \ln(x - 1) < \ln(2x + 3)$

Exercice 22 :

On les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n par définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases} \text{ et } v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$$

- 1) Calcule v_0
- 2) Démontre que v_n est une suite géométrique de raison $q=2$.
- 3) Exprime v_n en fonction de n .
- 4) Calcule la limite de v_n .
- 5) Exprime u_n en fonction de v_n puis deduis la limite de u_n .
- 6) Pour entier naturel n , on pose : $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$
- a) Démontre que : $S_n = (1 - 2^{n+1})\ln 2$
- b) Justifie que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis en deduis T_n en fonction de n .

Exercice 23 :

Une entreprise veut réduire au maximum la quantité d'ordures dans une ville. Elle s'engage donc à détruire au moins 30 000 tonnes d'ordures par an.

En 2014, l'entreprise a rejeté 40 000 tonnes d'ordures.

Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité d'ordure qu'elle détruit par rapport à la quantité détruite l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouvelles ordures par an en raison du développement de nouvelles activités.

Pour tout entier naturel n , on note q_n la quantité, en tonnes d'ordures pour l'année $(2014 + n)$. On a alors $q_0 = 40\,000$.

1. a) Calcule q_1 et q_2 .
b) Montre que pour tout entier naturel n , on a $q_{n+1} = 0,95q_n + 200$.
2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $u_n = q_n - 400$.
 - a) Démontre que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
 - b) Pour entier naturel n , exprime (u_n) en de n puis en déduire que pour tout entier naturel n , on a : $q_n = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.
 - c) La quantité d'ordure détruite diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifier.
 - d) Détermine la limite de la suite (q_n) en $+\infty$.

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

- e) Sachant que la durée du contrat s'étale sur une période de 9 ans compté à partir de 2014, calcule une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité d'ordure qui serait durant ce contrat.

Exercice 24 :

- 1) Soit (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$). On définit la suite (v_n) , $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{4} e^{-2un}$.
 - a) Montre que (v_n) , est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 (on exprimera v_0 en fonction de u_0).
 - b) Etudie suivant les valeurs de r la convergence de la suite v_n .
- 2) Soit w_n $n \in \mathbb{N}$, la suite défini par $w_n = \int_0^{\frac{n}{4}} e^{-2x} dx$.
 - a) Calcule w_n en fonction de n .
 - b) Montre que w_n converge vers un nombre réel l que l'on précisera.
 - c) On pose $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n - \frac{n}{8}$. Calcule S_n en fonction de n puis déduis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice 25 :

Après les élections présidentielles au Mali, l'analyse des résultats a montré que le candidat élu avait obtenu v_1 voix, le deuxième avait obtenu v_2 voix, ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats qui avait obtenu v_n voix. De plus on a constaté que le $k^{\text{ième}}$ candidat avec ($k \geq 1$) avait le double de voix de son successeur immédiat $(k+1)^{\text{ième}}$ du classement ; définissant ainsi une suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$

- 1) Prouve que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q .
- 2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.
Un candidat est élu président dès le premier tour, lorsque son de nombre de voix v_1 dépasse la moitié de S_n .
 - a) Détermine la moitié de n et v_1 le suffrage exprimé S_n .
 - b) Examine si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.
- 3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voix. Déterminer alors le nombre de n le candidat qui avaient postulés.

Exercice 26 :

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = 1; u_{n+1} = 2u_n + 1 \text{ et } v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. Montre que v_n est une géométrie dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprime, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
3. Soit la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$
 - a. Montre que pour tout entier naturel n , $S_n = u_n - u_0$
 - b. Calcule S_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

Exercice 27 :

On ajoute une certaine dose d'un antibiotique à un bouillon de culture contenant des microbes sensibles à cet antibiotique. Un ordinateur compte et indique à chaque heure le nombre de microbes vivants dans le bouillon ; on s'aperçoit qu'à chaque heure, le nombre de microbes vivants est la moitié du nombre de microbes précédente.

1. Sachant qu'à 6 heures le bouillon contenait N microbes, calcule le nombre de microbes vivants aux heures suivantes : 7h ; 8h ; 9h ; 10h.
2. Monte que ces nombres sont en progression géométrique. Calculer pour un entier positif n la somme S_n des n premiers termes de cette progression.
3. A 12 heures, on ajoute au bouillon un produit qui annule l'effet de l'antibiotique. On constate alors que le nombre de microbes vivants dans le bouillon augmente de 25% par heure. Calculer le nombre de bouillon vivants dans le bouillon à 14h si $N = 10^{10}$

Exercice 28 :

Un biologiste observe la croissance d'une population de bactéries en milieu fermé.

La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1000 bactéries.

On suppose que la population augmente de 6,5% toutes les heures et que le biologiste rajoute 100 bactéries à la préparation toutes les heures.

On note R_n le nombre de bactéries présentes dans la population au bout de n heures.

On admettra que pour tout entier naturel n , on a : $R_n = 100 + 1,065R_{n-1}$.

On introduit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = R_n + \frac{100000}{65}$.

- 1) Montre que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- 2) Exprime (u_n) en fonction de n puis en déduis l'expression de R_n en fonction de n .
- 3) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries sera-t-il égal à 90% de la capacité maximale du milieu ?

Exercice 29 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$.

- 1) Calcule u_1 et u_2
- 2) a- Démontre que pour tout entier naturel non nul, $0 < u_n < 1$.
b- Démontre que la suite est croissante.
c- Que pouvez-vous en déduire ?
- 3) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.
a) Démontre que la suite (v_n) est géométrique.
b) Calcule, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
c) Démontre que la suite u_n est convergente et détermine sa limite.

Exercice 30 :

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$ (v_n) est la suite définie par : $v_n = \frac{u_n+1}{u_n}$.

- 1) Exprime v_{n+1} en fonction de v_n .
- 2) Déduis –en la nature de la suite (v_n) .
- 3) Exprime v_n en fonction de n puis en u_n en fonction de n .
- 4) On pose $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ la fonction définie par
a) Exprime S_n en fonction de n .
b) Calcule la somme des 30 premiers termes de la suite (v_n) .

Exercice 31 :

Soit U_n une suite géométrique décroissante U tel que : $\begin{cases} U_0 \times U_3 = 32 \\ U_0 + U_3 = 18 \end{cases}$

1. Calcule U_0 et U_3
2. Détermine la raison de la suite U .
3. Donne l'expression de la suite U en fonction de n .
4. On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$. Calcule S_n en fonction de n puis en déduire la somme des 20 premiers termes de la suite U_n

Exercice 32 :

Soit la suite U_n définie par : $\begin{cases} U_1 = -2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1-U_n} \end{cases}$ et la suite $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

- 1) Calcule V_{n+1} en fonction de U_n puis en fonction de V_n .
- 2) En déduis que V_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme V_1 .
- 3) Exprime V_n puis U_n en fonction de n .
- 4) On pose $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$
a) Exprime S_n en fonction de n
b) Calcule la somme de 30 premiers termes de la suite V_n

Exercice 33 :

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^*$ à termes positifs tel que : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ (U_{n+1})^2 = eU_n \end{cases}$

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

- 1) Calcule $U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4$ (on donnera les résultats sous forme de e)
- 2) On pose $V_n = I_n U_n - a$; où ($a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$)
 - a) Détermine le réel a pour que V_n soit une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme V_1 .
 - b) Calcule la limite de V_n puis celle de U_n en $+\infty$
- 3) Soit $a = 1$, on désigne par S_n la somme des n premiers termes de la suites U_n . Détermine S_n et P_n en fonction de n .

Exercice 34 :

On donne deux suites (U_n) et (V_n) telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 2V_n \\ V_{n+1} = 2U_n + 3V_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 2 \end{cases}$$

- 1) Calcule $U_1 ; V_1 ; U_2 ; V_2 ; U_3$ et V_3 .
- 2) On définit deux suites (X_n) et (Y_n) par : $X_n = U_n + V_n$ et $Y_n = U_n - V_n$
 - a) Montre que (X_n) est une suite géométrique et (Y_n) une suite constante.
 - b) Exprime U_n puis V_n en fonction de n
- 3) Calcule la somme des n premiers termes de la suite X_n .

Exercice 35 :

Quatre (4) entiers strictement positifs a, b, c , et d forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier premier avec a .

Trouve ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.

Exercice 36 :

Soit (U_n) une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison r et à partir de U_{10} les termes sont en progression géométrique de raison q .

On donne : $U_1 = 0$; $U_{16} = -\frac{1}{27}$ et $rq = 1$

- 1) Calcule $q ; r ; U_{10}$ et U_{11}
- 2) Calcule deux cas suivants :
 - a) $n \leq 10$
 - b) $n > 10$

Exercice 37 :

Soit la suite (U_n) définie par son premier terme U_0 et par la relation de récurrence : $U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n}$

1. a) Détermine U_0 pour que U_n soit constante.
 b) Démontre que si $U_n < 2$ alors $U_n < U_{n+1} < 2$ ($n \in \mathbb{N}$). En déduire que si $U_0 < 2$ alors pour tout entier naturel on a : $U_n < 2$ et que la suite est monotone.
2. On suppose maintenant que $U_0 = -1$
 - a) Calcule $U_1 ; U_2 ; U_3$.
 - b) Soit la suite V_n définie par : $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$ Démontrer que V_n est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
 - c) Calcule U_n en fonction de n puis étudier sa limite en $+\infty$.

