

Exercice 1 :(5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, (unité graphique : 2 cm). On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = e^{i\frac{5\pi}{6}}z$ et on définit une suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : M_0 a pour d'affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n .

- 1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f , place les points M_0 , M_1 et M_2 .
- 2) Montre que pour tout entier naturel n , on a l'égalité $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$.
(On pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
- 3) Soient n et p deux entiers naturels tels n est supérieur ou égal à p .
Montre que les points M_n et M_p sont confondus si et seulement si, $(n - p)$ est un multiple de 12.
- 4) a) On considère l'équation $(E) : 12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs.
Après avoir vérifié que le couple $(4; 9)$ est solution, résous l'équation (E) .
b) En déduis l'ensemble des entiers naturels n tels que, M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.

Exercice 2 :(5 points)

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$.
 - a) Calcule I_0 puis à l'aide d'un changement de variable, démontre que $I_1 = \frac{\pi}{4}$.
 - b) Justifie que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx$.
 - c) En utilisant une intégration par parties sur $I_n, n \in \mathbb{N}^*$, montre que :

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$
 - d) Calcule alors I_2 .
- 2) On considère la suite (J_n) définie pour tout entier naturel n non nul par,

$$J_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$
 - a) Détermine les réels a et b tels que la fonction $f : t \mapsto (at + b)e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0; 1]$. En déduis la valeur de J_1 .
 - b) Montre à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$J_{n+1} = (n+1)J_n - 1.$$
 - c) Montre que pour tout entier naturel n non nul, $J_n \geq 0$.
 - d) Montre que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$.
 - e) En déduis que pour tout n non nul, $J_n \leq \frac{e}{n+1}$. Détermine la limite de la suite (J_n) .

Problème :.....(10 points)

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

- 1) a) Etudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α .
Vérifie que $1,4 < \alpha < 1,5$.
- 2) Détermine le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{2-x}, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe

représentative dans un repère art orthonormé unité 2cm.

- 1) a) Détermine le domaine de $\mathcal{D}$ de f .
b) Calcule les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
- 2) a) Etudie la continuité de f en 0.
b) Etudie la dérivabilité de f en 0. Interprète graphiquement le résultat obtenu.
- 3) a) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
b) Démontre que $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$.
En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ par deux décimaux à 10^{-1} près.
- 4) a) Trouve les réels a, b, c et d tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-1} + \frac{d}{2x+1}$.
b) En déduis que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$.
c) Précise la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) .
- 5) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement ce résultat.

- 6) Trace (Δ) et la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, \alpha \right]$.

- 1) a) Démontre que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de départ et d'arrivée.
b) Dresse le tableau de variation de h^{-1} .
- 2) Trace $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.