

Intégrales et primitives - Exercices

Intégrales et propriétés

Exercice 1

On considère les fonctions $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ et $g(x) = 1 - x$.

En utilisant la définition d'une intégrale, calculer :

(a) $\int_{-1}^2 f(x) dx$

(c) $\int_{-4}^1 f(x) dx$

(b) $\int_0^3 g(x) dx$

(d) $\int_{-5}^1 g(x) dx$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

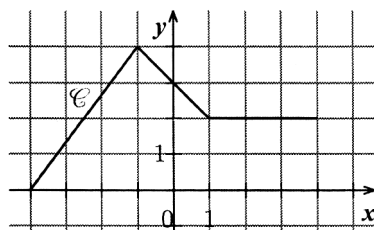
On note C la courbe représentative de f .

1. Vérifier que la courbe C est un demi-cercle de centre O et de rayon 1.

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Exercice 3

Soit f la fonction affine par morceaux définie sur $[-4; 4]$ par sa courbe représentation C .

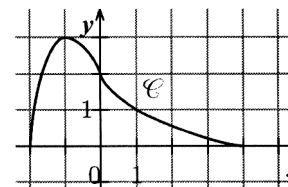


1. Calculer $\int_{-4}^4 f(x) dx$.

2. Déterminer la valeur moyenne de $f(x)$ sur $[-4; 4]$.

Exercice 4

Soit f la fonction affine par morceaux définie sur $[-2; 4]$ par sa courbe représentation C .



1. Justifier que $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 2$.

2. Déterminer un encadrement de $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$, $\int_{-1}^0 f(x) dx$ et $\int_1^4 f(x) dx$.

3. En déduire un encadrement de $\int_{-2}^4 f(x) dx$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-3x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2cm.

1. Tracer C .

2. Pour α réel non nul, on pose $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

(a) Justifier l'existence de I .

(b) Donner le signe et une interprétation graphique de I .

(c) Représenter graphiquement I .

3. On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (u_n) par : $u_n = \int_0^1 f(x) e^{\frac{x}{n}} dx$.

(a) Donner pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le signe de u_n .

(b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $I_1 \leq u_n \leq e^{\frac{1}{n}} I_1$ avec $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 6

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{x} \right) dx$$

1. (a) Etudier pour tout $x \in]0, +\infty[$, les variations de (I_n) .
(b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.

Conclure sur la nature de la suite

2. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{n+1} < I_n < \frac{1}{n}$
3. En déduire la limite de I_n .

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \sin(2x) dx$. On ne cherchera pas à calculer I_n .

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1}$
2. Quelle est la limite de I_n ?

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

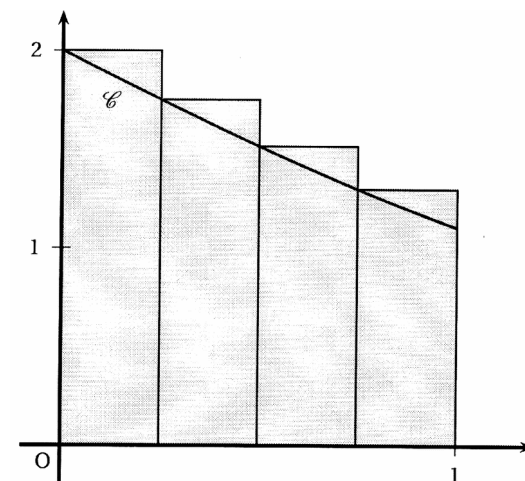
$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

On note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. On approche l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en calculant la somme d'aires de rectangles.

1. (a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0; 1]$ en quatre intervalles de même longueur.

- sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(0\right)$
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-après.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

```

Variables : k est un nombre entier
            S est un nombre réel
Initialisation : Affecter à S la valeur 0
Traitement : Pour k allant de 0 à 3

                Affecter à S la valeur  $S + \frac{1}{4} f\left(\frac{k}{4}\right)$ 

Fin pour
Sortie : Afficher S
    
```

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

- (b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0; 1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 1. (a). Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles construits.