Exercice 38 :

Soit U_n la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \ln(1 + U_n) \end{cases}$

1. Trace la courbe représentation de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ puis en déduire une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite U_n .
2. Démontre que la suite (U_n) est convergente et démontrer qu'elle converge vers 0.

Exercice 39 :

On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par $U_0 = 1$;
 $U_{n+1} = 2U_n + 1$ et $V_n = U_{n+1} - U_n$.

- Montre que V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- Exprime, pour tout entier naturel n , V_n en fonction de n .
- Soit la somme $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$
- Montre que pour tout entier naturel n , $S_n = U_n - U_0$.
- Calcule S_n en fonction de n , puis U_n en fonction de n .

Exercice 40 :

1- f est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

D est le domaine plan limité par la courbe (C) de f la droite des abscisses, les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.
 L'unité graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé est 3cm.

a) Représente D .

b) Calcule l'aire de D en cm^2 .

2) Pour tout naturel n on pose : $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$.

a) A l'aide d'une intégration par partie, démontre que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $I_n = e - nI_{n-1}$

b) Calcule I_0 puis I_1, I_2, I_3 .

Exercice 41 :

Soit (U) une suite arithmétique croissante telle que : $\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 = 9 \\ U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 35 \end{cases}$

1) Calcule le premier terme U_0 et la raison r de cette suite, puis exprime le terme général U_n en fonction de n .

2) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = 2^{U_n}$

a) Montre que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera V_0 et q .

b) Calcule : $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$

Exercice 42 :

Soit (V_n) et (U_n) les suites définies pour tout entier naturel n par : $U_0 = 9$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3$ et $V_n = U_n + 6$

1) Calcule U_4 . (U_n) est-elle une suite arithmétique ? justifie la réponse.

2) Démontre, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}; -6 \leq U_n \leq 9$.

3) Montre que (V_n) est une suite géométrique de terme positif.

4) Exprime V_n puis U_n en fonction de n . Déduis en les limites des deux suites (V_n) et (U_n) .

5) Calcule la somme $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ en fonction de n et en déduis la somme $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n . Calcule les limites de S_n et S'_n .

6) On définit la suite (W_n) par $W_n = \ln(U_n)$ pour tout n entier.

a) Montre que (W_n) est une suite arithmétique

b) Calcule $S''_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$ en fonction de n et détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} S''_n$

c) Calcule le produit $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ en fonction de n et détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

Exercice 43 :

1) Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2-U_n} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

a) Calcule $U_1; U_2; U_3$

b) Compare les quatre premiers termes de la suite (U_n) $n \in \mathbb{N}$ aux quatre premiers termes de la suite (W_n) $n \in \mathbb{N}$ définie par : $W_n = \frac{n}{n+1}$

c) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel , $U_n = W_n$.

2) Soit (V_n) $n \in \mathbb{N}$ la suite de terme général V_n définie par : $U_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

a) Montre que $V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = -\ln 4$.

b) Exprime la somme $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$ en fonction de n .

c) Détermine la limite de la suite S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 44 :

Soit la suite réelle U de première terme $U_0 = 5$ et définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = \frac{2U_n + 4}{U_n + 5}$

- 1) a) Démontre que pour tout entier $n : U_n > 0$
 c) Démontre que pour tout entier $n : U_n \neq 1$
- 2) Donne dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ une représentation graphique de la fonction f définie sur $]5; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+4}{x+5}$ (unité 2 cm).

Utilise cette représentation graphique et la droite d'équation $y=x$ pour placer $U_0; U_1$ et U_2 sur l'axe des abscisses.

- 3) Soit V la suite réelle de terme générale V_n tel que : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 4}$

- a) Démontre que V est une suite géométrique et en donnant le première terme et la raison.
- b) Démontre que V est convergente et calcule sa limite.
- c) En déduis que la suite V converge et calcule sa limite.

Exercice 45 :

- 1) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* U_{n+1} = U_n + \frac{1}{10^n} \end{cases}$

- 1) Calcule $U_2; U_3; U_4; U_5$.
- 2) Démontre que, pour tout entier naturel non nul, U_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique dont-on précisera le premier terme et la raison.
- 3) En déduis une expression de U_n en fonction de n et démontre que la suite (U_n) est convergente.
- 4) On désigne par S_n la somme des n premiers termes de cette suite. Démontre que :
 $S_n = \frac{10n}{9} + \frac{10}{9^2} \left(\frac{1}{10^n} - 1 \right)$. Calcule la limite de (S_n)

Exercice 46 :

Soit a un nombre réel donné.

On considère les suites U définies respectivement par :

- $U_0 = 3; U_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 \times U_{n+1} + (a-2)U_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}; V_n = U_{n+1} - U_n$

1- On pose : $a = 1$

- a- Démontre que la suite V est constante et donne sa valeur.
- b- En déduis que la suite U est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.
- c- On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$; Exprime U_n puis S_n en fonction de n

2- On pose : $a = -5$

- a- Démontre que la suite (V_n) est une suite géométrique dont la raison est 7
- b- Exprime V_n en fonction de n .

Exercice 47 :

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$

- 1) Démontre que la suite (I_n) est positive et décroissante.
- 2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$; détermine la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan^{n+1} x$.
 b) Déduis en que :
 $i_1) \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n + I_{n+2} = \frac{n}{n+1}$; $i_2) \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{n}{n+1}$; $i_3) \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$
- c) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = I_{n+4} - I_n$. Utilise **i1)** pour démontrer que :
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$.

- 3) a) Calcule I_2 .
- b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$
- c) Déduis en que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{\pi}{4}$
- 4) a) Calcule I_1 .
- b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(1) + f(5) + f(9) + \dots + f(4n-3) = I_{4n+1} - I_1$

c) Déduis en que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$

Exercice 48 :

1) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calcule I_1 .

b) Prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$. En déduis $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n$.

c) Montre, en utilisant une intégration par parties, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$

2) On considère la suite réelle (a_n) , définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

a) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$.

b) Déduis-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n$.

Exercice 49 :

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx) dx$

a) Montre que pour tout entier naturel n , $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$.

b) À l'aide d'une intégration par parties montre que $I_n = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2}$

c) Montre que, pour tout entier naturel n , $|I_n| \leq \frac{e^\pi + 1}{1+n^2}$

d) En déduis $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n$. $|I_n|$ désigne la valeur absolue de I_n .

Exercice 50 :

L'objet de l'exercice est d'étudier la suite de terme général $U_n = \int_0^1 f(x) dx$ où $f_n = \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$ convient que $x^0 = 1$.

1) Calcule U_0 et U_1 .

2) Compare x^n à x^{n+1} lorsque $x \in [0;1]$. En déduis que la suite (U_n) est croissante.

3) En observant que $U_{n-1} + U_n = \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1+x} dx$, établi que $U_{n-1} + U_n < \frac{\sqrt{2}}{n}$.

4) A l'aide des résultats précédents, établi que : $\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$.

5) En déduis la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 51 :

On considère la suite (U_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $U_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n =$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

1. Calcul de U_0

Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

a. Calcule la dérivée f' de f

b. Déduis-en U_0 .

2. Calcule U_1 .

3. Etude de la convergence de (U_n) :

a. Prouve que (U_n) est décroissante.

b. Déduis-en que (U_n) est convergente.

c. Montre que $\forall x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

d. Déduis-en la limite de U_n .

4. Pour tout $n \geq 3$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{x^2+1} dx$

Vérifie que $\forall n \geq 3$, on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.

b. En intégrant I_n par parties, montre que $\forall n \geq 3, nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$

Dénombrement et Probabilité

Dénombrement

Exercice 1 :

1. calcule les expressions suivantes :

a) $5! ; 7! ; (2^3)! ; 3(4!) ; \frac{8!}{6!}$

b) $A_8^3 ; A_{10}^4 ; A_{10}^{10} ; C_5^2 ; C_8^3 ; c_{10}^{10}$

c) $\frac{C_{10}^5}{C_{10}^3} ; \frac{A_8^5}{A_8^1} ; C_{15}^{14} + C_3^0$

2. Résoudre dans N^* les équations suivantes :

a. $C_n^2 = 5n ; A_{n+1}^3 = n(n^2 - 1)$

b. $A_n^2 = n(2n + 5) ; A_n^2 = C_n^3$

c. $C_n^2 = 45 ; C_n^3 = 2n ; C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 475n$

d. $C_n^1 + C_n^2 = 10 ; n^2 + 3C_n^2 = 1$

Exercice 2 :

Une urne contient 2 boules rouges, 3 noires et 1 blanche. On tire successivement avec remise 3 boules dans l'urne.

