

ACTIVITE1:Partie A :

1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

a- Dresse le tableau de variation de g.

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $1,89 < \alpha < 1,90$.

c- Dédus de ce qui précède le signe de g(x).

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

a) Dresse le tableau de variation de f.

b) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de f(α) d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$

c) Trace (C) dans le repère.

Partie B :

On considère la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

1) a) Prouve que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et Précise F'(x).

b) En déduis le sens de variation de F.

2) a) Vérifie que $\forall t \geq 1$; on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$

b) Pour tout $x > 0$ et $t \neq 0$; on pose $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

- A l'aide d'une intégration par parties, Calcule I(x)

- A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$, Calcule J(x).

c) Dédus de ce qui précède que $\forall x > 1$; on a :

$$\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

d) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \theta$. Sans Calcule θ Vérifie que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$

ACTIVITE1: Partie A :

1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

a- Dressons le tableau de variation de g.

$D_g =]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 - 2x^2 \ln x = 1 + (0)^2 - 2(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 - 2x^2 \ln x = 1 + (+\infty)^2 - 2(+\infty) = +\infty - \infty = \text{"FI"}$$

Levons l'indétermination

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 - 2x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln x \right) = (+\infty)^2 (0 + 1 - \infty) = -\infty$$

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x \Rightarrow g'(x) = -4x \ln x$$

$\forall x \in]0; +\infty[$; $-4x < 0$. Alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $\ln x$

Posons $\ln x > 0 \Rightarrow x > e^0 \Rightarrow x > 1$. Ainsi pour les $x > 1$, on a : $\ln x > 0$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		1
	$+\infty$	α	
-4x	-	0	-
lnx	-	0	+
g'(x)	+	0	-
g(x)	0		2

	1
	$-\infty$

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que :

$$1,89 < \alpha < 1,90.$$

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]1; +\infty[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]1; +\infty[$ vers $]-\infty; 2[$.

Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique telle que $g(\alpha) = 0$.

$$\text{- De plus } \begin{cases} g(1,89) = 0,02 \\ g(1,90) = -0,02 \end{cases} \Rightarrow g(1,89) \times g(1,90) < 0$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $1,89 < \alpha < 1,90$.

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1,89 < \alpha < 1,90$.

c- Dédus de ce qui précède le signe de $g(x)$.

Alors d'après le tableau de variation de g , on a :

$$\forall x \in]0; \alpha[\quad g(x) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]\alpha; +\infty[\quad g(x) < 0$$

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

a- Dressons le tableau de variation de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x(\ln x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[; x(1+x^2)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Or d'après **Partie A 1) c)**, on a :

$$\forall x \in]0; \alpha[\quad g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]0; \alpha[\quad f'(x) > 0 \quad \text{et}$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[\quad g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]\alpha; +\infty[\quad f'(x) < 0$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

b- Vérifions que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$

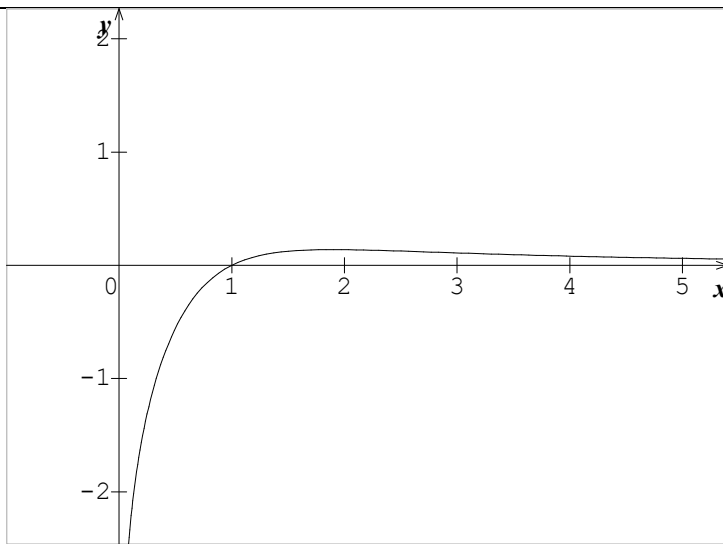
$$\text{D'après } \mathbf{Partie A 1) b)}, \text{ on a : } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0 \Rightarrow \ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$$

$$\text{D'autre part } f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1+\alpha^2}$$

Remplaçons $\ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$ par sa valeur dans $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1+\alpha^2}$. Ainsi on a :

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1+\alpha^2} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2(1+\alpha^2)} = \frac{1}{2\alpha^2}. \quad \text{D'où } (\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

c- Traçons (C) dans le repère.



Partie B :

On considère la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

1) a) Prouvons que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et précisons $F'(x)$.

f est une fonction continue sur $]0; +\infty[$. Alors F est donc dérivable sur $]0; +\infty[$

Sa fonction dérivée est $F'(x) = f(x)$ avec $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

b) En déduis le sens de variation de F.

x	0	1
f(x)	$+\infty$	0
F(x)	-	+

D'après le tableau :

$\forall x \in]0; 1[$; F est strictement décroissante

$\forall x \in]1; +\infty[$; F est strictement croissante

Vérifions que $\forall t \geq 1$; on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq$

2) a

$$\frac{\ln t}{t^2}$$

On sait que $\forall t \geq 1$; on a : $t^2 \leq 1+t^2 \leq t^2 + 2t + 1$

En prenant les inverses, on a : $\frac{1}{t^2+2t+1} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

En multipliant cette dernière par $\ln t$, on a :

$$\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2} \Leftrightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2} \quad (\text{ce qu'il fallait Démontrer})$$

b) Pour tout $x > 0$ et $t \neq 0$; on pose $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

- A l'aide d'une intégration par parties, Calcule I(x)

$$I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = \int_1^x \frac{1}{t^2} \ln t dt$$

Posons $u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$

$$v'(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow I(x) = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} \right]_1^x$$

$$\Rightarrow I(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$$

c) A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$, calculons J(x).

Puis en déduisons de ce qui précède que $\forall x > 1$; on a :

$$\ln 2 + \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = \int_1^x \frac{1}{(1+t)^2} \times \ln t dt$$

Posons $u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$

$$v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{1+t}$$

$$\Rightarrow J(x) = \left[-\frac{\ln t}{1+t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t)} dt = \left[-\frac{\ln t}{1+t} \right]_1^x + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$\Rightarrow J(x) = \left[-\frac{\ln t}{1+t} \right]_1^x + [\ln t - \ln(1+t)]_1^x = \left[-\frac{\ln t}{1+t} \ln t - \ln(1+t) \right]_1^x$$

$$\Rightarrow J(x) = \ln 2 + \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - \frac{\ln x}{1+x}$$

En déduisons que $\forall x > 1$; on a : $\ln 2 + \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$

D'après 2) a), on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq \int_1^x f(t) dt \leq \frac{\ln t}{t^2}$. Intégrons cette inégalité sur $[1 ; x]$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt \Leftrightarrow J(x) \leq F(x) \leq I(x) \Leftrightarrow$$

$$\ln 2 + \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

d) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \theta$. Sans Calculer θ vérifions que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$

On sait que : $\ln 2 + \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$

En appliquant le théorème des gendarmes à l'inégalité :

$$\ln 2 + \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}, \text{ on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 2 + \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\ln 2 \leq \theta \leq 1 \quad (\text{Ce qu'il fallait Démontrer})$$

ACTIVITE2:

L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \end{cases}$$

Les parties A et B sont indépendantes.

On notera (Cf) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$

1) Détermine D_g et Détermine les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Etudie les variations de g ; on ne demande pas de Calculer ses limites en -1 et en 0 .

3) Calcule $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ puis Démontrer que l'on a :

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{2}; 0[; g(x) < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[; g(x) > 0$$

Partie B : Etude de la limite de f à l'infini.

1) Soient les fonctions h et k définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$h : t \rightarrow \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad k : t \rightarrow \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$$

Après une brève étude sur $[0 ; +\infty[$ des fonctions h et k ; Démontrer que :

$$\forall t \geq 0 ; \text{ on a : } t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

2) En déduis que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

3) En utilisant les résultats précédents, Démontre que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.

Partie C : Etude de la fonction f.

- 1) Détermine Df et Détermine la limite de f en -1
- 2) Etudie la continuité de f en 0
- 3) Démontre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$
- 4) Calcule la dérivée de f et Démontre que $f'(x) = x \times g(x)$
- 5) Dresse le tableau de variations de f
- 6) Détermine une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0
Détermine les asymptotes à (Cf).
- 7) Montre que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7$.
- 8) Trace (T) ; les asymptotes et la courbe (Cf).

ACTIVITE2:

L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \end{cases}$$

Les parties A et B sont indépendantes.

On notera (Cf) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$

1) Déterminons l'ensemble de définition Dg

$$Dg = \left\{ x / x \in \mathbb{R} ; x(x+1) \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{x} \neq 0 \right\} \Rightarrow Dg = \mathbb{R} - \{0; -1\}$$

$$\Rightarrow Dg =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$$

Déterminons les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = 0$$

2) Etudions les variations de g ; on ne demande pas de Calculer ses limites en -1 et en 0.

$$g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)^2} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} - \{0; -1\}; \text{ on a : } g'(x) < 0$$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	0
	$+\infty$			
g'(x)	-	-	-	-
g(x)	0			0
	0			

3) Calculons $g\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

D'après le tableau de variation de g ; on a :

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{2}; 0[; g(x) < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[; g(x) > 0$$

Partie B : Etude de la limite de f à l'infini.

1) Soient les fonctions h et k définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$h: t \rightarrow \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad k: t \rightarrow \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$$

Après une brève étude sur $[0; +\infty[$ des fonctions h et k ; démontrons que :

$$\forall t \geq 0; \text{ on a : } t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

- Etude brève de $h(t) = \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$$h'(t) = \frac{t^2}{1+t} \Rightarrow \forall t \in [0; +\infty[\quad h'(t) \geq 0. \text{ Alors } h \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.$$

De plus $h(0) = 0$. Donc $\forall t \geq 0$; on a : $h(t) \geq 0$ et par suite $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t)$

- Etude brève de $k(t) = \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$$k'(t) = -\frac{t^3}{1+t} \Rightarrow \forall t \in [0; +\infty[\quad k'(t) \leq 0. \text{ Alors } k \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+.$$

De plus $k(0) = 0$. Donc $\forall t \geq 0$; on a : $k(t) \leq 0$ et par suite $\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

Conclusion $\forall t \geq 0$; on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

$$2) \text{ En déduisons que } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'après ce qui précède, on a : } t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

Multiplions tous les membres de l'inégalité par -1 . Ainsi on a :

$$-t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \leq -\ln(1+t) \leq -t + \frac{t^2}{2}$$

Ajoutons t à tous les membres de l'inégalité. Ainsi on a :

$$\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \leq t - \ln(1+t) \leq \frac{t^2}{2}$$

Divisons tous les membres de l'inégalité par t^2 . Ainsi on a :

$$\frac{1}{2} - \frac{t}{3} \leq \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} - \frac{t}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

3) En utilisant les résultats précédents, démontrons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$$f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|. \text{ Posons } x = \frac{1}{t} \Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t).$$

Quand t tend vers 0 , alors x tend vers $+\infty$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2} \quad \text{De même } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Interprétation graphique des résultats de la question précédente.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

Alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe (Cf)

Partie C : Etude de la fonction f. $f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$

1) Déterminons Df

$$Df = \left\{ x / x \in \mathbb{R} ; x \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{x} \neq 0 \right\} \Rightarrow Df = \mathbb{R} - \{0 ; -1\}$$

$$\Rightarrow Df =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$$

Calculons la limite de f en -1

$$\forall x \in Df ; f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \text{ et on a : } \lim_{x \rightarrow -1} \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

2) Etudions la continuité de f en 0

$$f \text{ est continue en } 0 \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} x - x^2 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x - x^2 \ln|x+1| + x^2 \ln|x|. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0. \text{ De plus } f(0) = 0 \text{ donc } f \text{ est continue en } 0$$

3) Démontrons que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 - x \ln|x+1| + x \ln|x|. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

Conclusion : f est dérivable en 0 et son nombre dérivé est $f'(0) = 1$

4) Calculons la dérivée de f et démontrons que $f'(x) = x \times g(x)$

$$\forall x \in Df ; f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+1}{x+1} - 2x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$$

$$\Rightarrow f'(x) = x \left[\frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right] \Rightarrow f'(x) = x \times g(x) \text{ (Ce qu'il fallait Démontrer)}$$

5) Dressons le tableau de variations de f

D'après **Partie A ; 3)**, et **Partie C ; 4)** on a :

$$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]-\frac{1}{2} ; 0[\cup]0 ; +\infty[; f'(x) > 0 \text{ et } \forall x \in]-1 ; -\frac{1}{2}[; f'(x) < 0$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$g(x)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

	0 $\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
--	--------------------	----------------

6) Déterminons une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0

L'équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0 est $y = x$

Déterminons les asymptotes à (Cf).

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe (Cf).

$x \rightarrow -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote verticale à la

$x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow -\infty$ Courbe (Cf).

7) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7$.