On appelle $I = \int_0^1 (x+2)e^{-x} dx$

2. (a) Déterminer le signe de I .
(b) Etudier les variations de $f(x)$ puis donner un encadrement de I sur $[0; 1]$.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x-3)e^{-x}$
 - (a) Démontrer que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}$$

1. On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$

(a) Interpréter géométriquement le réel I .

(b) Soient u et v les fonctions définies sur $[0; 1]$ par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$

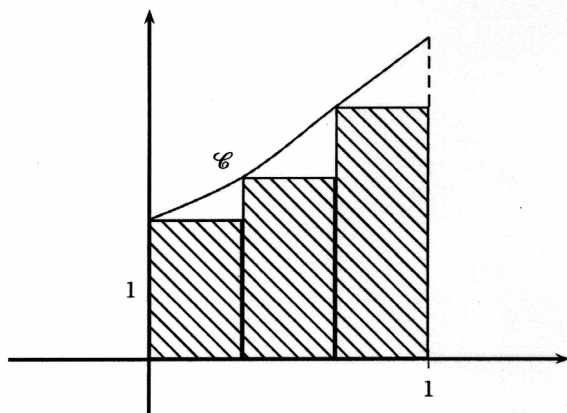
(c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

2. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
Variables : k et n sont des entiers naturels
            S est un nombre réel
Entrée : Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation : Affecter à S la valeur 0
Traitement : Pour k allant de 0 à n-1
                Affecter à S la valeur  $S + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 
Fin pour
Sortie : Afficher S
```

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n .

(a) Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



(b) Que dire de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

Primitives

Exercice 10

On considère deux fonctions f et F définies sur I .

Dans chaque cas, montrer que F est une primitive de f sur I .

1. $F(x) = (x-1)(-x+4)$ $f(x) = -2x+5$ $I = \mathbb{R}$

2. $F(x) = (4x+1)e^{-x^2}$ $f(x) = (-8x^2 - 2x + 4)e^{-x^2}$ $I = \mathbb{R}$

3. $F(x) = \frac{3x+1}{x-5}$ $f(x) = \frac{-16}{(x-5)^2}$ $I = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

4. $F(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+2}}$ $f(x) = \sqrt{5x+2}$ $I =]-\frac{2}{5}; +\infty[$

Exercice 11

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{3}{7}x + \frac{1}{2}$ $I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x}}$ $I =]\frac{1}{3}; +\infty[$

3. $f(x) = (2x+1)(x^2+x-7)$ $I = \mathbb{R}$

4. $f(x) = (3x-1)^6$ $I = \mathbb{R}$

5. $f(x) = \frac{4}{(2x-1)^4}$ $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$

6. $f(x) = 6xe^{x^2+1}$ $I = \mathbb{R}$

Exercice 12

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$ $I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = 4\cos(2x+1)$ $I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

4. $f(x) = \cos x \sin^4 x$ $I = \mathbb{R}$

5. $f(x) = \sin^2 x$ $I = \mathbb{R}$

Exercice 13

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{3}{x-4}$ $I =]4 ; +\infty[$

2. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ $I =]0 ; +\infty[$

3. $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 1}$ $I =]-\pi ; \pi[$

4. $f(x) = \tan x$ $I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

5. $f(x) = \frac{16x+4}{4x^2+2x+1}$ $I = \mathbb{R}$

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$

1. Calculer $I_1 = \int_1^e f(x) dx$.

2. Soit $I_2 = \int_1^e g(x) dx$. Calculer $I_1 + I_2$ et en déduire la valeur de I_2 .

Exercice 15

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x-7}{x^2-2x-3}$$

Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout x élément de l'ensemble de f :

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$$

En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]3 ; +\infty[$.

Exercice 16

Soit $f(x) = \cos^3 x$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$.

2. En déduire la primitive F telle que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Calcul d'intégrales