1. Détermine le nombre de tirages possibles.

2. Calcule les cardinaux des ensembles suivants : A : « 2 boules rouges suivies d'une boule noire ». B : « un tirage unicolore ». C : « Le tirage ne contient pas de boules rouges ».

Exercice 3 :

Dans une classe de 20 élèves dont 12 garçons et 8 filles, on veut élire un comité comprenant : un président, un vice-président et un trésorier (pas de cumul de poste).

1. Détermine le nombre de comités qu'on peut former.

2. Calcule les cardinaux des ensembles suivants : A « un comité comprenant que des filles ». B « un comité comprenant des personnes de même sexe ». C « un comité comprenant 2 filles et 1 garçon ». D « le président est un garçon ». E « un comité comprenant au moins une fille ». F « un comité comprenant au plus une fille ».

Exercice 4 :

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 4 boules blanches. On tire simultanément 3 boules.

1. Détermine le nombre de tirages possibles.

2. Dénombre les cardinaux des ensembles suivants :

A « obtenir 2 boules rouges et une boule noire ».

B « obtenir un tirage unicolore ». C « obtenir un tirage tricolore ».

Exercice 5 :

Une urne contient 4 boules blanches, 5 boules rouges et 1 boule noire. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

1. Détermine le nombre de tirages possibles.
2. Détermine le nombre de tirages contenant des boules de même couleur.
3. Détermine le nombre de tirages contenant des boules de couleur différente.
4. Détermine le nombre de tirages ne contenant pas de boules blanches.
5. Détermine le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche.
6. Détermine le nombre de tirages contenant au plus une boule blanche.

Exercice 6 :

Dans une classe de 42 élèves, 25 pratiquent le football, 30 pratiquent le basket et 20 pratiquent les deux. 1) Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le football. 2) Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le basket. 3) Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent ni le football ni le basket.

Exercice 7 :

On dispose d'un jeu de 32 cartes ordinaires

1. combien de "mains" différentes de 8 cartes peut – on constituer ?
2. combien de "mains" différentes de 8 cartes comprenant 2as peut – on constituer ?
3. combien de "mains" de 8 cartes ayant au moins 2 cœurs peut – on constituer ?

Exercice 8 :

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On en prend simultanément 8, ce qui constitue une « main ».

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Dénombre les mains qui contiennent :
 - a. Exactement deux as.
 - b. Aucun as.
 - c. Au moins un as.
 - d. Au plus deux as.
 - e. Exactement deux cœurs et trois piques.
 - f. Exactement deux cœurs, trois piques et un trèfle.

Exercice 9 :

Une association comprenant 20 personnes dont 12 hommes et 8 femmes désirent former un comité de 5 personnes dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes. Trouve de combien de façon l'on peut former ce comité dans chaque cas :

1. chaque membre de l'association accepte de faire partir du comité
2. deux des hommes refusent d'en faire partir
3. monsieur x et madame y refusent de siéger ensemble

Exercice 10 :

I. Un sac contient 25 boules dont 9 rouges, 6 vertes et 10 jaunes. On tire 5 boules du sac.

1. Dénombre les cas possible à cette épreuve si :
2. le tirage est simultané
3. le tirage est successif sans remise
4. le tirage est successif avec remise.

II. Dénombre les cas favorables ainsi que la probabilité dans chaque cas si :

1. le tirage est successif sans remise et le résultat contient au plus 3 jaunes
2. le tirage est simultané et le résultat contient 2 rouges, 2 vertes et 1 jaune.
3. Le tirage est successif avec remise et le résultat contient au moins 7 rouges.
4. Le tirage est simultané et le résultat contient au plus 1 verte
5. Le tirage est successif sans remise et le résultat est unicolore.

Exercice 11 :

Dans une classe de 40 élèves :

- 25 aiment la mathématique
- 30 aiment le français
- 17 aiment la mathématique et le français

Trouve le nombre d'élève :

- a. qui aiment uniquement le français
- b. qui aiment uniquement la mathématique

- c. qui aiment la mathématique ou le français
- d. qui n'aiment aucune des deux matières

Equiprobabilité

Exercice 12 :

Dans une ville, il existe deux lycées, l'un des garçons et l'autre des filles, chaque lycée a une classe de SBT1, une de SBT2 et une de SBT3. Une bourse d'étude est offerte par la ville à six élèves pris parmi les élèves des six classes de terminales. Pour cela on choisit les six meilleurs élèves de chaque classe, soit un total de 36 élèves et les noms des six boursiers sont alors déterminés par tirages au sort parmi les 36 élèves. Calcule la probabilité suivante :

1. Pour que les 6 boursiers soient les 6 élèves de la SBT2 garçons.
2. Pour que les 6 boursiers soient des élèves de la SBT2.
3. Pour que les 6 boursiers soient des filles.
4. Pour que les 6 boursiers soient 3 filles et 3 garçons.
5. Pour que parmi les 6 boursiers, il ait moins de 3 garçons.

Exercice 13 :

Pour célébrer leur succès au bac six élèves d'une classe de TSExp se donnent rendez-vous dans un restaurant de la ville.

Il y a six restaurants au total dans la ville et chaque élève choisit au hasard un restaurant.

1. Quelle est la probabilité pour que chacun des six élèves ait choisi un restaurant différent ?
2. Calcule la probabilité pour que les six élèves choisissent le même restaurant.

Exercice 14 :

Dans une classe de 65 élèves, 35 pratiquent du football, 40 pratiquent du basketball et 5 ne pratiquent aucun de ces deux sports.

1. Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent à la fois le football et le basketball.
2. Détermine le nombre d'élèves qui jouent :
 - a. uniquement au football.
 - b. uniquement au basketball.
3. Dans cette classe on choisit au hasard 3 élèves pour représenter la classe à une compétition interclasse.
 - a. Quelle est la probabilité pour que les trois élèves pratiquent à la fois le football et le basketball ?
 - b. Quelle est la probabilité pour que parmi les trois élèves: 1 pratique uniquement le football, 1 pratique uniquement le basketball et 1 pratique à la fois le football et le basketball

Exercice 15 :

Une urne contient 3 boules jaunes, 1 boule rouge et 2 boules vertes. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne. (Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles)

1. Détermine le nombre de tirages possibles.
2. Calcule la probabilité d'avoir exactement trois boules de même couleur.
3. Calcule la probabilité d'avoir les trois couleurs en même temps.
4. Calcule la probabilité d'avoir au moins une boule verte

Exercice 16 :

Un libraire propose 30 titres différents d'un même auteur : 5 de ces livres sont couverts de cuir et coûtent 9000 francs l'un ; 12 ont une couverture toilée et coûtent 6000 francs l'un ; les autres sont cartonnés et coûtent 3000 francs l'un. Un client vient acheter 3 livres de cet auteur sans préciser de livre particulier.

Le libraire prend au hasard 3 livres de sa collection.

Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :

1. A « Le libraire choisit 3 livres couverts de cuir »
2. B « Le libraire choisit au moins un livre couvert de cuir »
3. C « Le libraire choisit 3 livres ayant la même couverture »
4. D « Le libraire choisit 3 livres pour un montant exact de 15000 francs »
5. E « Le libraire choisit 3 livres dont le coût n'excède pas 12 000 francs ».

Exercice 17 :

On prélève cinq œufs dans un lot de dix œufs dont quatre proviennent d'une poule et d'un coq de race F et six d'une poule et d'un coq de race G. Les œufs d'une race sont indiscernables des œufs de l'autre race.

1. Trouve le nombre de façons possibles de prélever cinq œufs parmi les dix.

2. Calcule la probabilité des événements suivants :

A : « Il y a un seul œuf de race F parmi les cinq œufs prélevés ».

B : « Le prélèvement contient exactement trois œufs de race F ».

Exercice 18 :

Dans le cadre de la prévention des angines hivernales, une étude a été menée pour tester l'efficacité réelle d'un médicament constitué d'un cocktail de vitamines. Dans ce but, on a sélectionné un échantillon de 600 personnes réparties de manière aléatoire en trois groupes : 240 personnes dans le groupe A, 35% de l'échantillon dans le groupe B, et le reste dans le groupe C.

On a administré aux personnes du groupe A durant la période hivernale une dose journalière de ce médicament en le leur disant.

On a administré aux personnes du groupe B un placebo (c'est-à-dire un comprimé neutre, ne contenant aucun élément médicamenteux), tout en leur disant qu'il s'agissait du médicament.

On a administré aux personnes du groupe C le médicament en leur disant qu'il s'agissait d'un placebo.

Les résultats de l'étude sont recensés sur 600 fiches individuelles.

a. 28% des fiches signalent un traitement efficace. Parmi celles-ci 72 fiches correspondent à des personnes du groupe B

b. 75% des fiches correspondant aux personnes du groupe A ne signalent aucune amélioration significative.