- $\forall x \in]-1; -\frac{1}{2}]$; f est continue et strictement décroissante de $] -1; -\frac{1}{2}]$ vers $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β telle que $f(\beta) = 0$

- De plus $\begin{cases} f(-0,8) = 0,087 \\ f(-0,7) = -0,28 \end{cases} \Rightarrow f(-0,8) \times f(-0,7) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\beta \in]-0,8; -0,7[$

De même :

$\forall x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$; f est continue et strictement croissante de $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ vers $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$

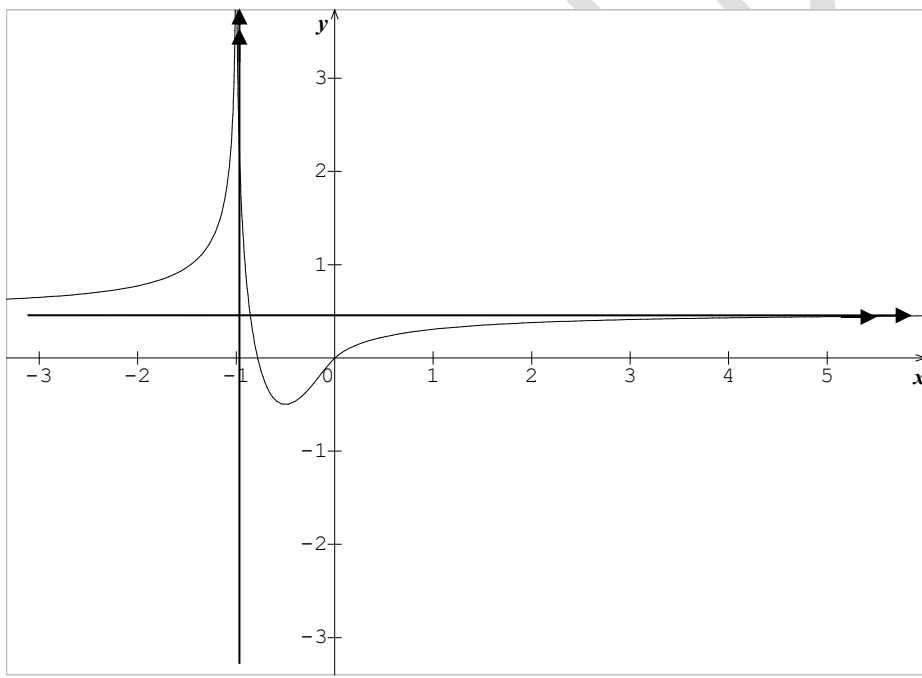
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique δ telle que $f(\delta) = 0$

Or $f(0) = 0$ donc $\delta = 0$

$\forall x \in]-\infty; -1[$; $f(x) > 0$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7$.

8) Traçons (T); les asymptotes et la courbe (Cf)



ACTIVITE3:Partie A :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, de Détermine ensuite dans la **partie B** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite

récurrente dans la partie (Γ), cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

1) Soit g la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 1$

a) Montre que la fonction g est dérivable et que $\forall x \in Dg \quad g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

b) Etudie les variations de la fonction g puis Détermine le signe de g(x).

2) a- Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b- Montre que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donne le tableau de variations de la fonction f.

Partie B :

Γ Désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 2 cm.

Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.

1) Etudie le sens de variation de h puis Montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0,4 ; 0,7]$

2) Montre que l'on a : $e^{-\alpha} =$

3) a- Vérifie que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.

b- Utilise les résultats de la question 1) pour Détermine les positions relatives de Γ et Δ.

4) Construire Γ et Δ dans le repère ortho normal $(o; \vec{i}; \vec{j})$

5) a- Calcule au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_1^{2 \ln t} \frac{1}{t^2} dt$

b- En déduis l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe Γ, la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Partie C : Etude d'une suite

Dans cette partie :

- I désigne l'intervalle $[0,4 ; 0,7]$
- α est le réel mis en évidence au **B. 1.**
- φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-x}$

1) u est la suite récurrente définie par $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_0 = 0,4 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$

Montre qu'on a pour tout $x \in I$:

a) $\varphi(x) \in I$

b) $|\varphi'(x)| \leq 0,7$

c) $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|$

2) a) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|$ puis en déduis par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0,7^n$

b) Conclut alors quant à la convergence de la suite u.

3) Détermine un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donne à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.

En déduis une valeur approchée par défaut et par excès de α à 10^{-3} près

ACTIVITE3:Partie A :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, de Détermine ensuite dans la **partie B** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie (Γ), cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

1) a) Dérivée de la fonction g

La fonction g, définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 1$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ (comme somme algébrique de telles fonctions) et sa dérivée est :

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2 - x - 2)}{x}$$

b) Variations de g et signe de g(x).

On peut résumer l'étude du sens de variation de g et du signe de g(x) dans le tableau suivant :

x	0	1
	$+\infty$	0
$x - 1$	-	+
$3x^2 + 3x + 2$	+	+
$g'(x)$	-	+
$g(x)$	$+\infty$ $+\infty$	1

D'après le tableau de variation, $g(x) > 0$

2) a) Limite de f en 0 et en $+\infty$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = +\infty$$

b- Montrons que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donnons le tableau de variations de la fonction f.

La fonction f, définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa

$$\text{dérivée est : } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1-2\ln x}{x^3} = \frac{x^3 - x + 1 - 2\ln x}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

$\forall x \in]0 ; +\infty[$; $x^3 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Or d'après **Partie A 1) b)**, on a :

$$\forall x \in]0 ; +\infty[; g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]0 ; +\infty[f'(x) > 0$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Partie B :

Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.

1) Etudions le sens de variation de h puis montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0,4 ; 0,7]$

La fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ est également dérivable] $]0 ; +\infty[$ et sa fonction dérivée est $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow \forall x \in]0 ; +\infty[; h'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	0	α
---	---	----------

	$+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	
	$-\infty$

- D'après le tableau de variation de h , $\forall x \in]0; +\infty[$ h est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$.

Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique telle que $h(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} h(0,4) = -0,52 \\ h(0,7) = 0,34 \end{cases} \Rightarrow h(0,4) \times h(0,7) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $\alpha \in [0,4; 0,7]$

Conclusion : l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0,4; 0,7]$

2) Montrons que l'on a : $e^{-\alpha} =$

D'après **Partie B 1)** on a : $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \ln \alpha = 0 \Rightarrow \ln \alpha = -\alpha \Rightarrow e^{-\alpha} =$

3) a- Vérifions que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.

La droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

D'où La droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$

b- Utilisons les résultats de la **Partie B** question **1)** pour Détermine les positions relatives de (Γ) et Δ .

Pour étudier la position relative (Γ) et (Δ) nous devons étudier le signe de $f(x) - y$.

$$\text{Or } f(x) - y = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}.$$

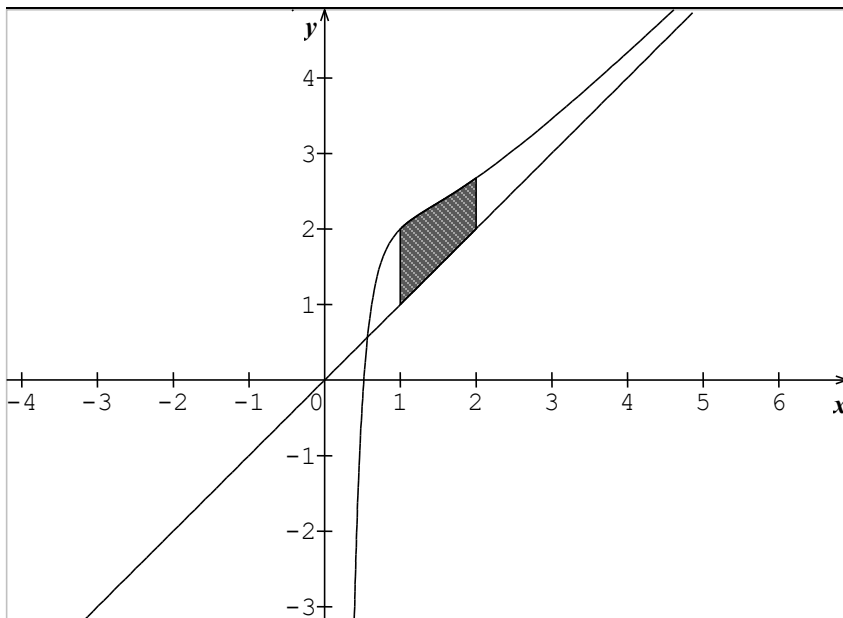
Donc le signe de $f(x) - y$ dépend du signe de $h(x)$.

Or d'après le tableau de variation obtenu dans la **Partie B 1)** on a :

$\forall x \in]0; \alpha[$ $h(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]0; \alpha[$ $f(x) - y < 0$ et par conséquent $\forall x \in]0; \alpha[$; la courbe (Γ) est en dessous de la droite (Δ)

De même $\forall x \in]\alpha; +\infty[$ $h(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]\alpha; +\infty[$ $f(x) - y > 0$ et par conséquent $\forall x \in]\alpha; +\infty[$; la courbe (Γ) est au dessus de la droite (Δ)

4) Construction de la courbe (Γ) et de la droite Δ dans le repère ortho normal $(o; \vec{i}; \vec{j})$



5) a- Calculons au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt$

$$I = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2} \ln t dt$$

Posons : $u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$

$$v'(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^2 = \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} \right]_1^2 = \left[-\frac{1 + \ln t}{t} \right]_1^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

b- En déduisons l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe (Γ) , la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

L'aire A de la portion de plan indiquée est, en cm^2 , puisque (Γ) est au dessus de (Δ) et puisque (Δ) est au dessus de l'axe des abscisses pour $1 \leq x \leq 2$

$$A = (2 \text{ cm})^2 \int_1^2 (f(x) - y) dt = 4 \text{ cm}^2 \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) dt = 4 \text{ cm}^2 \int_1^2 \frac{1}{x} dt + 4 \text{ cm}^2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dt$$

$$= 4 \text{ cm}^2 \int_1^2 \frac{1}{x} dt + 4I \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2 [\ln t]_1^2 + 4I \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2 \ln 2 + 4I \text{ cm}^2$$

$$= 4 \text{ cm}^2 \ln 2 + 4 \text{ cm}^2 \left(\frac{1 - \ln 2}{2} \right) = 4 \text{ cm}^2 \left(\ln 2 + \frac{1 - \ln 2}{2} \right) = 4 \text{ cm}^2 \left(\frac{2 \ln 2 + 1 - \ln 2}{2} \right)$$

$$= 4 \text{ cm}^2 \left(\frac{\ln 2 + 1}{2} \right) = 2 \text{ cm}^2 (\ln 2 + 1) = (2 \ln 2 + 2) \text{ cm}^2 = 3,39 \text{ cm}^2$$

Partie C : Etude d'une suite

Dans cette partie :

- I désigne l'intervalle $[0,4 ; 0,7]$
- α est le réel mis en évidence au **B. 1**.
- $\varphi(x)$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-x}$

1) u est la suite récurrente définie par $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_0 = 0,4 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$

a) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $\varphi(x) \in I$

Pour tout x de l'intervalle $I = [0,4 ; 0,7]$; $\varphi(x)$ appartient à l'intervalle I .

On peut résumer l'étude des variations de φ sur I dans le tableau suivant :

x	0,4 0,7
$\varphi(x)$	0,670 →

$$\varphi(0,4) = 0,670 < 0,7 \quad \text{et} \quad \varphi(0,7) = 0,497 > 0,4$$

Donc pour tout x de l'intervalle $I = [0,4 ; 0,7]$; $\varphi(x)$ appartient à l'intervalle I .

b) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $|\varphi'(x)| \leq 0,7$

On sait que : $0,4 \leq x \leq 0,7$

Appliquons $\varphi'(x)$ à l'inégalité : $0,4 \leq x \leq 0,7$

$$\Rightarrow \varphi'(0,4) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(0,7)$$

$$\Rightarrow -0,670 \leq \varphi'(x) \leq -0,497$$

Appliquons la valeur absolue à l'inégalité : $-0,670 \leq \varphi'(x) \leq -0,497$

$$\Rightarrow |-0,4970| \leq |\varphi'(x)| \leq |-0,67| \Leftrightarrow 0,4970 \leq |\varphi'(x)| \leq 0,67$$

$$\Rightarrow |\varphi'(x)| \leq 0,67. \text{ Or } 0,67 \approx 0,7. \text{ D'où } |\varphi'(x)| \leq 0,7$$

c) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|$

Puisque $|\varphi'(x)| \leq 0,7$ alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction φ pour x appartenant à I , on a : $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leq 0,7|x - \alpha|$

Or d'après **Partie B 2)** on a $\varphi(\alpha) = e^{-\alpha} = \alpha$. Alors $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leq 0,7|x - \alpha| \Leftrightarrow$

$$|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha| \text{ (Ce qu'il fallait Démontrer)}$$

2) a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|$

On sait que : $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|$. Posons $x = u_n$

$$\Rightarrow |\varphi(u_n) - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|. \text{ Or } \varphi(u_n) = u_{n+1}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha| \text{ (Ce qu'il fallait Démontrer)}$$

En déduisons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0,3(0,7)^n$

On sait que $\alpha \in [0,4 ; 0,7] \Leftrightarrow 0,4 \leq \alpha \leq 0,7$ et $u_0 = 0,4$

Il vient que $0,4 - 0,4 \leq \alpha - u_0 \leq 0,7 - 0,4$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_0 - \alpha \leq 0,3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0,3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0,3(0,7)^0$$

Alors la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre n c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0,3(0,7)^n$

puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$; on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,3(0,7)^{n+1}$$

D'après **Partie C 2) a)**, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|$

$$\text{Par suite } |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha| \leq 0,7[0,3(0,7)^n]$$

$$\text{D'où } |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,3(0,7)^{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0,3(0,7)^n$ (Ce qu'il fallait Démontrer).

b) Etudions la convergence de la suite u puis.