Exercice 17

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^4 (t-3) dt$ (b) $\int_4^{-1} (t^2 - 4t) dt$ (c) $\int_1^2 \left(t^2 - \frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 18

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right) dt$ (b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) dt$ (c) $\int_0^{-\pi} (\sin(2t)) dt$

Exercice 19

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 e^{1-2x} dx$ 5. $M = \int_0^1 5^x dx$
2. $J = \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1} dx$ 6. $N = \int_0^1 \frac{3x}{1-x^2} dx$
3. $K = \int_0^1 \cos(x) e^{\sin(2x)} dx$ 7. $O = \int_0^1 x(x^2+2) dx$
4. $L = \int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^4} dx$ 8. $P = \int_{-1}^2 3^x dx$

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1. Vérifier que pour tout x , $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 21

1. Déterminer a , b et c tel que pour tout $x \neq -2$:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

2. En déduire $I = \int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx$

Exercice 22

Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int_{\ln 2}^{\ln 3} (4e^t) dt \quad (b) \int_0^1 te^{t^2-1} dt \quad (c) \int_1^2 \frac{t^3}{t^4+1} dt$$

Exercice 23

1. Résoudre l'inéquation $\ln t - 1 \leq 2 \ln 3$.

2. (a) Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x(1 - \ln x)$.

Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

(b) En déduire $\int_1^e \ln x dx$.

3. Montrer que l'on a $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^{2t}+1} dt = \ln \sqrt{\frac{e^2+1}{2}}$

Problèmes de synthèse

Exercice 24 (devoir surveillé)

On se propose de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale

$$L = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{où } f \text{ est la fonction définie sur } [0; 1] \text{ par } f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$$

1. Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$

2. Soient J et K les intégrales définies par :

$$J = \int_0^1 (2+x)e^{-x} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 x^2 f(x) dx$$

(a) Calculer J et montrer que $J = 3 - 4e^{-1}$.

(aide : une primitive de $(2+x)e^{-x}$ est de la forme $(ax+b)e^{-x}$).

(b) Utiliser l'encadrement de la question 1. pour démontrer que :

$$\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$$

(c) Démontrer que $J + K = 4L$.

(d) En déduire un encadrement de L , puis donner une valeur approchée de L à 10^{-2} près.

Exercice 25 (devoir surveillé)

On considère la suite (x_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt$$

1. (a) Montrer que la suite (x_n) est à terme positifs.

(b) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $t \in [0; 1]$ on $t^{n+1} \cos t \leq t^n \cos t$.

(c) En déduire les variations de la suite (x_n) .

(d) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(b) En déduire la limite de la suite (x_n) .

Exercice 26 (devoir surveillé)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$.

2. (a) Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel non nul n :

$$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

Exercice 27 (Baccalauréat Nouvelle Calédonie Mars 2014)

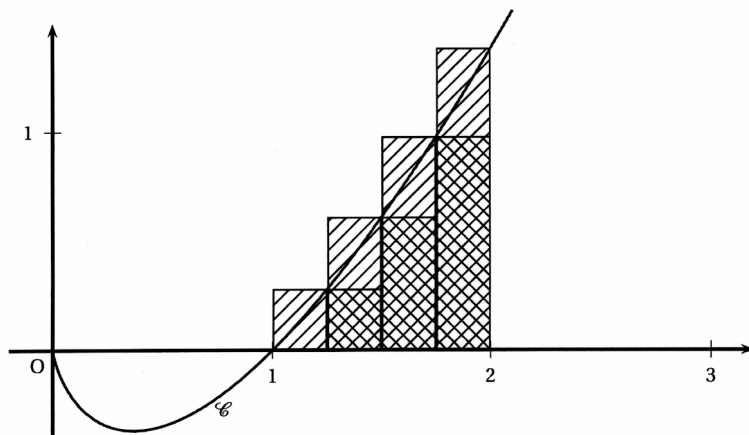
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln x$$

Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aires, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ (voir figure ci-après).



