

Menu 1 : I) On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx ; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \text{ et } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x dx$$

a°) Calculer $I - J$ et $J + K$.

b°) Exprimer $\cos^4 x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. En déduire la valeur de $I + J - 3K$, puis celles de I, J et K .

II) Calculer les réels suivants : a) $\int_2^3 (3x^2 - 6x - 3 + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}) dx$; b) $\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{10}{x^2} + \tan^2(2x+1)) dx$.

III) Soit l'intégrale I définie par $I = \int_4^5 (\sqrt{x^3 - 12x - 16}) dx$. Calculer I en utilisant les méthodes suivantes :

1) Changement de variable ; 2) Par partie ; 3) Recherche directe d'une primitive.

IV) On considère la fonction numérique de la variable x définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$

1) Mettre $f(x)$ sous la forme $f(x) = \frac{1}{[A(x)]^2 + k^2}$ où A est une fonction affine de x et k une constante réelle à déterminer

2) On considère l'intégrale $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

Par le changement de variable $A(x) = 2 \tan(t)$, avec $t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ Calculer I .

V) Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 (x^n \sqrt{1-x^2}) dx$

1) a) Calculer I_1 b) En intégrant par parties, montrer que $I_n = (\frac{n-1}{n+2}) I_{n-2}$ (on posera $x^n = x \cdot x^{(n-1)}$).

Menu 2 : On considère la fonction c définie sur $[1; 10]$ par $c(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x + 9}{x^2}$ de courbe (Γ) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2cm.

1) Écrire $c(x)$ sous forme de somme de termes en fonction de x .

2) Montrer que pour tout $x \in [1; 10]$, $c'(x) = \frac{x^3 - 12x - 18}{x^2}$

3) Soit d la fonction définie sur $[1; 10]$ par $d(x) = x^3 - 12x - 18$

a) Étudier les variations de d sur $[1; 10]$

b) Montrer que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique α et que $4 < \alpha < 5$

c) Compléter le tableau suivant :

x	4,04	4,05	4,06	4,07
$d(x)$				

d) En déduire un encadrement de α à 10^{-2} près.

e) Préciser alors les signes de $d(x)$ sur $[1; 10]$

4) a) Déduire de tout ce qui précède, les variations de c sur $[1; 10]$

b) Donner la valeur arrondie de $c(\alpha)$ à 10^{-2} près qui optimise la fonction c sur $[1; 10]$.

5) a) Tracer (Γ) sur le repère défini puis mettre en évidence le domaine (D) limité par (Γ) , l'axe $x'Ox$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

b) Déterminer en cm^2 l'aire $A(D)$ (la première question atteint ici toute son importance).

Menu 3 : 1) Soit la fonction numérique f telle que $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2}$ de courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

a) Étudier et dresser le tableau de variations de f .

b) Déterminer une équation de la tangente (T_0) à (C_f) au point d'abscisse 0.

c) Tracer (C_f) ; ses asymptotes et (T_0) dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

d) Résoudre graphiquement le problème d'existence et le signe des racines de l'équation paramétrique de variable réelle x notée et déterminée par : (E_m): $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x+4}{x-1}$ de courbe (C_g) dans le même repère que (C_f).

a) Etudier les variations de g . Déterminer les coordonnées des intersections de (C_g) avec les axes de coordonnées repère et préciser une équation de la tangente à (C_g) en chacun de ces points.

b) Montrer que le point $A(1; 1)$ est centre de symétrie pour (C_g).

c) Etudier l'intersection de (C_f) et (C_g) puis déterminer selon les valeurs de x , leur position relative.

d) Tracer dans le même repère (C_g).

3) Soit (D), le domaine plan limité par les droites $x = 2$; $x = 6$ et les courbes (C_f) et (C_g).

a) Mettre en évidence sur le repère le domaine (D).

b) Conformément à la position relative de (C_f) et (C_g), trouver en cm^2 l'aire $A(D)$.

Menu 4 : On considère la fonction numérique g déterminée par $g(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$ de courbe (C_g) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1) Déterminer le domaine de définition D_g de g .

2) a) Etudier la parité de g ; que dire de l'intervalle $I = [0; 1[\cup]1; +\infty[$.

b) Déterminer les limites aux bornes de I .

3) a) Déterminer $g'(x)$ sous sa meilleure forme factorisée pour $x \in I$. En déduire les racines et les signes de $g'(x)$ si

b) Etablir le tableau de variation de g sur I .

4) Déterminer les réels a et b tels que $\forall x \in D_g$; $g(x) = \frac{a}{(1-x)^2} + \frac{b}{(1+x)^2}$.

5) a) Tracer (C_g) sur I . b) Expliquer comment déduire le tracer de (C_g) sur D_g partant du résultat de a).

6) a) Mettre en relief le domaine (D) où $(D) = \left\{ M(x; y) / \frac{3}{2} \leq x \leq 4 \text{ et } 0 \leq y \leq g(x) \right\}$.

b) Déterminer en cm^2 l'aire $A(D)$.

Menu 5 : I) Soit les fonctions f et F définies par : $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$.

Déterminer les réels a , b et c tel que $\forall x \in \left] -\infty; \frac{3}{2} \right]$, F soit une primitive de f sur $\left] -\infty; \frac{3}{2} \right]$

II) Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2(x)}$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4(x)}$

1) Calculer I ; 2) Soit la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4} \right]$, par : $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$

a) Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$, on a : $f'(x) = \frac{3}{\cos^2(x)} - \frac{2}{\cos^4(x)}$

b) En déduire une relation entre I et J . c) Calculer J .

III) Soit la fonction $f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}$ 1) Déterminer l'ensemble de définition

2) Déterminer les réels a , b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$

3) En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.