1. Reproduis et compléter le tableau suivant : .

	Groupe A	Groupe B	Groupe C	Total
Nombre de fiches signalant un traitement efficace				
Nombre de fiches ne signalant aucune amélioration significative				
Total	240			600

2. a) On choisit une fiche au hasard parmi les 600. On considère les événements suivants :

E_1 : « Il s'agit d'une fiche du groupe A »,

E_2 : « Il s'agit d'une fiche signalant un traitement efficace »,

$E_3 = E_1 \cap E_2$

$E_4 = E_1 \cup E_2$

Calcule les probabilités de ces quatre événements. .

b) On choisit au hasard une fiche du groupe B. On considère l'événement E_5 : « Il s'agit d'une fiche signalant un traitement efficace ». Calcule la probabilité de l'événement E_5 . Le résultat sera arrondi à 10^{-2} . .

3. Pour chacun des groupes, donner les fréquences en pourcentage des fiches signalant un traitement efficace. .

Exercice 19 :

I. Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher dont 10 sont rouges, 3 bleues et 2 vertes.

Le principe d'un jeu est le suivant : le joueur paye 50F au début de chaque jeu et ensuite il tire simultanément 2 boules de l'urne ;

- Le tirage d'une boule rouge ne donne rien
- Chaque boule bleue tirée rapporte 50F
- Chaque boule verte tirée rapporte 250F

II. Un joueur joue une fois, quelle est la probabilité pour ce joueur :

a. de ne ni gagner, ni perdre ? (gagner 0F)

b. de perdre 50F ?

c. de gagner 50F ?

d. de gagner 250F ?

NB: Le gain algébrique du joueur est la différence entre le montant obtenu à l'issue du jeu et celui payé au début du jeu.

Exercice 20 :

- I. Une urne contient 5 boules rouges et 7 boules blanches indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 5 boules de l'urne.

Détermine le nombre de tirages contenant :

- 3 boules rouges et 2 boules blanches.
- boules blanches et 2 boules rouges.
- Résous dans $\mathbb{N}$ l'équation : $4C_n^4 - 5C_n^{n-3} = 0$.

- II. Deux tireurs A et B font feu simultanément sur une cible.

La probabilité que A touche la cible est estimé à $\frac{4}{5}$; et pour celui de B est de $\frac{3}{4}$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- Les deux tireurs touchent tous deux la cible.
- Les deux tireurs manquent la cible.
- La cible est atteinte par le tireur A seulement.
- La cible est atteinte par un seulement.
- La cible est atteint.
- La cible soit manquée.

Exercice 21 :

Un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6a été piqué de telle sorte que les six faces ne sont pas équiprobables. On note P_n la probabilité d'obtenir le chiffre n lors d'un lancé de dé avec $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

D'autre part les nombres $P_1; P_2; P_3; P_4; P_5; P_6$ dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique et que $P_1 \times P_4 = (P_2)^2$.

- Calcule la probabilité d'apparition de chaque numéro.
- On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants :
A : « Le nombre obtenu est pair »
B : « Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »
a. Calcule la probabilité de chacun des événements A et B.
b. Calcule la probabilité pour que le nombre soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.
c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
- On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :
- D'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires.
- D'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :

- S'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1 .
- S'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2 .

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet événement.

- Calcule la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne U_1 puis en déduis la probabilité de l'événement $G \cap A$. Détermine ensuite la probabilité de l'événement G.
- Le joueur est gagnant. Détermine la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer de dé.

Exercice 22 :

Dans une certaine ville, il y a 3 médecins. Quatre habitants malades la même nuit appellent un médecin au téléphone après avoir choisi au hasard un des 3 médecins dans l'annuaire.

- Quelle est la probabilité que les 4 malades appellent le même médecin ?
- Quelle est la probabilité que les 3 soient appelés ?

Exercice 23 :

Un établissement scolaire comporte 55% de filles et 45% de garçons. 20% des filles et 40% des garçons utilisent un moyen de transport individuel pour se rendre à l'établissement ; les autres utilisent des cars de ramassage scolaire qui arrivent tous à 8 heures à l'établissement.

1. Quel est le pourcentage des élèves de l'établissement utilisant un moyen de transport individuel ?
2. On aperçoit la silhouette d'un élève descendant d'un car. Quelle est la probabilité pour que ce soit :
 - a. une fille ;
 - b. un garçon.

Exercice 24 :

Des lycéens préparent le BAC blanc de mathématique. Trois professeurs X; Y et Z sont susceptibles de donner le sujet. D'après les statistiques des années précédentes et d'autres contraintes, les lycéens évaluent à :

* 0,35 la probabilité pour que ce soit X qui choisisse le sujet;

* 0,4 la probabilité pour que ce soit Y;

* 0,25 la probabilité pour que ce soit Z.

Par ailleurs, les lycéens redoutent qu'un certain chapitre noté r ne soit donné à l'examen. Ils pensent qu'ils ont 1 chance sur 10 que le sujet porte sur r si X le choisit, 2 chances sur 5 si c'est Y qui le choisit et enfin 41 chances sur 50 si c'est Z qui fait le choix du sujet.

1. Quelle est la probabilité que le sujet porte sur le chapitre r ?
2. Au BAC blanc, le sujet porte effectivement sur le sujet r. Quelle est alors la probabilité pour que le sujet ait été choisi par :
 - a. par X ?
 - b. par Y ?
 - c. par Z ?

Probabilité conditionnelle

Exercice 25 :

Dans une population, 30% de personnes d'une affection des voies respiratoires supérieures. Il y a 60% de fumeur parmi les malades et 10% de fumeur soit atteint de l'affection. Calcule la probabilité qu'un fumeur soit atteint de l'affection.

Exercice 26 :

Une usine fabrique des ampoules électriques ; 75% sont conformes aux normes et 25% non conformes. Un contrôle qui n'est pas infallible accepte 10% des ampoules non conformes et rejette 4% des ampoules conformes.

1. Calcule la probabilité qu'une ampoule soit acceptée par le contrôle.
2. Sachant qu'une ampoule est acceptée, quelle est la probabilité qu'elle soit conforme aux normes ?

Exercice 27 :

Dans une liste des candidats devant passer le baccalauréat, on compte 52 % de filles. Les filles se répartissent de la manière suivante : 20 % sont dans le domaine des Sciences et Mathématiques (SM), 45 % dans le domaine des Sciences Humaines (SH) et les autres dans le domaine des Langues et communication (LC). En ce qui concerne les candidats garçons, 30 % sont dans le domaine SM, 45 % dans le domaine SH et 25 % dans le domaine LC.

On choisit au hasard un nom dans la liste des candidats. On note :

F, l'évènement « le nom choisi est celui d'une fille » ;

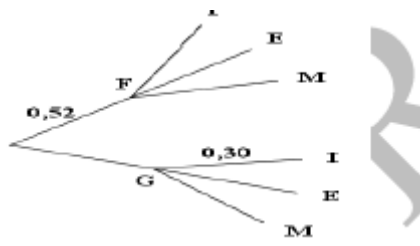
G, l'évènement « le nom choisi est celui d'un garçon » ;

I, l'évènement « le nom choisi est celui d'un candidat inscrit dans le domaine SM » ;

E, l'évènement « le nom choisi est celui d'un candidat inscrit dans le domaine SH » ;

M, l'évènement « le nom choisi est celui d'un candidat inscrit dans le domaine LC ».

1. On considère l'arbre de probabilités ci-dessous.
 - a. Montre que la probabilité de l'évènement I est égale à 0,248.
 - b. Recopie et complète l'arbre de probabilité donné ci - contre.
 - c. Les évènements F et I sont-ils indépendants ?
2. Détermine $PI(F)$, la probabilité de l'évènement F sachant I.
3. Montre que les évènements F et E sont indépendants.



Exercice 28 :
 Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

1. Démontre que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$
2. Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?
3. Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 29 :
 Les résultats d'une étude présentés par l'Institut National de la statistique révèlent : - 45% de la population active sont des hommes. - 25% des femmes et 20% des hommes de cette population active sont au chômage. On interroge au hasard une personne.

1. Construis un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
2. Détermine les probabilités des événements suivants :
 - a. H : « être un homme ».
 - b. F : « être une femme ».
 - c. « être au chômage sachant qu'on est homme femme ».
 - d. « être au chômage sachant qu'on est femme ».
3. Calcule la probabilité pour qu'un individu de cette population active interrogé au hasard soit au chômage.
4. Quelle est la probabilité que l'individu interrogé soit une femme sachant qu'il est au chômage.

Exercice 30 :
 Un arrondissement de m habitants compte 48% d'hommes. Des études statistiques montrent que : 4% des hommes et 7% des femmes sont atteints de paludisme. On choisit un individu au hasard parmi ces habitants. Calcule la probabilité pour qu'il soit :

1. un homme atteint de paludisme.
2. une femme atteinte de paludisme.
3. Une personne atteinte de paludisme.
4. un homme non atteint de paludisme.
5. un homme sachant qu'il est atteint de paludisme.
6. une femme, sachant que cet individu est atteint de paludisme.

Exercice 31 :
 Dans une de terminale 88% des élèves ont déclarés aimer les mathématiques ; 20% ont déclarés aimer la chimie et 15% ont aimé déclarés les mathématiques et la chimie. On choisit un élève au hasard.