```

Variables : k et n sont des entiers naturels
            U, V sont des nombres réels
Initialisation : U prend la valeur 0
                  V prend la valeur 0
                  N prend la valeur 4
Traitement : Pour k allant de 0 à n-1

                  Affecter à U la valeur  $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ 

                  Affecter à V la valeur
 $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ 

                  Fin pour
Sortie : Afficher U
        Afficher V
  
```

1. (a) Que représentent U et V sur le graphique précédent ?
- (b) Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?
- (c) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

$$U_n = \frac{1}{n} \left[f(1) + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \right]$$

$$V_n = \frac{1}{n} \left[f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) + f(2) \right]$$

On admettra que pour tout entier naturel non nul, $U_n \leq \mathcal{A} \leq V_n$

- (a) Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0$
- (b) Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$?

3. Soit F la fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par : $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$

- (a) Montrer que F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.
- (b) Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Exercice 28 (devoir surveillé)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

1. (a) Etudier les variations de f sur l'intervalle I .
- (b) En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit I .
2. (a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = (x-1) \ln x$ est une primitive de f sur I .
- (b) Justifier que F est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.
- (c) Démontrer que l'équation $F(x) = 1 - e^{-1}$ admet une unique solution, notée α sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

On considère les fonctions g et h définies sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et

$$h(x) = \ln x + 1.$$

Soit C_g et C_h leurs courbes représentatives.

3. (a) Représenter C_g et C_h . Quelles sont les coordonnées de A , intersection de C_h avec l'axe des abscisses ?
- (b) On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par C_g et C_h et les droites d'équation $x = e^{-1}$ et $x = 1$. Démontrer que $\mathcal{A} = 1 - e^{-1}$.
5. t est un nombre supérieur à 1. On note $\mathcal{A}_t$ l'aire du domaine délimité par C_g et C_h et les droites d'équation $x = 1$ et $x = t$. On veut déterminer une valeur de t telle que : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_t$
- (a) Démontrer que $\mathcal{A}_t = (t-1) \ln t$.