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

La suite de terme général $0,3(0,7)^n$ est convergente $\forall n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers 0.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

D'où la suite u_n est convergente et converge vers α

3) Déterminons un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donnons à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.

On sait que $|u_n - \alpha| \leq 0,3(0,7)^n$ et d'autre part $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

$$\text{Par identification on a : } 0,3(0,7)^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow (0,7)^n \leq \frac{10^{-3}}{0,3} \Leftrightarrow e^{n \ln 0,7} \leq \frac{10^{-3}}{0,3}$$

$$\Leftrightarrow n \ln 0,7 \leq \ln \left(\frac{10^{-3}}{0,3} \right) \Rightarrow n \geq \frac{\ln \left(\frac{10^{-3}}{0,3} \right)}{\ln 0,7} \quad (\text{Car } \ln 0,7 < 0)$$

$$\Rightarrow n \geq 15,99. \text{ On peut donc prendre } p = 16$$

Ainsi à l'aide de la calculatrice, on obtient à 10^{-3} près la valeur de $u_{16} \approx 0,567$
 En déduisons une valeur approchée par défaut et par excès de α à 10^{-3} près
 - 0,567 est la valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de α .

- 0,568 est la valeur approchée à 10^{-3} près par excès de α .

ACTIVITE4:Partie A : On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de f et les limites aux bornes de cet ensemble.
- b) Détermine la fonction dérivée de f et établis son tableau de variations.
- 2) Démontre que $\forall x \in]1 ; +\infty[$; l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .
Vérifie qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près est 3,9.
- 3) Précise, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$

Partie B : soit g la fonction définie par : $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ si $t > 0$

- 1) Démontre que g est continue en 0. Etudie la dérivabilité de g en 0.
- 2) Calcule $g'(t)$ et Exprime $g'(t)$ en fonction de $f(t)$
- 3) a) Détermine la limite en $+\infty$ de g .
b) Dresse le tableau des variations de g .
- 4) Le plan est rapporté au repère orthogonal $(o; \vec{i}; \vec{j})$. Construire la courbe (Γ) représentative de g .

Partie C : Cette partie a pour objectif de Détermine l'aire A , en unités d'aires, de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation $x = 1$.

- 1) a) Démontre que la fonction g_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g_1(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$ est dérivable en 0.
b) Soit φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\varphi(x) = 2\sqrt{x} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$
Démontre que φ est dérivable en tout point de $[0 ; +\infty[$ et que $\varphi'(x) = g(x)$
- 2) En déduis que $A = \int_0^1 g(t) dt = 2\ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$
- 3) Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$ et k la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par $k(\theta) = \tan^2 \theta$
 - a) Calcule $(h \circ k)(0)$
 - b) Prouve que $\forall \theta \in I$; on a : $(h \circ k)'(\theta) = 4 \tan^2 \theta$
 - c) En écrivant $\tan^2 \theta = (\tan^2 \theta + 1) - 1$; Détermine une primitive de $(h \circ k)'$ puis donne l'expression de $(h \circ k)$
 - d) Calcule $h(1)$
 - 4) déduis des résultats précédents la valeur exacte de A .

ACTIVITE4:Partie A :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

- 1) a) Déterminons l'ensemble de définition de f
 $D_f = \{x / x \in \mathbb{R} ; 1+x \neq 0 \text{ et } 1+x > 0\} \Rightarrow D_f =]-1 ; +\infty[$
 Calculons la limite de f aux bornes de cet ensemble.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - (1+x)\ln(1+x)}{1+x}$$

Effectuons un changement de variable en posant $X = 1+x \Rightarrow x = X-1$

Si $x = -1$ alors $X = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(X-1) - X \ln X}{X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{2X - 2 - X \ln X}{X} = \frac{2(0) - 2 - (0)}{0^+} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} - \ln(x) = 2 - (+\infty) = -\infty$$

b) Déterminons la fonction dérivée de f puis établissons son tableau de variations.

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2(1+x) - (1)(2x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{2(1+x) - (1)(2x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$$

$\forall x \in D_f (1+x)^2 > 0$. Alors le signe $f'(x)$ dépend du signe de $1-x$.
Posons $1-x=0 \Rightarrow x=1$.

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1	1
	α	$0 + \infty$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	$-\infty$	$1 - \ln 2$

2) Démontrons que $\forall x \in [1; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α . Vérifions qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près est 3,9.

- D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in [1; +\infty[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $[1; +\infty[$ vers $]-\infty; 1 - \ln 2]$.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique telle que $f(\alpha) = 0$.

$$\text{- De plus } \begin{cases} f(3,9) = 0,003 \\ f(4) = -0,009 \end{cases} \Rightarrow f(3,9) \times f(4) < 0$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'encadrement suivant $3,9 < \alpha < 4$

3) Précisons, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$

D'après le tableau de variation de f :

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[; f(x) < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0; \alpha[; f(x) > 0$$

Partie B : soit g la fonction définie par : $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ si $t > 0$

1) Démontrons que g est continue en 0.

g est continue en 0 si et seulement si $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0) = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \times \sqrt{t} = (1) \times (0) = 0$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0) = 0$, alors g est continue en 0.

Étudions la dérivabilité de g en 0.

g est dérivable en 0 si et seulement si $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = g'(0) = l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \times \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= 1 \times (+\infty) = +\infty \neq l \in \mathbb{R}$$

Alors g n'est pas dérivable en 0.

2) Calculons $g'(t)$ et Exprime $g'(t)$ en fonction de $f(t)$

Pour tout $t > 0$; on a : $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} \Rightarrow g'(t) = \frac{\frac{1}{1+t} \times \sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \ln(1+t)}{(\sqrt{t})^2}$

$$\Rightarrow g'(t) = \frac{\frac{\sqrt{t}}{1+t} - \frac{\ln(1+t)}{2\sqrt{t}}}{t} = \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)} - \frac{\ln(1+t)}{2t\sqrt{t}} = \frac{1}{2t\sqrt{t}} \left(\frac{2t}{1+t} - \ln(1+t) \right)$$

$$\Rightarrow g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} \times f(t)$$

3) a) Déterminons la limite en $+\infty$ de g .

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left[t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t + \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

b) Dressons le tableau des variations de g .

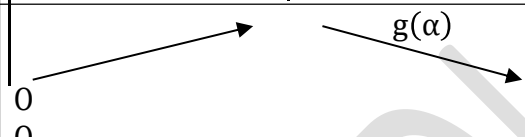
$g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} \times f(t)$. $\forall t \in D_g$; $2t\sqrt{t} > 0$. Alors le signe de $g'(t)$ dépend du signe de $f(t)$.

Or D'après **Partie B** : 3) on a :

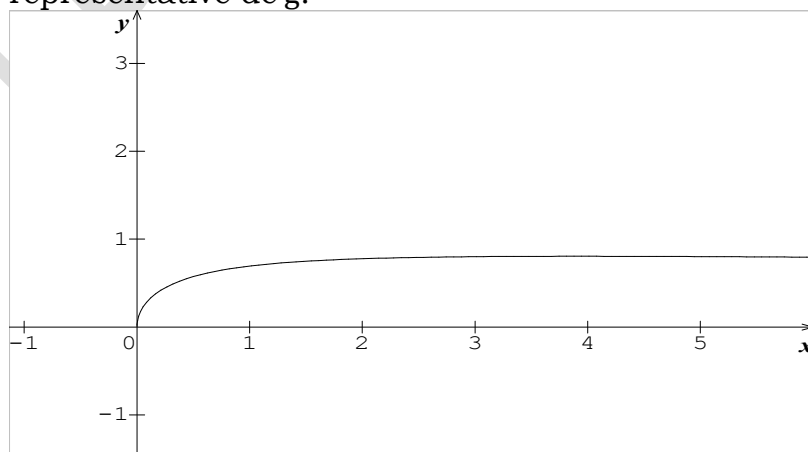
$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]\alpha ; +\infty[; f(t) > 0 \Rightarrow \forall x \in]-\infty ; 0[\cup]\alpha ; +\infty[; g'(t) < 0$

et $\forall x \in]0 ; \alpha[; f(t) < 0 \Rightarrow \forall x \in]0 ; \alpha[; g'(t) > 0$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		+		-	
$g(x)$	0				
	0		$g(\alpha)$		

4) Le plan est rapporté au repère orthogonal $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$. Construisons la courbe (Γ) représentative de g .



Partie C : Cette partie a pour objectif de Détermine l'aire A , en unités d'aires, de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation $x = 1$.

1) a) Démontrons que la fonction g_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g_1(x) = \sqrt{x}\ln(1+x)$ est dérivable en 0.

g_1 est dérivable en 0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_1(x) - g_1(0)}{x - 0} = g_1'(0) = l \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_1(x) - g_1(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_1(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'où la fonction g_1 est dérivable en 0 et son nombre dérivé est $g_1'(0) = 0$

b) Soit φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

Démontrons que φ est dérivable en tout point de $[0; +\infty[$

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt = 2g_1(x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$$

$\forall x \in]0; +\infty[$; g_1 est dérivable et sa dérivée est $g_1'(x) = \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ et $g_1(0) = 0$

De plus la fonction δ définie sur $[0; +\infty[$ par $\delta(t) = \frac{2\sqrt{t}}{1+t}$ est continue sur $[0; +\infty[$

Donc la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$ est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$h'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. On en déduit donc que φ est dérivable en tout point de $[0; +\infty[$.

Montrons que $\varphi'(x) = g(x)$

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt \Rightarrow \varphi'(x) = 2\left[\frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}\right] - \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = g(x)$$

2) En déduisons que $A = \int_0^1 g(t) dt = 2\ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

$$A = \int_0^1 g(t) dt = [\varphi(t)]_0^1 = \left(2\ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt\right) \text{ unité d'aire}$$

3) Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

et k la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $k(\theta) = \tan^2 \theta$

a) Calculons $(h \circ k)(0)$

$$(h \circ k)(0) = h[k(0)] = h[0] = 0$$

b) Prouvons que $\forall \theta \in I$; on a : $(h \circ k)'(\theta) = 4\tan^2 \theta$

$$(h \circ k)'(\theta) = k'(\theta) \times h'[k(\theta)].$$

Or $\forall \theta \in I$; $h'(\theta) = 2\tan \theta (\tan^2 \theta + 1)$ et $\forall x \in [0; +\infty[$; $h'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

$$\text{Donc } \forall \theta \in I \quad (h \circ k)'(\theta) = 2\tan \theta (\tan^2 \theta + 1) \left(\frac{2\sqrt{\tan^2 \theta}}{1 + \tan^2 \theta} \right) = 4\tan \theta \times |\tan \theta|$$

$$= 4\tan^2 \theta \quad \text{Car } \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ (ce qu'il fallait Démontrer)}$$

D'où $\forall \theta \in I$; on a : $(h \circ k)'(\theta) = 4\tan^2 \theta$

c) En écrivant $\tan^2 \theta = (\tan^2 \theta + 1) - 1$; déterminons une primitive de $(h \circ k)'$ puis donnons l'expression de $(h \circ k)$

$$(h \circ k)'(\theta) = 4\tan^2 \theta = 4[(\tan^2 \theta + 1) - 1] = 4(\tan^2 \theta + 1) - 4 = 4(\tan)'(\theta) - 4$$

Soit H une primitive de $h \circ k$. Alors $H(\theta) = 4(\tan)(\theta) - 4\theta$.

Or $h \circ k$ est une primitive de $(h \circ k)'$. D'où $(h \circ k)(\theta) = 4(\tan)(\theta) - 4\theta + c$. ($c \in \mathbb{R}$). De plus $(h \circ k)(0) = 0$

$$\text{Donc } (h \circ k)(\theta) = 4(\tan)(\theta) - 4\theta$$

d) Calculons $h(1)$

$$h(1) = h\left[k\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = (h \circ k)\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi = 4 - \pi \quad \text{avec } k\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

4) déduisons des résultats précédents la valeur exacte de A .

$$A = 2\ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt = 2\ln 2 - h(1) = (2\ln 2 - 4 + \pi) \text{ unité d'aire}$$

ACTIVITE5: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $]0; +\infty[$ la fonction f_n

$$\text{par : } f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$$

A- Etude du cas particulier de $n=0$:

1- Justifier, pour tout réel u , l'inégalité : $e^u \geq u + 1$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} + x - 1 \geq 0$ puis que $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + (x-1)e^x \geq 0$. 2- Déterminer les limites de f_0 en 0 et en $+\infty$.

3- Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, la dérivée de f_0 est donnée par $f_0'(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$. En déduire le sens de variation de f_0 .

4- Représenter la courbe (C_0) de f_0 dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

B- Etude de la famille de fonctions f_n pour $n \geq 1$:

On appelle (C_n) , la courbe de la fonction f_n dans le repère précédent.

1- Déterminer le sens de variation de f_n sur $]0; +\infty[$.

2- Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$. En déduire que (C_n) possède une asymptote que l'on

précisera. 3- Etudier les positions relatives des courbes (C_n) , (C_{n+1}) .

4- Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.

5- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique réel $a_n \in]0; 1[$ tel que $f_n(a_n) = 0$.

6- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $f_{n+1}(a_n) = \ln(a_n)$. En déduire que $a_n \leq a_{n+1}$ puis que la suite (a_n) est convergente.

7- a) En utilisant la partie A), montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(a_n) \geq \frac{1-e}{n}$ et que $a_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

c) En déduire la limite de la suite (a_n) .

8- Construire les courbes (C_1) et (C_2) dans le repère ci-dessus.

9- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x) dx$.

a) Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

b) Etudier le sens de variation de la suite (I_n) .

c) Démontrer que l'aire comprise entre les courbes (C_{n+1}) et (C_n) et les droites d'équation $x = 1$ et

$x = \frac{3}{2}$ est constante.

ACTIVITE5: Soit $n \in \mathbb{N}$; $D_f =]0; +\infty[$; $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$

A°) Etude de $n=0$

Pour $n=0$ on $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

1°) A-t-on $\forall u \in \mathbb{R}; e^u \geq u + 1$?

On a $e^u \geq u + 1 \Leftrightarrow e^u - u - 1 \geq 0$

Posons $h(u) = e^u - u - 1$ alors $h'(u) = e^u - 1$

En posant $h'(u) = 0$ on a $e^u - 1 = 0 \Leftrightarrow e^u = e^0 \Leftrightarrow u = 0$ D'où le tableau

u	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(u)$		-	+
$h(u)$		0	
Signe de $h(u)$		+	

Donc $\forall u \in \mathbb{R}$

$$h'(u) > 0 \Leftrightarrow e^u - u - 1 \geq 0 \text{ d'où } e^u \geq u + 1$$

A-t-on $\forall x \in \mathbb{R} e^{-x} + x - 1 \geq 0$?

Posons $u = -x$ alors $e^u - u - 1 \geq 0$ ce qui est vrai d'après précédent donc $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ est bien vraie.

De même A-t-on $\forall x \in \mathbb{R} 1 + (x - 1)e^x \geq 0$?

$$\text{Posons } \varphi(x) = 1 + (x - 1)e^x \text{ alors } \varphi'(x) = xe^x$$

En posant $\varphi'(x) = 0$ on a $xe^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ absurde ou $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	+
$\varphi(x)$		0	
Signe de $\varphi(x)$		+	

D'où $\forall x \in \mathbb{R} 1 + (x - 1)e^x \geq 0$

2°) Limites de f_0 en 0 et en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty \text{ (possibilité d'asymptote oblique)}$$

$$3^\circ) \text{ A-t-on } x \in]0; +\infty[, f_0(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$$

$$\text{On a } f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x} \text{ alors } f_0'(x) = \frac{e^x(x) - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \Rightarrow f_0'(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$$

- Sens de variation de f

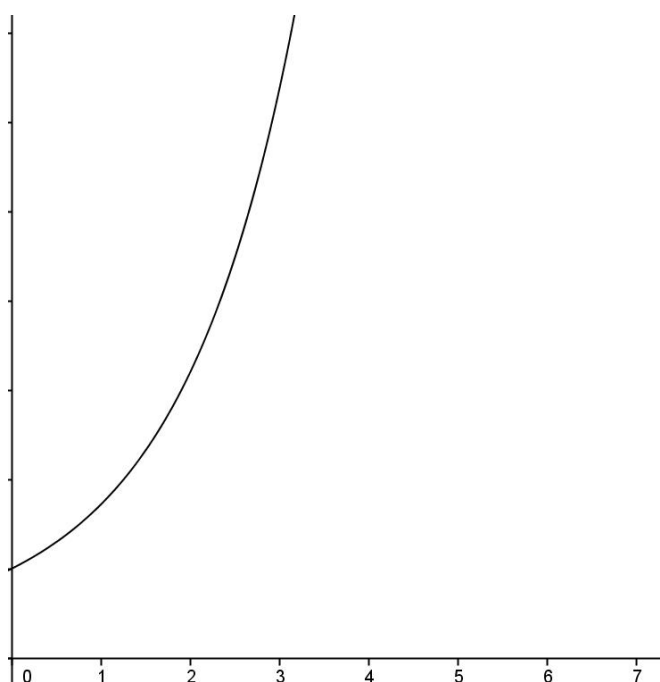
On a $f'_0(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$ comme $x \in]0; +\infty[$ alors $f'_0(x) > 0$ d'où f est strictement croissante.

4°) Représentation de la courbe :

Tableau de variation

x	0 $+\infty$
$f'_0(x)$	+
f(x)	1 $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{0} = +\infty$$



B°) Etude de la famille de fonction f_n pour $n \geq 1$

Soit (C_n) sa courbe

1°) Sens de variation de f_n sur $]0; +\infty[$

$$f_n(x) = \frac{e^x-1}{x} + n \ln x$$

2°) Les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} + n \ln x = 1 - \infty = -\infty \Rightarrow y = 0 \text{ est asymptote verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x-1}{x} + n \ln x = +\infty + \infty = +\infty$$

Dérivée

$$f'_n(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2} + \frac{n}{x} = \frac{e^x(x-1)+1+nx}{x^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[$ $f'_n(x) > 0 \Rightarrow f_n$ est strictement croissante.

3°) Position relative de (C_n) et de (C_{n+1}) :

On a $f_{n+1}(x) = \frac{e^x-1}{x} + (n+1)\ln x$

$f_{n+1}(x) = \frac{e^x-1}{x} + n\ln x + \ln x$ Avec $x \in]0; +\infty[$

Ainsi $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x-1}{x} + n\ln x + \ln x - \frac{e^x-1}{x} - n\ln x = \ln x$

Posons $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0	1	$+\infty$
lnx		- 0 +	

Pour $x \in]1; +\infty[$; $f_{n+1}(x) > f_n(x)$

alors (C_{n+1}) est au dessus de (C_n)

Pour $x \in]0; 1[$; $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

alors (C_{n+1}) est en dessous de (C_n)

Pour $x = 1$; (C_{n+1}) et (C_n) se coupent.

4°) Preuve que toutes courbes (C_n) passent par un même point B :

On a $f_n(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{x} + \ln x = y \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{x} + \ln x - y = 0$

$\Leftrightarrow \frac{e^x-1}{x} - y = -\ln x$

Pour $x = 1 \Rightarrow e - 1 - y = -\ln 1 \Rightarrow e - 1 - y = 0 \Rightarrow$

$y = e - 1$ d'où les courbes (C_n) passent par le point $B\left(\frac{1}{e-1}\right)$

5°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$; preuve qu'il $\exists$ un réel $\alpha_n \in]0; 1[$ tel que

$f_n(\alpha_n) = 0$

On a

x	0	α_n	1	$+\infty$
$f'_n(x)$				
$f_n(x)$	$-\infty$	(0)	(e-1)	$+\infty$



L'analyse de ce tableau permet de dire que f_n est définie, dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$ alors $\exists$ un réel $\alpha_n \in]0; 1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

6°) -Preuve que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)$

On a $f_n(\alpha_n) = \frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n} + n\ln(\alpha_n)$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n} + (n+1)\ln(\alpha_n) = \frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n} + n\ln(\alpha_n) + \ln(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) + \ln(\alpha_n) \text{ or d'après 5°) } f_n(\alpha_n) =$$

0 d'où

$$\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)}$$

-De même a-t-on $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \alpha_n \leq \alpha_{n+1}$?

On a $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)$ or $\alpha_n \in]0 ; 1[$ donc $\ln(\alpha_n) < 0 \Rightarrow f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ or $f_n(\alpha_n) = 0 \Rightarrow$

$f_{n+1}(\alpha_n) = 0$ donc

$f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ Et f_{n+1} est croissante d'où

$f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \Leftrightarrow \alpha_n < \alpha_{n+1}$ D'où $\boxed{\alpha_n < \alpha_{n+1}}$

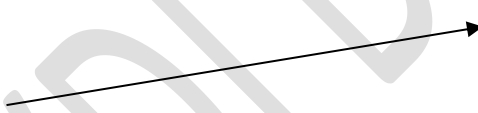
- (α_n) est-elle convergente ?

On a $\alpha_n < \alpha_{n+1} \Rightarrow (\alpha_n)$ est croissante et $\alpha_n \in]0 ; 1[$ donc (α_n) est minorée et majorée d'où (α_n) est convergente.

7°) a) De A) a-t-on $\forall x \in]0 ; 1[; \frac{e^x-1}{x} \leq e-1$?

De A) on a:

x	0	1
$f'_0(x)$		+
$f_0(x)$	1	(e-1) $+\infty$



Ainsi d'après le tableau $\forall x \in]0 ; 1[;$

$$f_0(x) \leq f_0(1) \Rightarrow \frac{e^x-1}{x} \leq e-1$$

b) De même $\forall n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$?

$$\text{On a } f_n(\alpha_n) = 0 \Rightarrow \frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n} + n\ln(\alpha_n) = 0 \Rightarrow n\ln(\alpha_n) = -\frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n}$$

$$\text{Or } \frac{e^x-1}{x} \leq e-1 \Leftrightarrow -\frac{e^x-1}{x} \geq 1-e \text{ en posant } x = \alpha_n$$

$$\text{on a } -\frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n} \geq 1-e \Leftrightarrow n\ln(\alpha_n) \geq 1-e \Leftrightarrow \boxed{\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}}$$

Et de même a-t-on $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$?

$$\text{On a } \ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n} \Leftrightarrow e^{\ln(\alpha_n)} \geq e^{\frac{1-e}{n}} \Leftrightarrow \boxed{\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}}$$

Déduisons la limite de α_n :

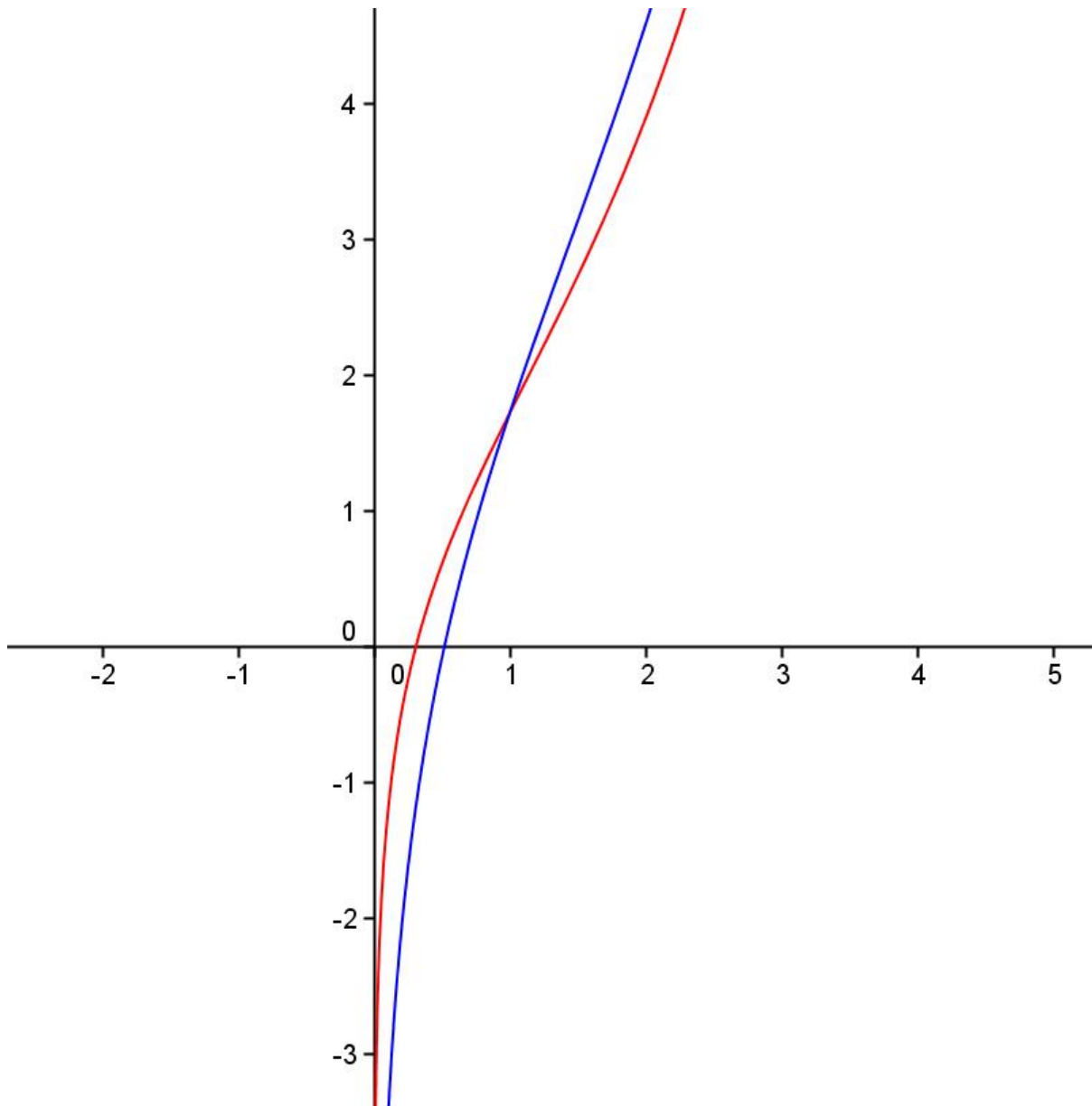
On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-e}{n}} = e^0 = 1 \text{ d'où } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \geq 1}$$