1. Quelle est la probabilité que cet élève aime les mathématiques et pas la chimie ?
2. Quelle est la probabilité que cet élève aime la chimie et pas les mathématiques ?
3. quelle est la probabilité que cet élève n'aime ni la chimie ni les mathématiques ni la chimie ?

Variable aléatoire

Exercice 32 :
 Une cible comprend deux parties désignées par 1 et 2. Un tireur lance une fléchette sur une cible. Il atteint la partie 2 avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et marque deux points.

Il atteint la partie 1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et marque alors un point.

1. Quelle est la probabilité pour que le tireur manque la cible ? Il ne marque aucun point.
2. Le tireur lance sa fléchette deux fois. Les deux lancers sont indépendants.

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

3. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des points obtenus.
 - a. Détermine la loi de probabilité de X , son espérance mathématique et sa variance.
 - b. Représente graphiquement la fonction de répartition de X .

Exercice 33 :

Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher numérotées : 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3 .

On tire simultanément 2 boules au hasard de ce sac on note X la somme des numéros portés par les 2 boules tirées.

1. Indique les valeurs possibles de X .
2. Donne-la loi de probabilité de X .
3. Calcule l'espérance mathématique et variance de X .
4. Calcule la probabilité de l'évènement $3 \leq x < 7$.

Exercice 34 :

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard 3 boules.

1. Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :
 - a. Aucune boule rouge n'est tirée.
 - b. Une boule rouge et une seule est tirée,
 - c. Deux boules rouges et deux sont tirées,
 - d. Une boule rouge au moins est tirée.
2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées. Donne la loi de probabilité de X .

Exercice 35 :

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches, on tire simultanément et au hasard 3 boules.

1. calcule la probabilité de chacune des événements suivants :
 - a. aucune boule rouge n'est tirée
 - b. une boule rouge et une seule est tirée
 - c. deux boules rouges et deux seulement sont tirées
 - d. une boule rouge au moins est tirée
 - e. deux boules blanches au plus sont tirées
2. soit x la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.
 - a. Donne la loi de probabilité de x
 - b. Calcule l'espérance mathématique et la variance de x
 - c. Calcule la probabilité de l'évènement $1 \leq x \leq 2$

Exercice 36 :

Dans tout l'exercice on suppose les tirages équiprobables ($n \in \mathbb{N}^*$)

1. Une urne contient $(n + 1)$ boules vertes et $(n - 1)$ boules rouges
Le jeu suivant consiste à tirer une boule de l'urne :
 - Si la boule est rouge, le joueur perd
 - Si la boule est verte, le joueur gagne
 - a. Quelle est la probabilité P_1 que le joueur gagne ?
 - b. Quelle est la probabilité P_2 que le joueur perd ?
2. Lorsque le joueur gagne, il reçoit 200 F CFA, s'il perd il doit verser 300 F FCFA. On définit la variable aléatoire x qui à chaque tirage associe le gain en FCFA. (le gain pouvant être négatif).
 - a. Détermine la loi de probabilité de x
 - b. Calcule l'espérance mathématique de x
 - c. Pour quelle valeur de n , le jeu est-il équitable ? (le jeu est équitable si l'espérance mathématique de la variable x est nulle).

Exercice 37 :

Une étude statistique faite an le nombre de vente de voiture en une journée par un de ses représentants a conduit à la loi de probabilité suivante pour la variable aléatoire x prenant pour valeurs le nombre de ces ventes.

N	0	1	2	3	4	5 et plus
-----	---	---	---	---	---	-----------

$P(x=n)$	0,15	0,40	0,30	0,10	0,05	0
----------	------	------	------	------	------	---

1. Dresse le tableau de la fonction de répartition F de la variable aléatoire x et représente cette fonction dans le plus rapporté à un repère orthogonal convenable
2. Calcule l'espérance mathématique $E(x)$ et la variance $V(x)$ de la variable x .

Schéma de Bernoulli

Exercice 38 :

Un lot de vaccin contre le méningite est efficace à 75%, c'est-à-dire sur 100 personnes vaccinées 75 seulement sont sûres d'être protégés contre la maladie. On vaccine 20 personnes avec ce produit.

Quelle est la probabilité pour que :

1. Aucune des personnes ne soit protégée ?
2. La moitié des personnes est protégées ?
3. Les 20 personnes sont protégées ?

Exercice 39 :

On prend au hasard 3 ampoules électriques d'un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses.

Calcule la probabilité pour que :

1. Aucune ampoule ne soit défectueuse.
2. Exactement une ampoule soit défectueuse.
3. Au moins une ampoule soit défectueuse.
4. Les trois ampoules sont défectueuses.

Exercice 40 :

A la suite de plusieurs campagne de vaccination réalisées dans un village du Kourou, les études ont révélé que la probabilité pour qu'un enfant de moins de 5 ans soit atteint de poliomyélite est de 0,05.

On choisit au hasard un enfant de moins de 5 ans de ce village.

1. Quelle est la probabilité pour que cet enfant ne soit pas atteint de poliomyélite ?
2. On a effectué un contrôle sur 8 enfants âgés de moins de 5 ans dans ce village. Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :
 A : « aucun enfant n'est atteint de poliomyélite »
 B : « trois enfants sont atteints de poliomyélite » C : « au moins quatre enfants sont atteints de poliomyélite ».

Exercice 41 :

Cinq individus ont été témoins d'un meurtre. Parmi eux, on sait que 2 seulement sont menteurs mais on ignore lesquels.

On questionne 2 témoins au hasard sur le meurtre, de façon indépendante. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. Deux versions véridiques ?
2. Deux versions contradictoires ?
3. Deux versions fausses ?

Exercice 42 :

Un car se présente à une frontière, le chauffeur sait que parmi ses 50 passagers, 10 tentent de frauder.

Le douanier choisit au hasard 8 personnes pour le contrôle. Quelle est la probabilité pour que :

1. Les 8 personnes soient des fraudeurs ?
2. L'une au moins soit un fraudeur ?

Barycentre

Exercice 1 :

A et B sont deux points distincts.

Détermine puis construis le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivant :

$$G = \text{bar}\{(A; 1), (B; 3)\}$$

$$G = \text{bar}\{(A; 2), (B; 2)\}$$

$$G = \text{bar}\{(A; -1), (B; 2)\}$$

$$G = \text{bar}\{(A; -2), (B; -6)\}$$

$$G = \text{bar}\{(A; -2), (B; 2)\}$$

$$G = \text{bar}\{(A; 1), (B; 3), (C; 4)\}$$

$$G = \text{bar}\{(A; 2), (B; 2), (C; 2)\}$$

$$G = \text{bar}\{(A; -1), (B; 2), (C; 3)\}$$

$$G = \text{bar}\{(A; 2), (B; -2), (C; 4)\}$$

$$G = \text{bar}\{(A; 2), (B; 3), (C; -6)\}$$

Exercice 2 :

Détermine les nombres réels a et b tels que le point G défini ci-dessous soit le barycentre des points pondérés (A; a), (B; b) et (C; c).

$$\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GC}$$

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Exercice 3 :

Détermine les coordonnées du barycentre G dans chacun des cas suivant :

$$G = \text{bar}\{(A; 5), (B; 2)\} \text{ avec } A(1; 1) \text{ et } B(-1; 2)$$

$$G = \text{bar}\{(A; 2), (B; 1)\} \text{ avec } A(8; -1) \text{ et } B(5; 3)$$

$$G = \text{bar}\{(A; 3), (B; -8)\} \text{ avec } A(0; 3) \text{ et } B(4; 5)$$

$$G = \text{bar}\{(A; -2), (B; -6)\} \text{ avec } A(1; 3) \text{ et } B(-2; 2)$$

$$G = \text{bar}\{(A; -3), (B; -2), (C; 3)\} \text{ avec } A(-1; 0) \text{ et } B(1; 2) \text{ et } C(2; 3)$$

$$G = \text{bar}\{(A; 2), (B; -3), (C; 4)\} \text{ avec } A(-5; 3) \text{ et } B(-2; 2) \text{ et } C(2; 6)$$

$$G = \text{bar}\{(A; -3), (B; -2), (C; 5)\} \text{ avec } A(0; 0) \text{ et } B(1; 7) \text{ et } C(-2; 3)$$

Exercice 4 :

Donne l'ensemble des points M dans chacun des cas suivant :

a. $MG = 2BI$

b. $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IA} = 0$

c. $MG = 3$ et $MG = -5$

d. $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

e. $BM = CM$

Exercice 5 :

Dans le plan affine euclidien ; on considère un triangle équilatérale A, B, C dont le côté mesure a.

1. Construis le barycentre G du système $\{(A, 4); (B, 1); (C, -1)\}$.

2. Soit $f: E \rightarrow R$ tel que $f(M) = 4MA^2 + MB^2 - MC^2$

Détermine puis construire l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = \frac{63}{4}a^2$

Exercice 6 :

Soit A, B, C trois points du plan P tel que $AB = AC = 5 \text{ cm}$ et $BC = 6 \text{ cm}$.