- (b) Conclure.

Exercice 29 (devoir surveillé)

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3} \text{ sur } [0; +\infty[$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice 30 (devoir surveillé)

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2} dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^3} dx$$

Exercice 31 (devoir surveillé)

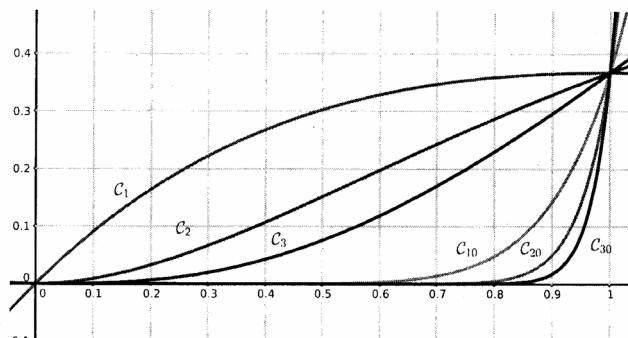
Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n , définie sur $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

- Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax+b)e^{-x}$, avec a et $b \in \mathbb{R}$.
Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f_1 ; en déduire la valeur de I_1 .
- On a tracé ci-dessous $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}$ et $\mathcal{C}_{30}$.



- Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant la démarche.
Démontrer cette conjecture.

- En déduire que la suite (I_n) converge.

- Montrer que pour tout n non nul, $f_n(x) \leq x^n$ sur $[0; 1]$.

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 32 (devoir surveillé)

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par

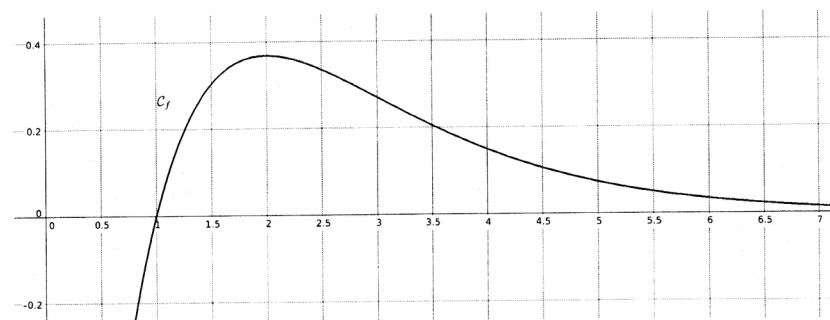
$$f(x) = (x-1)e^{1-x}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous.

- Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x (t-1)e^{1-t} dt$$

- Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1; +\infty[$.
 - Vérifier que $G(x) = -xe^{1-x}$ est une primitive de f sur $[1; +\infty[$;
en déduire que pour tout réel $x \in [1; +\infty[$, $F(x) = 1 - xe^{1-x}$.
- Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie $\mathcal{D}_a$ du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=a$.
 - Hachurer $\mathcal{D}_a$ sur le graphique.
 - Exprimer l'aire, en unités d'aires, de $\mathcal{D}_a$, en fonction de a .
 - Déterminer $\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a)$ et interpréter graphiquement.



Exercice 33 (devoir surveillé)

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I = \int_1^6 \frac{1}{(x-3)^3} dx$$

$$J = \int_{-1}^2 \frac{1}{3x+5} dx$$

$$K = \int_{-1}^1 x e^{3x^2-1} dx$$

Exercice 34 (devoir surveillé)

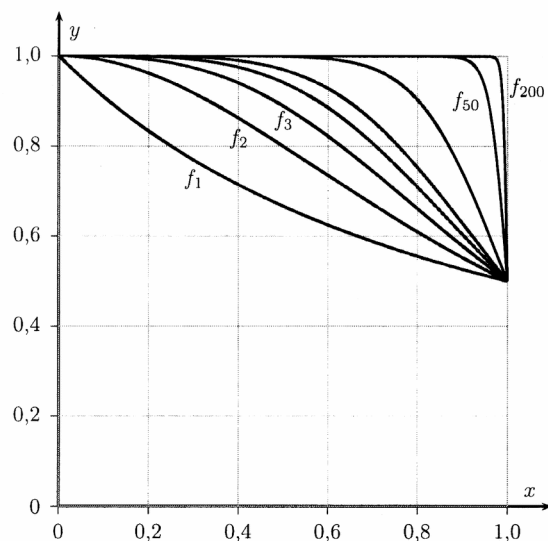
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le nombre I_n par $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$

Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.

1. a) En expliquant votre démarche, conjecturer le sens de variation de la suite (I_n) .
b) Démontrer cette conjecture.
2. Calculer la valeur exacte de I_1 .
3. a) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$