8°) Représentation de (C_1) et (C_2) :

On a $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln(x)$ alors $f_1(x) = \frac{e^x - 1}{x} + \ln(x)$

$$f_2(x) = \frac{e^x - 1}{x} + 2 \ln(x)$$



9°) $\forall n \in \mathbb{N} ; I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x) dx$

a) Interprétation graphique de l'intégrale :

$I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x) dx$ est l'aire de la partie délimitée par les droites d'équation $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$ de $f_n(x) - y$ avec $y = 0$

b) Etude du sens de variation (I_n) :

$$I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln(x) dx$$

$$I_{n+1} = \int_1^{\frac{3}{2}} f_{n+1}(x) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln \frac{e^x - 1}{x} - (x) + \ln(x) dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln(x) + \ln(x) - n \ln(x) dx$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \ln x dx$$

$$V = \ln x \Rightarrow V' = \frac{1}{x}; U' = 1 \Rightarrow U = x$$

$$\text{Alors } I_{n+1} - I_n = [x \ln x]_1^{\frac{3}{2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} x \frac{1}{x} dx = \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2} > 0 \text{ donc } I_n$$

C°) Démontrons que l'aire comprise entre (C_{n+1}) et (C_n) et les droites $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$ est une constante :

$$(C_n) : f_n(x); (C_{n+1}) : f_{n+1}(x)$$

$$A = \left(\int_1^{\frac{3}{2}} f_{n+1}(x) - f_n(x) dx \right) \times U_A \text{ Or } \int_1^{\frac{3}{2}} f_{n+1}(x) - f_n(x) dx = \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 1,108 \text{ donc}$$

$$A = 1,108 \times (2\text{cm})^2 = 4,432\text{cm}^2 \text{ d'où l'aire est une constant.}$$

ACTIVITE6:

A/ On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{1}{2} [\ln x - \ln(1-x)]$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 5 cm)

1°/ a) Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de cet ensemble. En déduire les équations des droites asymptotes à la courbe (C)

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

2°/ a) Montrer que le point $A(\frac{1}{2}; 0)$ est un centre de symétrie de (C)

b) Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) au point A .

c) On pose $\varphi(x) = f(x) - 2x + 1$. Etudier les variations de φ puis déduire les positions relatives de (C) et (D)

3°/ Tracer (C) et (D) dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$

B/ 1°/ On considère la fonction h définie sur $]0; 1[$ par $h(x) = f(x) - x$

a) En utilisant les variations de la fonction h , démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique qu'on notera α dans $]0; 1[$.

b) Montrer que $0,8 \leq \alpha \leq 0,9$.

2°/ On appelle s la réflexion d'axe $\Delta: y = x$ et (C') l'image de (C) par s

a) Démontrer qu'un point $M(x, y) \in (C')$ si et seulement si $x \in]0; 1[$ et

$2x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$. En déduire que (C') est la représentation graphique de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

b) Tracer Δ et (C') dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ de la partie **A/**

c) Montrer que le nombre α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$

C/ 1°/ On appelle I l'intervalle $]0,8; 0,9[$

a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b) Montrer que pour tout réel x de I, $g(x)$ est aussi élément de I et que $0 \leq g'(x) \leq 0,3$

c) En déduire que pour tout x élément de I on a $|g(x) - \alpha| \leq 0,3 |x - \alpha|$.

2°/ On considère la suite (U_n) d'éléments de I définie par $U_0 = 0,8$ et pour tout entier naturel n $U_{n+1} = g(U_n)$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0,3 \times |U_n - \alpha|$. Puis $|U_n - \alpha| \leq 0,1 \times (0,3)^n$

b) Déterminer un entier p tel U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près. Donner une valeur approchée de U_p à 10^{-4} près.

ACTIVITE6: A°) on considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2} [\ln x - \ln(1-x)]$ et (C) sa courbe dans un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1) a) $Df = ?$, limites aux bornes de Df

on a $f(x) = \frac{1}{2} [\ln x - \ln(1-x)]$

f est définie ssi $\begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases}$ d'où $Df =]0; 1[$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} [\ln x - \ln(1-x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} [-\infty - 0] = -\infty \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} [\ln x - \ln(1-x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} [0 + \infty] = +\infty \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

*j'en déduis les équations des droites asymptotes à (C)

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ donc $X=0$ est « AV » à (C)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ donc $X=1$ est « AV » à (C)

b) Etude des variations de f puis tableau de variation

$$\begin{aligned} \text{on a } f(x) &= \frac{1}{2} [\ln x - \ln(1-x)], \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(1-x)+x}{x(1-x)} \right) \\ &= \frac{1-x+x}{2x(1-x)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2x(1-x)} \text{ d'où}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2x(1-x)}} \quad \forall x \in D_f \text{ } f'(x) \text{ est strictement croissante}$$

D'où le tableau :

x	0	1
F'(x)		+
F(x)	$-\infty$	$+\infty$

2) a) Montrons que le point $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ est centre de symétrie de (C)

$A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ est centre d symétrie ssi $f(2a - x) + f(x) = 2b$

$$f(2a - x) = f\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - x\right) = f(1 - x); \quad 2b = 0$$

$$f(1 - x) + f(x) = \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1-(1-x))] + \frac{1}{2} [\ln x - \ln(1-x)]$$

$$= \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln x + \ln x - \ln(1-x)]$$

$$= \frac{1}{2} (0) = 0 \text{ d'où } A\left(\frac{1}{2}; 0\right) \text{ est bien centre de symétrie de (C)}$$

b) une équation de la tangente (D) à (C) au point A

on a $f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$; $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; $f'(x) = \frac{1}{2x(1-x)}$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] = 0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) + 0 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x - 1 \text{ d'où (D) : } Y = 2x - 1 \text{ est une équation de la tangente}$$

c) on pose $\varphi(x) = f(x) - 2x + 1$; variations de $\varphi(x)$ puis position relative de (D) et de (C)

$$\varphi'(x) = f'(x) - (2x + 1)'$$

$$= \frac{1}{2x(1-x)} - 2$$

$$\varphi'(x) = \frac{1-4x(1-x)}{2x(1-x)} \quad \forall x \in D_f \quad 2x(1-x) > 0 \text{ alors } \varphi'(x) \text{ dépend en signe et en racine de } 4x^2 -$$

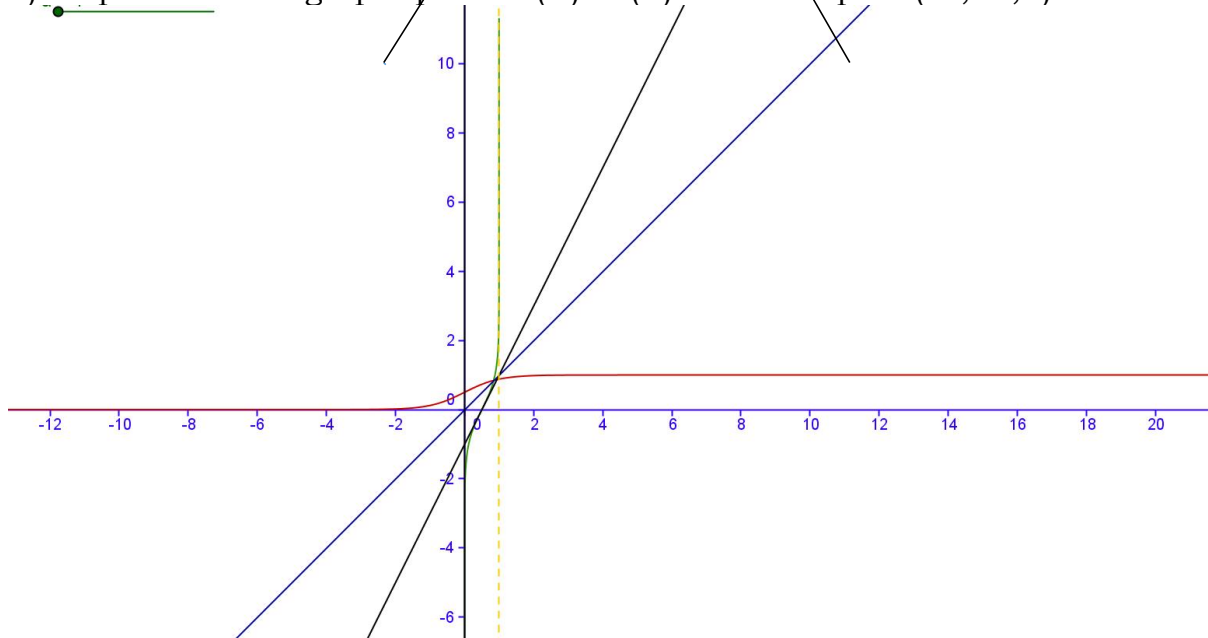
$$4x + 1$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(4) = 0 \text{ alors } x_1 = x_2 = -\left(\frac{-4}{2(4)}\right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ d'où le tableau :}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\varphi'(x)$	-	0	+

Position de (D) et de (C)	$\frac{(D)}{(C)}$	$\frac{(C)}{(D)}$
	(D) = (C)	

3) Représentation graphiques de (D) et (C) dans le repère (O ; J ; I)



B) 1) soit $h(x)=f(x)-x$ / h est définie sur $]0 ; +\infty[$

a) Variation de $h(x)$; soit $h(x)=f(x)-x \leftrightarrow h(x)=f'(x)-1 = \frac{1}{2x(1-x)} - 1 = \frac{1-2x+2x^2}{2x(1-x)}$

$\forall x \in D_h \quad 2x(1-x) > 0$ alors h' dépend en signe et en Racine de $1-2X+2x^2 \Delta = -4 < 0$

Ainsi le de h' est positive ainsi $\boxed{h \nearrow}$

- Preuve que $f(x)=x$ admet une solution unique noté α sur $]0 ; 1[$
 $h(x)$ étant définie ; dérivable et strictement croissante sur $]0 ; 1[$ alors elle réalise une bijection sur un intervalle $I =]-\infty ; +\infty[$ donc admet un unique zéro $\in]0 ; 1[$
soit x le zéro alors $h(x)=0 \leftrightarrow f(x)-x=0 \leftrightarrow f(x)=x$

b) Preuve que $0,8 \leq \alpha \leq 0,9$

On a : $h(0,8)=-0,1$ et $h(0,9)=0,2$; or $] -0,1 ; 0,2[\in]-\infty ; +\infty[$ alors $\boxed{0,8 \leq \alpha \leq 0,9}$

2) soit S la réflexion d'axe $\Delta : y=x$ et (C') l'image de (C) par S

a) A-t 'on $M(x ; y) \in (C')$ ssi $x \in]0 ; 1[$

Soit un point $M'(x' ; y') \in (C)$ et $S(M) = M' \leftrightarrow \{I \text{ milieu } [M'M] \in (\Delta) \quad \textcolor{red}{1} \text{ et } \overrightarrow{M'M} \perp \text{ à } (\Delta) \quad \textcolor{red}{2}$

On a : $\textcolor{red}{1} \quad x_I = \frac{x+x'}{2}$ et $y_I = \frac{y+y'}{2}$ or $x=y \leftrightarrow \frac{x+x'}{2} = \frac{y+y'}{2} \leftrightarrow x+x'=y+y' \leftrightarrow \textcolor{cyan}{x-y = y'-x'} \quad \textcolor{red}{1}$

$\overrightarrow{M'M} \perp (\Delta)$ Soit $\vec{U} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur directeur de (Δ) alors $\overrightarrow{M'M} \cdot \vec{U} = 0 \leftrightarrow x-x' + y-y' = 0$

$\leftrightarrow x+y = y'+x'$ d'où le système $\begin{cases} x-y = y'-x' & 1 \\ x+y = y'+x' & 2 \end{cases}$ 1+2 membre à

membre donne $2x=2y' \leftrightarrow x=y'$. Or $S(M)=M'$ par $(\Delta) \leftrightarrow \begin{cases} x = y' \\ x' = y \end{cases}$; ainsi $y=f(x) = \frac{1}{2} [\ln x -$

$$\ln(1-x) \leftrightarrow x' = \frac{1}{2}[\ln y' - \ln(1-y')] \text{ qui existe ssi } \begin{cases} y' > 0 \\ 1-y' > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ y' < 1 \end{cases} \quad y'=x$$

$$\in]0;1[\text{ d'où on a bien } \boxed{\forall M \left(\frac{x}{y} \right) \in (C') \text{ ssi } x \in]0;1[}$$

- A-t-on $2x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$??