1. Construis le triangle ABC puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

2. Soit G le barycentre des points pondérés $\{(A, 2); (B, 3); (C, 3)\}$. Construire G puis calculer GA.

3. Soit $f: P \rightarrow R$

$$M \rightarrow 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$

a. Exprime $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et MG

b. Calcule $f(G)$.

4. Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = f(A)$.

CSS : Cours de Soutiens Scolaire prof : MMT

Exercice 7 :

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives : $A(3, 1)$; $B(-2, 3)$; $C(1, 0)$

Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des points $2 ; 1 ; -1$

- Trouve les coordonnées G
- Trouve suivant les valeurs du nombre réel K l'ensemble des points M tel que :
- $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$
- Construis les points M du plan tel que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 8$

Exercice 8 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$. On considère les 4 points $A ; B ; C ; D$ tel que

$$A(0; 3); B(-1; 0); C(3; 0) \text{ et } D(x; y)$$

- Détermine les coordonnées x et y de D sachant que : $\|\vec{DA}\| = \|\vec{DB}\| = \|\vec{DC}\|$
- Détermine les réels m et n tels que D soit barycentre des points $(A, 1)$; (B, m) ; (C, n)
- Trouve l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $4\|\vec{MA}\|^2 + 3\|\vec{MB}\|^2 + 5\|\vec{MC}\|^2 = k$
- Détermine le réel k tel que $A(0; 3)$ soit élément de (E) que l'on représentera.

Exercice 9 :

Soit A, B, C un triangle équilatéral de côté 3 ; B' le milieu de $[AC]$ et un point D tel que : $4\vec{AD} = \vec{AB} + 3\vec{BC}$

- Démontre que D est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$; $(B, -2)$; $(C, 3)$. En déduis que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$.
- Démontrer que : $\vec{BB'} = \frac{2}{3}\vec{BD}$
- Calcule DA^2 et DB^2
- Détermine l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation : $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$
- Vérifie que l'isobarycentre du triangle A, B, C appartient à l'ensemble (E)
- Trace (E) .

NB : on fera une figure explicite du triangle A, B, C .

Exercice 10 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O ; I ; J)$ d'unité graphique 1 cm . On considère les points A, B et C d'affixes respectifs :

$$Z_A = (3\sqrt{3} - 2) + i(3 + 2\sqrt{3}) ; Z_B = (1 - 4\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1) ; Z_C = (1 - 4\sqrt{3}) + i(-4 - \sqrt{3})$$

- Calcule $Z_A - Z_B + Z_C$.
- En déduis que le point O est le barycentre du système de point pondérés $\{(A, 1) ; (B, -1) ; (C, 1)\}$
- Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$
 - Vérifie que B appartient à (E)
 - Détermine puis construire (E)
 - Détermine puis construire l'ensemble (D) des points M du plan tel que : $2\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 3\vec{MB}\|$

Exercice 11 :

Dans l'espace E , on note la distance de deux points M et N par MN

- Soit 3 points A, B, C non alignés et I le point défini par : $\vec{AI} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$
- De quel coefficients a, b, c faut-il affecter respectivement les points A, B, C pour que I soit leur barycentre ?
- On suppose maintenant que le triangle ABC est rectangle en A tel que $AB = 2 AC = 1$.
On suppose que : $S = \{M \in E / MA^2 - 2MB^2 - 2MC^2 = -3\}$. Démontre que S est une sphère de centre W et de rayons r à préciser.

Exercice 12 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$; $AC = 6$.

Soit I le milieu du segment [AB].

- 1) Construis le barycentre $G = \{(A, 5) ; (B, -3) ; (C, 2)\}$.
- 2) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis en déduis AG^2 et BC^2 .
- 3) Détermine puis construis l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :
 $\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$.
- 4) Détermine puis construis l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :
 $\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.
- 5) Détermine puis construis l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :
 $5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24$.
- 6) Détermine puis construis l'ensemble E_4 des points M du plan tel que : $5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k$ (on discutera suivant les valeurs de k).
- 7) Détermine puis construis l'ensemble E_5 des points M du plan tel que :
 $5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72$.

Exercice 13 :

Soit ABC un trapèze tel que (AB) parallèle à (CD).

Soient I ; J et O les milieux respectifs des segments [AB] ; [CD] et [IJ].

- 1) Détermine puis construis l'ensemble E_1 des points M du plan tel que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.
- 2) Les médiatrices des côtés [AD] ; [BC] se coupent en G. Démontre que : $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.
- 3) Démontre que l'ensemble $E_2 : MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide.

Exercice 14 :

- 1) Soit la suite des points M_n du plan complexe, d'affixe respectives définies par $Z_0 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $Z_{n+1} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} Z_n$.
- a) Calcule le module et un argument de $Z = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.
- b) Calcule Z_1 ; Z_2 ; Z_3 et vérifie que Z_3 est un réel. Place dans le plan muni 'un repère orthonormal (O ; $\vec{e}_1$; $\vec{e}_2$) les points M_0 ; M_1 ; M_2 ; et M_3 .
- c) Calcule le rapport $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}$. En déduis le triangle OM_1M_{n+1} est le triangle et que :

$$|Z_{n+1} - Z_n| = \sqrt{3}|Z_{n+1}|.$$

Le cm est l'unité de longueur choisie. On fera une figure visualiser.

- 2) Soit abc un triangle équilatéral à cotes 3, B' milieu du [AB] et un point D tel que : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.
- a) Démontre que D est le barycentre des points pondéré(A, 3) ; (B, -2) ; (C, 3). En déduire que D appartient à la médiatrice du segment [AC].
- b) Démontre que $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BD}$.
- c) Calcule AD^2 et BD^2 .
- d) Détermine l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :
- e) $3MA^2 - 2MB^2 + BD^2 + 3MC^2 = 12$. Vérifie que l'isobarycentre G du triangle ABC appartient à l'ensemble (E). Trace (E).
- 3) a) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) placé les points
 $Q(6; 0; 0)$; $R(0; 6; 0)$, $S(0; 0; 4)$
- b) Détermine les coordonnées du barycentre G des points massifs $Q(2; 0)$; $(0; 1)$; $(R, 3)$
- c) Détermine l'ensemble (Γ), des points M de l'espace tel que :
 $(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MQ} + 3\overrightarrow{MR}) \cdot \overrightarrow{MS} = 0$. Donner une équation cartésienne de(E).
- d) Déterminer l'intersection de (E) et du plan d'équation de $X = 0$ dans le repère ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

Exercice 15 :

- I. Soit un triangle ABC du plan complexe, I le milieu du segment [BC] et D le barycentre des points (A, -1); (B, 2); (C, 2).
- Exprime $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.
 - Détermine l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$
 - Justifie que (E) contient I.
- II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) direct d'unité graphique 2cm. Dans cette question, A est le point d'affixe 1, B le point d'affixe 2i et le point d'affixe Z.
- Que représente géométriquement $\left| \frac{Z-2i}{1-2i} \right|$ et $\arg\left(\frac{Z-2i}{1-2i}\right)$?
 - Dans la suite, on suppose que le point C d'affixe Z est défini par : $BC = \sqrt{\frac{2}{5}} \times BA$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \alpha$ ou $\alpha \in]0, \pi]$; $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Calcule $\sin \alpha$.
 - Démontre que $\frac{Z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$. En déduis le complexe Z vérifiant que le triangle ABC est isocèle. On fera une figure.

Exercice 16 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB=4 et AC=6, l'unité de longueur étant le centimètre.

- Détermine et construis le barycentre G des points pondérés (A, 5); (B, -3); (C, 2).
- Calcule : GA^2 ; GB^2 ; GC^2 .
- Développe : $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2$; $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$; $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$. Démontre l'égalité :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 4MG^2 - 48$$
- Détermine l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24$$
. Prouve que A $\in$ (E).

Exercice 17 :

Soit A et B deux points distincts du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et G barycentre du système {(A, -2); (B, 1)}.

1. Démontre que A est le milieu du segment [GB].

2. Montre que l'ensemble (Γ) des points M du plan $\mathcal{P}$ vérifiant $\frac{MA}{MB} = \sqrt{2}$ est le cercle de centre G et le rayon r que l'on déterminera en fonction de AB.

3. Soit C un point de (Γ) et ($\mathcal{D}$) l'ensemble des points M du plan tel que :

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$$

Montre que le point C appartient à ($\mathcal{D}$).

4. Calcule $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CG}$ et en déduire l'ensemble ($\mathcal{D}$).

5. Démontre que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 18 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien : A, B, C et D quatre points de $\mathcal{P}$ deux à deux distincts.

- Montre que ABCD est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système {(A, 1); (B, -1); (C, 1)}.
- Détermine l'ensemble (S) des points M de tels que : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = BD$
- On suppose maintenant que ABCD est un rectangle. Détermine l'ensemble (Σ) des points M de tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$

Exercice 19 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 4 cm et AC = 6 cm.