On a : $x' = \frac{1}{2}[\ln y' - \ln(1-y')] \leftrightarrow 2x' = \ln\left(\frac{y'}{1-y'}\right)$ or les variables sont muet, d'où $2x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$

- Dédudisons que $g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ de courbe (C') ??

$$\text{Or } 2x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) \text{ fonction représentatif de (C')} \leftrightarrow e^{2x} = \frac{y}{1-y} \leftrightarrow e^{2x} - ye^{2x} = y \leftrightarrow$$

$$e^{2x} = y(e^{2x} + 1) \leftrightarrow \boxed{y = g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}} \text{ d'où (C')} \text{ est bien la courbe de } g$$

b) tracer de (C') et (Δ) (voir figure dans I) 3))

c) A-t- on α l'unique solution de l'équation $g(x) = x$

d'après l'analyse des courbes (C) , (C') et (Δ): $y=x$; on a : (Δ) et (C) se coupent or $S(C) = C'$ alors (C) , (C') et (Δ) se coupent au même point et $h(\alpha)=0 \leftrightarrow \alpha$ est l'unique solution de $f(x)=x \in (C) \leftrightarrow \alpha$ est l'unique solution de $g(x) = x \in (C')$

C) on a $I =]0.8;0.9[$

a) calcul de $g'(x)$ et de $g''(x)$

$$\text{on a } g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$$\begin{aligned} * g'(x) &= \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1 - e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \text{ d'où } \boxed{g'(x) = \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * g''(x) &= \frac{4e^{2x}(e^{2x}+1)^2 - 2[2e^{2x}(e^{2x}+1)(2e^{2x})]}{(e^{2x}+1)^4} \\ &= \frac{4e^{2x}[(e^{2x}+1)^2 - 2e^{2x}(e^{2x}+1)]}{(e^{2x}+1)^4} \\ &= \frac{4e^{2x}(e^{2x}+1)[e^{2x}+1 - 2e^{2x}]}{(e^{2x}+1)^4} \\ &= \frac{4e^{2x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^3} \text{ d'où } \boxed{g''(x) = \frac{4e^{2x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^3}} \end{aligned}$$

b) montrons que pour tout $x \in I$ $g(x) \in I$ et que $0 \leq g(x) \leq 0.3$

de B) 2) c) $g(x) = x$ admet α comme unique solution et $0.8 \leq \alpha \leq 0.9$

Donc on a $0.8 \leq x \leq 0.9 \Leftrightarrow 0.8 \leq g(x) \leq 0.9$

D'où $g(x) \in I$

$* 0 \leq g'(x) \leq 0.3$

Variation de $g''(x)$, le signe de $g''(x)$ depend de $1-e^{2x}$

$1-e^{2x} = 0 \Leftrightarrow -e^{2x} = -1 \Leftrightarrow 2x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 0$ alors $g'(x)$ est strictement croissante $g''(x) > 0$

$0.8 \leq x \leq 0.9$

$$g'(0.8) = 0.24 > 0 ; g'(0.9) = 0.22 < 0.3 \text{ donc}$$

$$0.24 \leq g'(x) \leq 0.22 \text{ d'où } \boxed{0 \leq g'(x) \leq 0.3}$$

c) A-t-on pour tout $x \in I$ $|g(x) - \alpha| \leq 0.3|x - \alpha|$

Appliquons le théorème de l'inégalité des accroissements finis

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|$$

On a $g(x) = x$; $g(\alpha) = \alpha$; $x_1 = \alpha$; $x_2 = x$; $k = 0.3$ ainsi

$$|g(x) - g(\alpha)| \leq 0.3|x - \alpha| \text{ d'où } \boxed{|g(x) - \alpha| \leq 0.3|x - \alpha|}$$

2) soit $(u_n) \in I$ par : $\begin{cases} u_0 = 0.8 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a) montrons que pour tout entier n on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.3 * |u_n - \alpha| \text{ puis } |u_n - \alpha| \leq 0.1 * (0.3)^n$$

Appliquons le théorème de l'inégalité des accroissements finis : $|g(x_2) - g(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|$
 $k = 0.3$; $x_2 = u_n$; $x_1 = \alpha$

$$|g(u_n) - g(\alpha)| \leq 0.3|u_n - \alpha| \text{ d'où}$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.3|u_n - \alpha|$$

$$\bullet \quad |u_n - \alpha| \leq 0.1(0.3)^n$$

$$|u_n - \alpha| \leq 0.3|u_{n-1} - \alpha|$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$|u_2 - \alpha| \leq 0.3|u_1 - \alpha|$$

$$|u_1 - \alpha| \leq 0.3|u_0 - \alpha|$$

$$|u_n - \alpha| \leq (0.3)^n |u_0 - \alpha|$$

En encadrant α on a :

$$0.8 \leq \alpha \leq 0.9 \Leftrightarrow -0.9 \leq -\alpha \leq -0.8$$

$$0.8 - 0.9 \leq u_0 - \alpha \leq 0.8 - 0.8$$

$$0 \leq |u_0 - \alpha| \leq |-0.1|$$

$$0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0.1 \text{ d'où } \boxed{|u_n - \alpha| \leq 0.1(0.3)^n}$$

b) Déterminons un entier naturel P tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près

On a $|u_n - \alpha| \leq 0.1(0.3)^n \Leftrightarrow u_n$ est une valeur approchée de α à $0.1(0.3)^n$ près

$$0.1(0.3)^n \leq 10^{-4}$$

$$(0.3)^n \leq \frac{10^{-4}}{0.1} \Leftrightarrow (0.3)^n \leq 10^{-3}$$

$$\ln(0.3)^n \leq \ln(10)^{-3}$$

$$n \ln(0.3) \leq -3 \ln(10)$$

$$n \geq \frac{-3 \ln(10)}{\ln(0.3)} \Leftrightarrow n \geq 5.73 \text{ D'où } P=6$$

u_6 est une valeur approchée de α à 10^{-4} près

*une valeur approchée de u_6

$$g(x) = x ; u_{n+1} = g(u_n)$$

$$u_6 = g(u_5)$$

$$*u_1 = g(u_0) \approx 0.8$$

$$u_2 = g(u_1) \approx 0.8$$

$$u_3 = g(u_2) \approx 0.8$$

$$u_4 = g(u_3) \approx 0.8$$

$$u_5 = g(u_4) \approx 0.8$$

$$u_6 = g(u_5) \approx 0.8 \text{ d'où } \boxed{u_6 \approx 0.8}$$

ACTIVITE7 : A. // Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et (C) sa courbe

représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Unité 2cm. 1°/
 Déterminer l'ensemble de définition de f .

2°/ Démontrer que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

3°/ Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .

4°/ a°/ Démontrer que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées. Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point I (1pt)

b°/ Etudier la position de (C) par rapport à (T)

5°/ Tracer (C) et (T) dans le même repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan.

6°/ a°/ A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x)dx$

b°/ Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C), (T) et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$

B.// Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0 ; \frac{\pi}{2}]$ par $h(x) = \frac{1}{2} f(\cos x)$ où f est la fonction définie en A.//

1°/ Vérifier que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\sin x}$

2°/ Calculer l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$; 3°/ Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$

a°/ Calculer I_0 et I_1 ; b°/ Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x dx$

c°/ En déduire l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis calculer I_2, I_3, I_4 et I_5 .

ACTIVITE7 A.// Soit $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et (C) sa courbe représentative , u.a=2cm

1) $D_f = ??$

f est définie ssi $\begin{cases} 1+x \neq 0 & \textcircled{1} \\ \frac{1-x}{1+x} > 0 & \textcircled{2} \end{cases}$

$\textcircled{1} 1+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$\textcircled{2}$ avec $N=1-x$ et $D=1+x$

on a $\frac{1-x}{1+x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \Rightarrow x < 1 \\ 1+x > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$

X	$-\infty$	-1	1
	$+\infty$		
N	+	+	-

D	-	+	+
N/D	-	+	-

D'où $D_f =] - 1 ; 1[$

2) Preuve que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations

$$*\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln\left(\frac{1+1}{1-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

Alors $x = -1$ est asymptote vertical a (c)

$$* \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{1-1}{1+1}\right) = \ln\left(\frac{0}{2}\right) = -\infty$$

Alors $x = 1$ est asymptote vertical a (C)

3) $f'(x) = ?$

$$\text{On a } f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x-1} - \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{-2}{1-x^2} = f'(x)$$

$\forall x \in D_f$, on a $f'(x) < 0$ donc la fonction f est décroissante d'où le tableau :

x	-1 1
f'(x)	-
f(x)	$+\infty$ $-\infty$

4) a) Preuve que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées :

$$\text{On a } f'(x) = \frac{-2}{1-x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{0(1-x^2) - 2x(-2)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$$\text{Posons } f''(x) = 0 \text{ Alors } \frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{On a } f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow f(0) = \ln 1 = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ alors (C) admet un point d'inflexion } I(0 ; 0)$$

*(T) = ??? a (C) au point I :

$$\text{On a } (\Delta) : y = f'(0)(x-0) + f(0) = -2x ; \boxed{y = -2x} \text{ est l'équation de la tangente a (C) au point I}$$

b) Position :

$$\text{Posons } h(x) = f(x) - y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + 2x$$

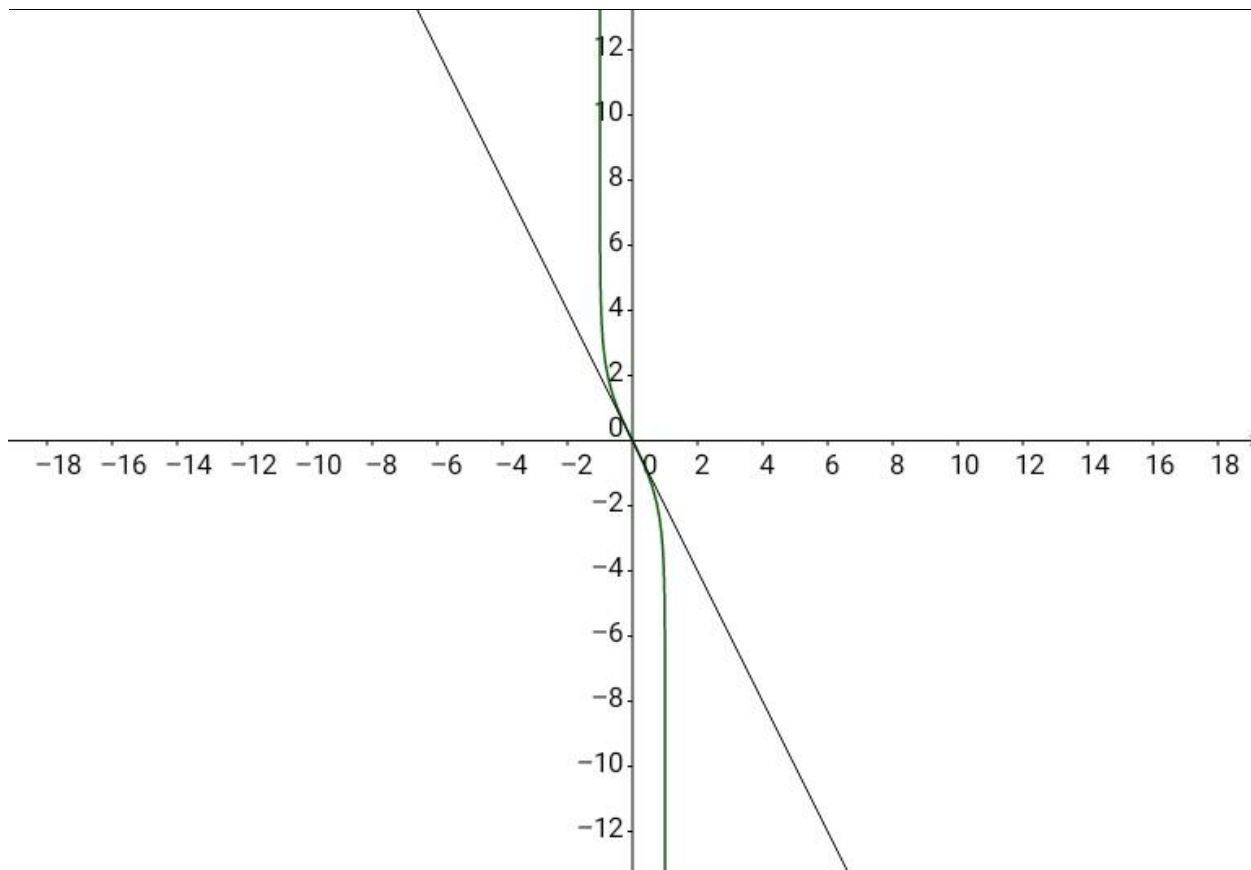
Etude de h :

$$\text{On a } h'(x) = f'(x) - y' = \frac{-2}{1-x^2} + 2 = \frac{-2+2(1-x^2)}{1-x^2} = \frac{-2+2-2x^2}{1-x^2} = \frac{-2x^2}{1-x^2} = h'(x)$$

$\forall x \in D_f$ on a $h'(x) < 0$ d'où le tableau :

X	-1 1	0
h'(X)	-	+
h(X)	$+\infty$	$-\infty$
Signe h(X)	+	-
Position de (C) par rapport a (T)	(C)/(T)	(T)/(C)

5) Tracer de (C) et (T) :



6) Par partie on a :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^0 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^0 \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx ; \text{ posons } U = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = U' = \frac{-2}{1-x^2} \text{ et } V=1 \Rightarrow V' = x$$

$$\text{Donc } I = \left[x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \right]_{\frac{1}{2}}^0 - \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-2x}{1-x^2} dx$$

$$I = \left[x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \right]_{\frac{1}{2}}^0 - \left[\ln(1-x^2) \right]_{\frac{1}{2}}^0 \text{ Tapez une équation ici.}$$

$$I = \left[0 - \left(-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) \right) \right] - \left[\ln 1 - \ln\left(1 - \frac{1}{4}\right) \right]$$

$$I = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$I = \frac{1}{2} \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 \Rightarrow \boxed{I = \frac{3}{2} \ln 3 - \ln 4}$$

b) L'aire de la partie du plan délimité par (c) ; (T) ; $x = -\frac{1}{2}$

$$\text{L'aire est (D) : } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ (C); (T) \end{cases}$$

$$A(D) = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (f(x) - y) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx - \int_{-\frac{1}{2}}^0 y dx \Leftrightarrow$$

$$A(D) = \frac{3}{2} \ln 3 - \ln 4 + 2 \left[x^2 \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{3}{2} \ln 3 - \ln 4 + 2 \left[0 - \frac{1}{4} \right] \Leftrightarrow$$

$$A(D) = \frac{3}{2} \ln 3 - \ln 4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (3 \ln 3 - 1) - \ln 4 = \left[\frac{1}{2} (3 \ln 3 - 2 \ln 4) \right] \times 4 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow$$

$$A(D) = 2(3 \ln 3 - 2 \ln 4) \text{ cm}^2 = \ln 3^6 - \ln 4^2 \text{ d'ou } \boxed{A(D) = \ln\left(\frac{3^6}{4^2}\right) \text{ cm}^2}$$

$$\mathbf{B.//} \text{ on a } h(x) = \frac{1}{2} f(\cos(x)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)$$

1) Preuve que $h(x)$ est la primitive de g qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ tel que $g(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

$$\text{On a } h(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} \Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \right) \Leftrightarrow$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{(1+\cos(x))\sin(x) + \sin(x)(1-\cos(x))}{1-\cos^2(x)} \right] \Leftrightarrow$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{(1+\cos(x))\sin(x) + \sin(x)(1-\cos(x))}{\sin^2(x)} \right] \Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(x)(1+\cos(x)+1-\cos(x))}{\sin^2(x)} \right] \Leftrightarrow h'(x) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\sin(x)}{\sin^2(x)} \right) = \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin(x)} = h'(x)$$

$$\text{Ainsi } h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-0}{1+0} \right) = \frac{1}{2} \ln(1)$$

$$\text{D'où } h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$2) \text{ Calculons } K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} dx$$

$$\text{On sait que } \int g(x) dx = h(x) \text{ donc } K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} \right) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{2} \left(\ln(1) - \ln \left(\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \right) \right) \right] \Leftrightarrow K =$$

$$\frac{1}{2} \left[0 - \ln \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \right) \right]$$

$$K = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln 3 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2} \ln 3}$$

3) Soit (I_n) avec $n \in \mathbb{N}$ tel que (I_n) :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin(x)} dx$$

a) Calculons I_0 ; I_1

$$*I_0 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^0 x}{\sin(x)} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} dx \Rightarrow I_0 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2} \ln 3 = I_0}$$

$$*I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin(x)} dx = \left[\ln(\sin x) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 1 - \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Leftrightarrow \boxed{I_1 = -\ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}$$

$$b) \text{ Calculons } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x \sin x) dx$$

$$\text{Posons } q_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x \sin x) dx = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n+1} (\sin x)^{n+1} dx = - \left[\frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = - \left[0 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] \Leftrightarrow \boxed{q_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \times \frac{1}{n+1}}$$

c) *En déduisons l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n

$$\text{On a } I_{n+2} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+2} x}{\sin(x)} dx \text{ alors } I_n - I_{n+2} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^n x}{\sin(x)} - \frac{\cos^{n+2} x}{\sin(x)} \right) dx \Rightarrow$$

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^n x - \cos^n x \cos^2 x}{\sin(x)} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^n x (1 - \cos^2 x)}{\sin(x)} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^n x \sin^2 x}{\sin(x)} \right) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x \sin x) dx \text{ d'où } \boxed{I_n - I_{n+2} = q_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \times \frac{1}{n+1}}$$

*Calculons I_2 ; I_3 ; I_4 et I_5

$$* \text{Pour } n=0 \text{ on a : } I_0 - I_2 = q_0 \Rightarrow I_2 = I_0 - q_0 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \ln 3 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{1}{2} (\ln 3 - 1)}$$

$$\text{Pour } n=1 \text{ on a } I_1 - I_3 = q_1 \Rightarrow I_3 = I_1 - q_1 \Rightarrow I_3 = -\ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right)^{1+1} \times \frac{1}{1+1}$$

$$= -\ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \frac{1}{2} = -\ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{8} \text{ donc } \boxed{I_3 = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8}}$$

$$* \text{pour } n=2 \text{ on a } I_2 - I_4 = q_2 \Leftrightarrow I_4 = I_2 - q_2 \Leftrightarrow I_4 = \frac{1}{2} (\ln(3) - 1) - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 \times \frac{1}{3} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{I_4 = \frac{1}{2} \left(\ln(3) - \frac{13}{12} \right)}$$

$$* \text{Pour } n=3 \text{ on a } I_3 - I_5 = q_3 \Leftrightarrow I_5 = I_3 - q_3 \Leftrightarrow I_5 = -\ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) -$$

$$\frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} \right)^4 \times \frac{1}{4} = -\ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{9}{64} ; \boxed{I_5 = -\ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{9}{64}}$$

ACTIVITES : A-// Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} \ln x$

1°/ Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$

2°/ a). Étudier les variations de g et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2 . **b).** Quel est le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles : $]0 ; \alpha[$ et $]\alpha ; +\infty[$.

3°/ Vérifier que $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire de l'inégalité $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ un encadrement de $f(\alpha)$

4°/ Acheter l'étude de la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

B-// 1°/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$ où h est

la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{e^x}$

2°/ a.) Calculer $h'(x)$ et vérifier que $\forall x \in [\frac{3}{2} ; 2]$ on a : $-\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$

En déduire qu'il existe un réel $k \in [0 ; 1]$ tel que $\forall x \in [\frac{3}{2} ; 2], |h'(x)| \leq k$

b.) Prouver que pour tout couple de réels (x, y) choisis dans $[\frac{3}{2} ; 2]$ on a $|h(x) - h(y)| \leq k |x - y|$

3°/ Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h(U_n)$.

a.) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [\frac{3}{2} ; 2]$

b.) En appliquant à $(U_n ; \alpha)$ l'inégalité établie dans 2°/ b.), prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq k |U_n - \alpha|$

c.) En déduire par un raisonnement par récurrence l'inégalité :

$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|$ et montrer que la suite (U_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

4°/ Montrer en utilisant les variations de h que $U_{n+1} - \alpha$ et $U_n - \alpha$ sont de signe contraires. En déduire que α est compris entre U_n et U_{n+1} . Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

C-// On se propose de déterminer toutes les fonctions définies et deux fois dérivables sur $]0; +\infty[$ solutions de l'équation différentielle : (E) : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.

1°/ a.) Vérifier que la fonction f définie dans la partie A-// est une solution de (E)

b.) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y'' + 3y' + 2y = 0$

2°/ a.) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$. Montrer que g est une solution de (E) si et seulement si $g-f$ est une solution de (E').

b.) En déduire toutes les solutions de (E).

ACTIVITES : A// Soit $f(x) = e^{-x} \ln x$, $Df =]0; +\infty[$ _____

① Détermination de $f'(x)$

On a $f(x) = e^{-x} \ln x$ qui est sous la forme $U \times V$ alors :

$$f'(x) = -e^{-x} \ln x + \frac{1}{x} e^{-x} = e^{-x} \left(-\ln x + \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = e^{-x} \left(-\ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$\forall x \in]0; +\infty[, e^{-x} > 0$ alors $f'(x)$ dépend en signe et en racine de $\left(-\ln x + \frac{1}{x} \right)$ or $g(x) = \left(-\ln x + \frac{1}{x} \right)$ ainsi $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.

②a) Etude des variations de g .

On a $g(x) = \left(-\ln x + \frac{1}{x} \right)$

• $Dg =]0; +\infty[$ _____

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\ln x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\ln x + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{-x-1}{x^2} = -\left(\frac{x+1}{x^2} \right) \text{ on a } x^2 > 0 \text{ donc } g' < 0, \text{ d'où le tableau}$$

X	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	$+\infty$		$-\infty$

Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$

D'après l'analyse du tableau on a $g(x)$ définie dérivable et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-\infty; +\infty[$ de cet fait $g(x)=0$ admet une unique solution α / $g(\alpha) = 0$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = 0,26 \text{ et } g(2) = -0,19; g(2) \times g\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \text{ donc } \left(\frac{3}{2}\right) < \alpha < 2$$

b) Signe de $g(x)$

D'après l'étude du tableau :

➤ Si $x \in]0; \alpha]$, $g(x) \geq 0$

➤ si $x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) < 0$

③ A-t-on $f(x) = \frac{e^{-x}}{\alpha}$?

On a $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\ln \alpha + \frac{1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}$ or $f(\alpha) = e^{-\alpha} \ln \alpha$ avec $\ln \alpha = \frac{1}{\alpha}$ donc $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha}$ d'où

$$f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$$

Déduction :

- $\frac{3}{2} < \alpha < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\alpha} < \frac{2}{3}$ ①
- $\frac{3}{2} < \alpha < 2 \Leftrightarrow -2 < -\alpha < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow e^{-2} < e^{-\alpha} < e^{-\frac{3}{2}}$ ②

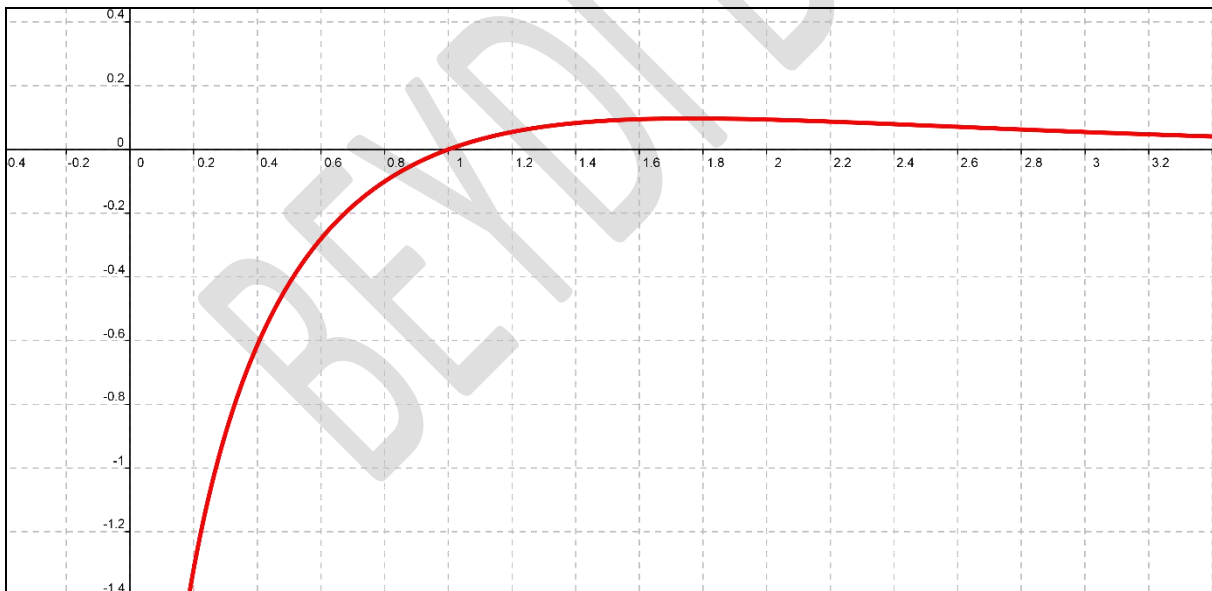
$$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \Leftrightarrow \frac{e^{-2}}{2} < \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} < \frac{2e^{-\frac{3}{2}}}{3} \text{ d'où}$$

$$\frac{e^{-2}}{2} < f(\alpha) < \frac{2e^{-\frac{3}{2}}}{3}$$

④ Achèvement de l'étude de f

- $f(x) = e^{-x} \ln x$, $Df =]0; +\infty[$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$
- $f'(x) = e^{-x} \left(-\ln x + \frac{1}{x} \right)$

x	0	$+\infty$	α
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$ 0		$f(\alpha)$



Pour $\alpha =$

2; $f(2) = 0,09$

B) ① A t on $g(x)=0 \Leftrightarrow h(x) = x$ avec $h(x) = \frac{1}{e^x}$ et $Dh =]0; +\infty[$?

On a: $h(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln x$ ①

$g(x)=0 \Leftrightarrow -\ln x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln x$ ② ; ①=② d'où

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = x$$

②a) $h'(x) = ?$

On a $h(x) = e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow h'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ d'où

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

❖ Preuve que $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], -\frac{4}{9} e^{-\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}}$

$$\text{On a: } \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{4}{9} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{2}{3}} \quad (2)$$

① × ②

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{4}{9} \Leftrightarrow -\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \leq -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \leq -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} \text{ d'où}$$

$$-\frac{4}{9} e^{-\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}}$$

❖ $K = ? / |h'(x)| \leq k$ avec $k \in [0; 1]$

Du résultat précédent on a : $-\frac{4}{9} e^{-\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \left| -\frac{4}{9} e^{-\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} \leq |h'(x)| \leq \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$ de ce résultat on peut déduire que $|h'(x)| \leq \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$ d'où

b) Preuve que pour tout couple de ré $\boxed{k = \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}}$ et $(x; y) \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ on a : $|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$.

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction h aux bornes de $[x; y]$ on a

③ Soit $(U_n) \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$

$$|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$$

a) A-t-on $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$?

Soit la fonction $(P_n): U_{n+1} = h(U_n)$ avec $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$

On a : pour $n=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq U_0 \leq 2$ or $U_0 = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq 2 \leq 2$ vraie donc P_0 est vraie.