- Détermine et construis le barycentre G des points pondérés (A ; 5) ; (B ; 3) et (C ; 2)
 - Calcule GA^2, GB^2, GC^2 Justifie l'égalité : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
- Développe $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2, (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2, (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$. Démontre l'égalité :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 4MG^2 - 48$$
- Détermine l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24$$
. Prouve que A $\in$ (E).

Exercice 20 :

Soient A et B deux points distincts du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et G le barycentre du système {(A, -2), (B, 1)}.

- Démontre que A est le milieu du segment $[GB]$
- Montre que l'ensemble (Γ) des points M du plan $\mathcal{P}$ vérifiant $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$ est le cercle de centre G et de rayon r que l'on déterminera en fonction de AB .
- Soit C un point de (Γ) et (D) l'ensemble des points M du plan tels que :
 $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$. Montre que le point C appartient à (D)
- Calcule $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{CG}$ et en déduis l'ensemble (D)

Exercice 21 :
 On considère le triangle ABC tel que $AB = 7$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 5$ cm. Soit I le milieu de $[BC]$.

- Démontre que $AI = \sqrt{33}$
- i) Soit M un point du plan. Pour quelle valeur du nombre réel m le vecteur $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\vec{u}$ indépendant du point M ? Détermine alors le vecteur $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
 ii) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :
 $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58$.
- Soit D le barycentre du système $(A, -1)$; $(B, 1)$ et $(C, 1)$
 - Exprime le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.
 - Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
 - Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que :
 $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$.

Exercice 22 :
 On considère dans le plan, un triangle ABC rectangle en tel que : $AB = 2a$ et $AC = a$ où a est un réel strictement positif donné.

- a) Détermine et construis le barycentre G des points pondérés $(A, 1)$; $(B, -1)$ et $(C, 1)$.
 b) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$$
- Soit H le point du plan défini par : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
 a) Démontre que le point H est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$; $(B, 1)$ et $(C, -2)$.
 b) Pour tout réel k , on désigne par E_k l'ensemble des points M du plan tels que : $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = ka^2$
 Pour quelle valeur de k , contient-il le point C ?
 c) Détermine et construis l'ensemble (Γ') des points du plan tels que : $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8a^2$

Exercice 23 :

- Soit la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par $f : x \mapsto f(x) = \frac{2+\cos x}{2-\cos x}$. On désigne par la courbe (C) représentative de dans le plan muni d'un repère
 - Étudie les variations de f .
 - Démontre que est une bijection de $[0; \pi]$ sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
 - Construis (C) .
- Soit A, B, C trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que $AC = 5$ unités, $BC = 6$ unités. , .
 - Construis le triangle ABC puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
 - Construis le barycentre G des points pondérés $(A, 2)$; $(B, 3)$ et $(C, 3)$. , puis calcule GA .
 - Soit l'application de $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \mapsto 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$
 - Exprime $h(M)$ en fonction $h(G)$ et de MG .
 - Calcule $h(A)$ et $h(G)$.
 - Détermine puis construis l'ensemble (E) des points M tels que $h(M) = h(A)$
 - E et F sont deux points distincts du plan. Détermine puis construis l'ensemble (Γ) des points M tel

$$\frac{ME}{MF} = \frac{3}{2}$$

Exercice 24 :
 Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A , I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC .

Pour tout réel m , différent de $-\frac{1}{3}$, on note C_m le barycentre du système de points pondérés : $\{(A, 1); (B, m); (C, 2m)\}$.

Pour tout point M du plan on note $\vec{V}_m = 3\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC}$

1) Montre que G_1 est le milieu du segment $[CI]$.

2) Montre que les points G_1 ; J et C sont alignés.

3) Montre que pour tout point M , $\vec{V}_m = -(\vec{AB} + 2\vec{AC})$

4) Montre que pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\vec{AG}_m$ est colinéaire à $\vec{AG}_{-1}$

5) Montre que le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle

Exercice 25 :

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o; i; j)$ on donne les points $A(3, 4); (-1, 2)$.

a) Place ces points dans le repère $(o; i; j)$

b) Détermine puis construis l'ensemble E_1 des points M du plan tel que : $\|4\vec{MA} + 5\vec{MB}\| = 45$

c) Détermine puis construis l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :

$$\|3\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \|7\vec{MA} - 2\vec{MB}\|$$

d) Détermine puis construis l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :

$$\|3\vec{MA} - 2\vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$$

e) Détermine puis construis l'ensemble E_4 des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 32$

f) Détermine puis construis l'ensemble E_1 des points M du plan tel que : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 1$.

Exercice 26 :

Dans le plan euclidien P on considère ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = AC = a$ ($a > 0$)

1) Construis le barycentre $G = \{(A, 4); (B, -1); (C, -1)\}$.

2) Soit I le point de P défini par $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{CA}$. Montre que I est barycentre des points pondérés $(A, 1); (B, -1); (C, -2)$. Construis le barycentre I .

3) Pour tout réel k , on désigne par F_k l'ensemble des points M du plan tel que :

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = ka^2$$

a) Détermine la valeur de k pour laquelle B appartient à F_k .

b) Détermine puis construis l'ensemble F_2 .

c) Détermine puis construis l'ensemble E des points M du plan tel que :

$$a^2 \leq 4MA^2 - MB^2 - MC^2 \leq 2a^2$$

4) Détermine puis construis l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :

$$\|4\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$$

5) Détermine puis construis l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :

$$\|4\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$$

6) On considère la fonction vectorielle f de P dans V telle que $\vec{f}(M) = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$

a) Montre que f est un vecteur constant $\vec{v}$ que l'on précisera. Calcule $\|\vec{v}\|$.

b) Détermine puis construis l'ensemble E_4 des points M du plan tel que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2$

Exercice 27 :

Soit E un espace affine de dimension 3 ; on donne 3 points A, B, C , et f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f: M \mapsto MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2$$

a) Existe-il point G barycentre des points pondérés $(A, 1); (B, 3); (C, -2)$? Si oui donne une relation vérifiée par les vecteurs $\vec{GA}, \vec{GB}, \vec{GC}$

b) Montre que $f(M) = 2MG^2 + m$ où $m = f(G)$

c) Discute suivant les valeurs de m la nature de l'ensemble des points M de E tels que $f(M) = 1$.

Exercice 28 :

Soit $ABCD$ un rectangle du plan de diagonale $[AC]$ et $[BD]$ de longueur a .

1- Soit $m \in \mathbb{R}^*$. On note G_m le barycentre du système $\{(A, m); (B, -1); (C, 1)\}$

- a) Précise la position de G_1
 b) Détermine l'ensemble (E_1) des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.
 c) Quel est l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que : $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = a$?
 d) Quel est l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{2}$
 2- Faites une figure représentant le rectangle $ABCD$ et les ensembles (E_1) , (E_2) , (E_3)

Exercice 29 :

$\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien et ABC désigne un triangle de centre de gravité G . Soit g l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : pour tout point $M \in \mathcal{P}$; $G(M) = \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA}$ et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : pour tout point M de $\mathcal{P}$;

$$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$$

1. Démontre que pour tout M de $\mathcal{P}$, on a : $g(M) = 3MG^2 + g(G)$ et $g(G) = -\frac{1}{2}f(G)$.

NB : On rappelle que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

2. Calcule $g(G)$ en fonction de AB , AC et BC et en déduis $g(M)$ en fonction de MG , AB , AC et BC .
 3. En supposant que le triangle ABC est équilatéral de côté a , ($a \in \mathbb{R}^+ *$) déterminer l'ensemble (I) des points M de $\mathcal{P}$ tels que : $\frac{a^2}{4} \leq g(M) \leq \frac{a^2}{2}$

Exercice 30 :

1. Soit $ABCD$ un losange de centre I tel que : $IA = 2IB$.
 Démontre que le barycentre des points pondérés $(B, 4)$, $(C, -2)$ et $(D, 2)$ est le milieu de $[AB]$.
 2. Soit k un nombre réel.
 a) Détermine et construis l'ensemble (H_1) des barycentres G_k des points pondérés : $(A, 2k)$, $(B, 4)$, $(C, 2k - 2)$ et $(D, 2 - 4k)$.
 b) Précise la valeur de k pour laquelle G_k est un point de la droite (AC) .
 3. Déterminer et construire l'ensemble (H_2) des points M du plan tels que les vecteurs $2\vec{MA} + 2\vec{MC} - 4\vec{MD}$ et $4\vec{MB} - 2\vec{MC} + 2\vec{MD}$ soient colinéaires

Application affine

Exercice 1 :

Soit $A(3, 0)$ et $B(1, -1)$ deux points du repère $(O ; I ; J)$

- a) Montre qu'il existe une application affine telle que :
$$\begin{cases} f(O) = B \\ f(B) = B \\ f(A) = A \end{cases}$$
- b) Calcule les coordonnées (x', y') de $f(M) = M'$ en fonction des coordonnées (x, y) de M .
- c) Calcule $f \circ f$ et déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application f .