Supposons que P_n soit vraie et démontrons que P_{n+1} est vraie or $U_{n+1} = h(U_n)$ et $h(x)$ est décroissante donc $h(2) \leq h(U_n) \leq h\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow 1,6 \leq h(U_n) \leq 1,9 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq 1,6 \leq h(U_n) \leq 1,9 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq 2 \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}; \text{ d'où}$$

$$U_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$$

b) En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à ② b)

aux bornes de $[U_n; \alpha]$ a-t-on : $|U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$?

On sait que : $|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$ ainsi pour $x = U_n$ et $y = \alpha$

On a : $|h(U_n) - h(\alpha)| \leq k|U_n - \alpha|$ or $\begin{cases} h(U_n) = U_{n+1} \\ h(\alpha) = \alpha \end{cases}$ d'où

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$$

❖ Par récurrence a t on $|U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|$

On a : pour $n=0 \Leftrightarrow |U_1 - \alpha| \leq k|U_0 - \alpha|$

$$n=1 \Leftrightarrow |U_2 - \alpha| \leq k|U_1 - \alpha|$$

"

"

"

"

$$n-2 \Leftrightarrow |U_{n-1} - \alpha| \leq k|U_{n-2} - \alpha|$$

$$n-1 \Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq k|U_{n-1} - \alpha|$$

En faisant les produits membre à membre

$\Leftrightarrow$

$$|U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|$$

❖ Preuve que (U_n) est convergente

$$\text{On a : } |U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha| \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n |U_0 - \alpha| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |2 - \alpha|$$

D'où

Donc est $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n |U_0 - \alpha| = 0$ convergente.

④ A-t-on $U_{n+1} - \alpha = -(U_n - \alpha)$?

Soit $\alpha \in [U_{n-1}; U_n]$ on a : $U_{n-1} \leq \alpha \leq U_n \Leftrightarrow h(U_n) \leq h(\alpha) \leq h(U_{n-1})$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} \leq \alpha \leq U_n \Leftrightarrow U_{n+1} - \alpha \leq 0 \leq U_n - \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} U_{n+1} - \alpha \leq 0 \\ U_n - \alpha \geq 0 \end{cases} \text{ donc}$$

U_{n+1} et U_n Sont opposés en signe.

Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

On a : $|U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &\leq \alpha \leq 2 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq -\alpha \leq -\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq U_0 - \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow |U_0 - \alpha| &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow |U_0 - \alpha| &\leq \frac{1}{2} k^n \\ \Leftrightarrow |U_0 - \alpha| &\leq \frac{1}{2} (0,86)^n \end{aligned}$$

$$\text{C) (E): } y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$$

①a) A t on dans A // une solution de (E) ?

De A // $f(x) = e^{-x} \ln x$ donc on a f solution de (E) ssi :

$$f'' + 3f' + 2f =$$

$$\frac{x-1}{x^2} e^{-x} \text{ or } f(x) = e^{-x} \ln x \Leftrightarrow f'(x) = -\ln x e^{-x} + \frac{1}{x} e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) \text{ et } f''(x) = e^{-x} \ln x - \frac{1}{x} e^{-x} - \frac{1}{x} e^{-x} - \frac{1}{x^2} e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) = e^{-x} \left(\ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} f'' + 3f' + 2f &= e^{-x} \left(\ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) + 3e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) + 2e^{-x} \ln x \\ &= e^{-x} \left(\ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3 \ln x + 2 \ln x \right) = e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{x-1}{x^2} e^{-x} \end{aligned}$$

$$\text{Or } y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x} \text{ et } f'' + 3f' + 2f = \frac{x-1}{x^2} e^{-x} \text{ donc}$$

$f'' + 3f' + 2f = y'' + 3y' + 2y$ D'où f est solution de (E).

b) Résolution de (E') : $y'' + 3y' + 2y = 0$

$$\text{On a } y'' + 3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow EC = r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$a = 1; b = 3 \text{ et } c = 2; \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$$

$$\Leftrightarrow r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 1}{2} = -2 \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

d'où

②a) A ton

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}; A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

g solution de (E) ssi (g-f) est

solution de (E) ?

On a : f et g solution de (E') ssi

$$g'' + 3g' + 2g = 0 \text{ et } f'' + 3f' + 2f = 0 \text{ donc}$$

$$\begin{cases} g'' + 3g' + 2g = 0 & \textcircled{1} \\ f'' + 3f' + 2f = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad g'' + 3g' + 2g - f'' + 3f' + 2f = 0$$

$\Leftrightarrow (g'' - f'') + 3(g' - f') + 2(g - f) = 0$ Or $(E') : y'' + 3y' + 2y = 0$ donc $(g-f)$ est solution de (E') d'où **g est solution de (E).**

b) Dédudisons toutes les solutions de (E)

On a $(g-f)$ solution de (E) donc les solutions de (E) sont du type :

$$g(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x} + e^{-x} \ln x$$

ACTIVITE9 :

1°/ On considère g, la fonction numérique de courbe représentative (Γ) définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{x}{e^{x-1}}.$$

a) Calculer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$

b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

c) Tracer la courbe (Γ) dans un repère orthonormal du plan, en prenant soin de tracer la tangente à l'origine.

2°/ Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |xe^{x-1}|$.

a) Etudier la dérivabilité de h en 0 et en 1.

b) Donner une méthode permettant d'obtenir la courbe (Γ') représentative de h sur $]-\infty ; 1]$ à l'aide de (Γ) .

c) Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation

d) Tracer (Γ') ainsi que les demi-tangentes à (Γ') aux points d'abscisses 0 et 1 dans le même repère que (Γ)

3°/ Soit la suite (U_n) avec n un entier naturel non nul défini pour tout n par

$$U_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx.$$

(On rappelle que $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots \times 3 \times 2 \times 1$ avec $0! = 1$)

a) Calculer U_1 .

b) En utilisant l'intégration par parties, exprimer U_n en fonction de U_{n-1} pour

$n \geq 1$. En déduire que $U_n - e = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{k!}\right)$ pour $n \geq 1$.

ACTIVITE9 :

$$1) \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = |xe^{x-1}|$$

a) Etude de la dérivabilité de h en 0 et 1

Ecrivons $h(x)$ sans le symbole de la valeur absolue prenons $x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
$ x-1 $	$1-x$	$x-1$	
$h(x)$	$ xe^{1-x} $	$ xe^{x-1} $	

Pour $x \in]-\infty ; 1[$ $h(x) = |xe^{1-x}|$

$xe^{1-x} = 0$ $x=0$ et $\forall x \in \mathbb{R} e^{1-x} > 0$ d'où le tableau

x	$-\infty$	0	1
x	-	0	+
$h(x)$	$-xe^{x-1}$	xe^{1-x}	

Pour $x \in [1, +\infty[$, $h(x) = |xe^{x-1}|$

x	1 + ∞
x	+
h(x)	xe^{x-1}

Ainsi en les combinant dans un même tableau on a

x	$-\infty$	0	1 + ∞
x	-	0 +	0 +
h x	$-xe^{1-x}$	xe^{1-x}	xe^{x-1}

Pour $x \in]-\infty, 0]$, $h(x) = -xe^{1-x}$

Pour $x \in [0, 1]$, $h(x) = xe^{1-x}$

Pour $x \in [1, +\infty[$, $h(x) = xe^{x-1}$

Dérivabilité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h'(0) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-xe^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -e^{1-x} = -e^1 = -e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h'(0) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-xe^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^1 = e$$

D'où h n'est pas variable en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h'(x) - h(x_0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h'(x) - h(x_0)}{x - 0}$

Dérivabilité en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h'(x) - h(x_0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h'(x) - h(x_1)}{x - 1} = \frac{xe^{1-x} - 1}{x - 1}$$

Soit $f(x) = e^{x-1}$ alors $f(1) = 1$

$$f(x) = e^{x-1} \text{ alors } f'(1) = -1$$

$$f(x) = 1 - (x - 0) = 1 - x + 1 = 2 - x$$

$$\text{Selon } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(2x-x)^{-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x-1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h'(1) - h(1)}{x-1} =$$

$$- \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h'(1) - h(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{xe^{x-1} - 1}{x-1} \text{ soit } k(x) = e^{x-1} \text{ alors } k(x) = 1$$

$$k'(x) = e^{x-1} \text{ alors } k'(1) = 1$$

alors $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2$ d'où h n'est pas dérivable

$x \rightarrow 1^+$ non plus en 1 car $\lim_{x \rightarrow 1^-} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+}$

b) Une méthode permettant d'obtenir (Γ') de h sur $]-\infty, 1]$ à l'aide de (Γ)

Pour $x \in]-\infty, 0]$ $h(x) = -xe^{1-x} = \frac{x}{e^{x-1}} = -g(x)$

alors (Γ') est le symétrique de (Γ) par rapport à (Ox)

Pour $x \in]-\infty, 1]$ $h(x) = -xe^{1-x} = \frac{x}{e^{1-x}} = -g(x)$ alors $(\Gamma') = (\Gamma)$

c) Etude des variations de h et dressons son tableau de variation

$$A'(x) = ?$$

- Pour $x \in]-\infty, 0]$ $h(x) = -xe^{1-x} \Rightarrow h'(x) = -e^{1-x} + xe^{1-x}e^{1-x}(x-1)$

x	$-\infty$	0
$h'(x)$		-
$h(x)$		$\searrow$

$h'(x) \leq 0$ alors h $\searrow$

- Pour $x \in [0, 1]$ $h(x) = -xe^{1-x}$ alors $h'(x) = -e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{x-1}(1-x)$

x	0	1
$h'(x)$		+
$h(x)$		$\nearrow$

$h'(x) \geq 0$ alors h $\nearrow$

- Pour $x \in [1, +\infty[$ $h(x) = xe^{1-x}$ alors $h'(x) = e^{1-x} + xe^{x-1} = e^{x-1}(1+x)$

x	1	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$		$\nearrow$

$h'(x) \geq 0$ alors h $\nearrow$

Tableau de variation de h

	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		-	+	+	
$h(x)$		$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

2) Soit la suite (U_n) avec n un entier naturel non nul défini pour tout n par :

$$U_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$$

a) Calcul de U_1

$$U_1 = \frac{1}{1!} \int_0^1 (1-x)e^x dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx$$

Posons $U = 1-x \Rightarrow U' = -1$

$$V' = e^x \Rightarrow V = e^x \text{ alors } U_1 = [UV]_0^1 - \int_0^1 V' Vx dx \Rightarrow U_1 [UV]_0^1 - \int_0^1 -1e^x dx$$

dx

$$\Rightarrow U_1 = [(1-x)e^x]'_0 + \int_0^1 e^x dx$$

$$\Rightarrow U_1 = [e^x - xe^x]'_0 + [e^x]'_0$$

$$\Rightarrow U_1 = [e^x - xe^x + e^x]'_0$$

$$\Rightarrow U_1 = [2e^x - xe^x]'_0$$

$$= 2e - e - 2$$

$$\Rightarrow = e - 2 \text{ d'ou}$$

$$U_1 = e - 2$$

b) En utilisant l'intégration par partie exprimons U_{n-1} en fonction de $U_n - 1$ pour $n \geq 1$

On a $U_1 \frac{1}{n} \int_0^1 (-x)^n e^x dx$ posons $U - (x-1)^n \Rightarrow U' = -n(1-x)^{n-1} \quad V' = e^x \Rightarrow V = e^x$

$$U_n \frac{1}{n} ([(1-x)e^x]'_0 - \int_0^1 -n(1-x)^{n-1} e^x dx$$

$$= \frac{1}{n} ([(1-x)e^x]'_0 - \frac{1}{n!} \int_0^1 -n(1-x)^{n-1} e^x dx$$

$$= \frac{1}{n!} ([(1-x)e^x]'_0 + \frac{1}{n!} \int_0^1 -n(1-x)^{n-1} e^x dx$$

$$= \frac{1}{n!} (-1) + \frac{n}{n!} \int_0^1 (x-1)^{n-1} e^x dx$$

$$= \frac{-1}{n!} + \frac{n}{n(n-1)!} \int_0^1 (x-1)^{n-1} e^x dx$$

$$= \frac{-1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (x-1)^{n-1} e^x dx$$

$$= \frac{-1}{n!} + U_1 - 1 \text{ d'ou}$$

$$U_n = \frac{-1}{n!} + U_{n-1}$$

Déduction de $U_n - e = \sum_{k=0}^n \left(\frac{-1}{k!} \right)$

$$U_1 = -\frac{1}{n!} + U_{n-1} \Rightarrow U_1 = \frac{-1}{1!} + U_0$$

$$U_2 = \frac{-1}{2!} + U_1$$

$$U_3 = \frac{-1}{3!} + U_2$$

$$U_4 = \frac{-1}{4!} + U_3$$

$$U_n = \frac{-1}{n!} + U_{n-1} \text{ en additionnant membre à membre on a :}$$

$$U_n = \frac{-1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots - \frac{1}{n!} + U_0 \Leftrightarrow U_n = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k!} \right) + U_0$$

$$\Rightarrow U_0 = \frac{1}{0!} \int_0^1 e^x dx = [e^x]'_0 \quad U_0 = e - 1$$

$$U_n = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{k!} \right) + e - 1$$

$$\Leftrightarrow U_n - e = \frac{-1}{0!} + \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k!} \right)$$

$$\Leftrightarrow U_n - e = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{k!} \right) \text{ d'ou } U_n - e = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{k!} \right)$$