Exercice 2 :

Détermine la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas :

- 1) f est la transformation qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$
- 2) f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$
- 3) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + i$

Exercice 3 :

Dans le plan $(O ; I ; J)$. On considère les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $A'\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$; $B'\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $C'\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit f l'application affine du plan tel que :

$$f(A) = A'; f(B) = B'; f(C) = C'$$

- 1) Montre que f est bijective
- 2) Détermine l'expression analytique de f .

Exercice 4 :

Le plan est muni du repère $(O ; I ; J)$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de

$$\text{coordonnées } (x', y') \text{ tel que : } \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

- 1) Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on précisera.
- 2) Démontre que $f \circ f = f$
- 3) a) Détermine l'ensemble des points invariants par f .
b) En déduis la nature des éléments caractéristiques.

Exercice 5 :

On considère dans le plan $(O ; I ; J)$. les points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

- 1) Démontre que $f \circ f = Id$
- 2) Démontre que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on précisera.
- 3) Soit M un point du plan et M' son image par f .
a. Démontre que le milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D) .
b. Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe orthogonale à celle de (D) .
c. En déduire les éléments caractéristiques de f .

Exercice 6 :

Le plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $(O ; I ; J)$. Etant donné un nombre réel a , on appelle T l'application de P dans P qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ fait correspondre le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = (a - 1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$$

- 1) Détermine les valeurs de a pour lesquelles T_a est bijective.
- 2) Détermine l'ensemble des points invariants par T_a .

Détermine a pour que T_a soit involutive et caractériser géométriquement l'application

Exercice 7 :

On considère l'application g de E dans E qui à tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$$

- 1) Montre que g est affine, sans point invariant et que son endomorphisme associé ϕ est involutif.
- 2) a) Démontre que $g \circ g$ est une translation.
b) Soit $\vec{u}$ le vecteur de cette translation et t la translation de vecteur $\frac{\vec{u}}{2}$.
Précise la nature de l'application S telle que $g = t \circ S$. Prouve que $t \circ S = S \circ t$.
- 3) Montre que l'image (C') de la courbe (C_1) par g a pour équation $y = -x + 2 + \ln x$.
- 4) Construis (C') dans le repère $(O; I; J)$.

NB : (C') Coupe l'axe des abscisses aux points : $x_0 = 0,16$ et $x_1 = 3,14$.

Exercice 8 :

$f: P \rightarrow P; M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

- a) Vérifie que f est bijective.
- b) Détermine l'ensemble des points invariants par f .
- c) On désigne par Z et Z' les affixes respectives des points M et M' . Exprime Z' en fonction de Z .
- d) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f .

Exercice 9 :

Dans le plan P , on considère la translation $t_{\vec{u}}$ définie par $t_{\vec{u}}(A) = B$ où $A \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

- a) Caractérise cette translation.
- b) Détermine le point C' image du point $C \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ par $t_{\vec{u}}$
- 3) T_a correspondant à cette valeur de a obtenue.

Exercice 10 :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $a = 1 + i$ et $b = -4 - i$

Soit T la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

- a) Exprime $(x'; y')$ en fonction de $(x; y)$ puis z' en fonction de z .
- b) Montre que T admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduis que T est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Exercice 11 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère l'application affine f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à

tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ telles que : $\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres

complexes.

- 1) a) est-elle bijective ? Justifie ta réponse.
b) Détermine l'ensemble des points invariants par f .
c) Quelle est l'image par de la droite $(D): y = 2x + 1$?
- 2) On désigne par $M(x; y)$ le point d'affixe z et par $M'(x'; y')$ le point d'affixe z' où z et z' sont des nombres complexes.
a) Sachant que $f(M) = M'$, exprime z' en fonction de z .
b) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f .

Exercice 12 :

Le plan affine euclidienne $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ qui à tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

- 1) Montre que f admet un seul point invariant J
- 2) Montre que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ puis en déduis la nature et les éléments caractéristiques de f .
- 3) Détermine le centre et le rayon du cercle (C') image du cercle (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 2y = 0$ par f .

Exercice 13 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ et l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout

point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ fait correspondre le point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y + 3) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 14) \end{cases}$

- 1) Démontre que f est un antidéplacement.
- 2) Démontre qu'il existe une droite (D) et un vecteur $\vec{u}$ de la direction de (D) tels que : $f = s \circ t$ où s est la symétrie orthogonale de base (D) et t la translation de vecteur $\vec{u}$. Détermine une équation de (D) et les coordonnées de $\vec{u}$.

Exercice 14 :

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O ; I ; J)$, on considère l'application affine f

définie par : $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{6}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{12}{5} \end{cases}$

- 1) Détermine l'ensemble des points invariants par f .
- 2) Démontre que f est une isométrie.
- 3) Détermine l'image par f de la droite d'équation $x = 1$.
- 4) Précise la nature de f .

Exercice 15 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout

point $M(x ; y)$ fait correspondre le point $M(x' ; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$

- 1) Exprime $z' = x' + iy'$ en fonction de $z = x + iy$
- 2) L'application f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?
- 3) Quelle est l'ensemble des points invariants par f ?
- 4) en utilisant l'écriture complexe de f , démontre que $f \circ f$ est une translation.
On désigne par $2\vec{v}$ le vecteur directeur de la translation.
- 5) Détermine la droite (D) de vecteur direction $\vec{v}$ telle que $f = t \circ s$, t la translation de vecteur $\vec{v}$ et s est la symétrie axiale d'axe (D) .

Exercice 16 :

A- Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

1- A un point M on associe le point M_1 image de M par la symétrie orthogonale axe la droite d'équation $y = x$, puis le point M image de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe $(O ; \vec{i})$.

- a) Calcule les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M .
- b) Caractérise la transformation qui fait passer de M à M' .

c) Au point M on associe maintenant N de coordonnées X et Y définies : (I) $\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$
Montre que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ .

2°/ Le point M décrivant la droite d'équation $y = x$, déterminer l'ensemble décrit par N .

Quel est l'ensemble décrit par le milieu du bipoint $(X ; Y)$?

3°/ Au point M on associe le point N' de coordonnées X' et Y' définies par :

$$(II) \begin{cases} X' = 1 + 3y \\ Y' = 1 - 2x \end{cases}$$

a) Quelle est la nature de l'ensemble E des points N lorsque M décrit le cercle unité de centre O ?

b) Caractérise le transformé de E dans la transformation (I).

B- Dans ce qui suit on suppose que qu'on associe au point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ dont les coordonnées sont définies par :

$$(III) \begin{cases} x' = a + x \sin \theta + y \cos \theta \\ y' = a - x \cos \theta + y \sin \theta \end{cases} \text{ ou } a \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

1°/Montre que si $\sin \theta \neq 1$, la transformation (III) admet un point invariant W dont on calculera les coordonnées x_0 et y_0 en fonction de a et θ .

2°/ a) Calcule en fonction de a la somme $x_0 + y_0$ et en fonction de θ le quotient $\frac{x_0}{y_0}$.

b) En déduis que l'ensemble décrit par W quand θ varie, a restant fixe sur une droite D , et que l'ensemble décrit par W quand a varie, θ restant fixe sur une droite D' .

c) En s'appuyant sur ce qui précède, indique construction géométrique du point W , a et θ étant connus.

d) Démontre que la transformation par (III) est une isométrie dont déterminera sa nature. Montre que (I) est un cas particulier de (III).

Exercice 17 :

Pest le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct. f et g sont les applications affines de P qui associent à tout point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ telles que f :

$$\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$$

1. Pour chacune des applications f et g :

a- Détermine l'ensemble des points invariants, préciser celles qui sont bijectives.

b-Précise la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

2. Détermine analytiquement la réflexion d'axe Δ d'équation : $y = x$.

Exercice 18 :

1- Calcule les intégrales suivantes :

a- $\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1} dx$ (On pourra mettre $\frac{x^2-1}{2x-1}$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{2x-1}$ ou a, b et c sont des trois réels que l'on déterminera).

b- $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+x} dx$ (On pourra utiliser le changement de variable $u = x + 1$).

2. a- Résous ans l'équation : $23x - 17y = 6$.

b- Déduis-en de l'étude précédente les entiers naturels A inférieur à 1000 tels que la division euclidienne de A par 23, le reste soit 2 et dans celle de A par 17, le reste soit 8.

3. $\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. On considère l'application affine f définie analytiquement par : $f : M(x, y) \mapsto M'(x', y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

a- Vérifie que f est bijective.

b- Détermine l'ensemble des points invariants par f .

c- f est-elle une isométrie? Justifier votre réponse.

Exercice 19 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par S la réflexion d'axe la droite (D) d'équation $y = x$ et par σ la réflexion d'axe $(O, \vec{i})$

1) Soit M un point du plan M_1 et son image par S ; on pose $M' = \sigma(M_1)$

a) Calcule les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M

b) Caractérise la transformation qui fait passer de M à M' .

c) Au point $M(x; y)$ on associe maintenant le point $N(X; Y)$ telles que :
$$\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$$

Montre que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ .

2) Le point M décrivant la droite d'équation $y = x$ détermine l'ensemble décrit par N .

Quel est l'ensemble décrit par le milieu du bipoint (M, N) ?

CS