b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $I_n \leq 1$.
4. Démontrer que, pour tout réel $x \in [0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$.
5. Calculer l'intégrale $\int_0^1 (1 - x^n) dx$.
6. À l'aide des questions précédentes, encadrer I_n pour tout entier naturel $n \geq 1$, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.



Exercice 35 (devoir surveillé)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx.$$

1. a) Montrer $u_0 + u_1 = 1$.
b) Montrer que $u_1 = 1 - \ln(2/(1+e))$ et en déduire u_0 .
2. a) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
b) Montrer pour tout entier naturel n non nul, $u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$.
c) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.
3. Prouver que (u_n) converge vers une limite à déterminer.

Sujets baccalauréat

Exercice 1 Métropole – Réunion – Septembre 2016

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ telle que : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.

La courbe $\mathcal{C}$ est représentée en annexe, à rendre avec la copie.

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^n f(x) dx$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx$.

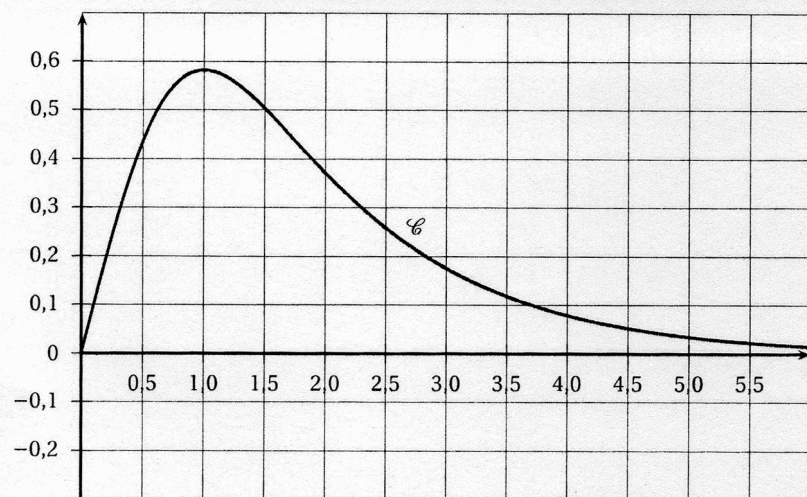
b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ telle que : $H(x) = (-x - 1)e^{-x}$

Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H .

c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $I_n \leq 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction f sur $[0; 6]$



Exercice 2 Pondichery – Avril 2016

t désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

1. a. Étudier le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$.

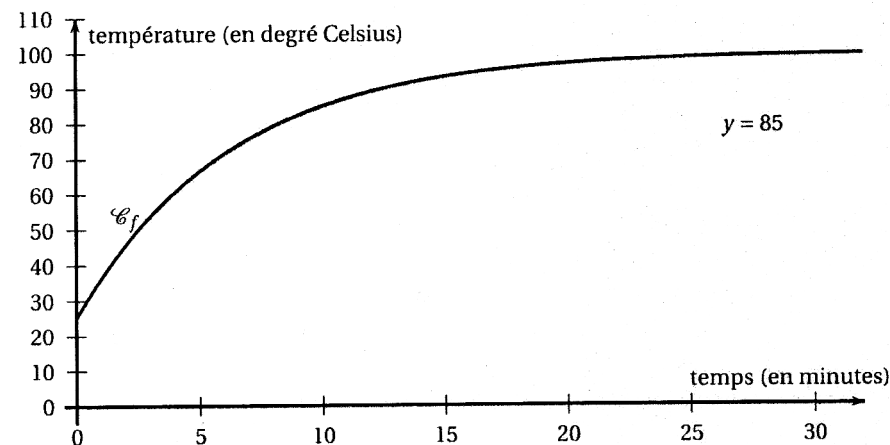
b. Justifier que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

On note $\mathcal{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$,

$y = 85$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f .

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ , si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathcal{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe, que l'on a $\mathcal{A}(25) > 80$.

b. Justifier que, pour $\theta \geq 10$, on a $\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t} dt$.

c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

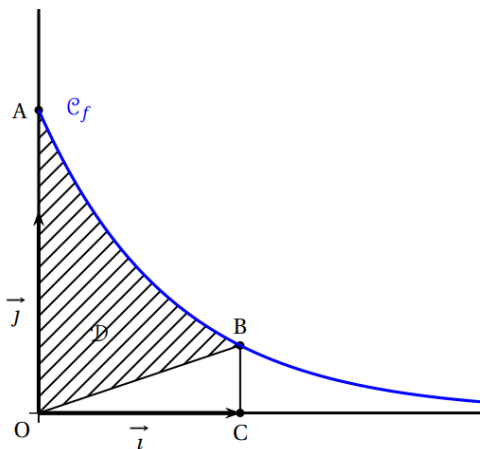
Exercice 3 Polynésie – Juin 2018

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = ke^{-kx}$ où k est un nombre réel strictement positif.

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0 et le point B de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1.

Le point C a pour coordonnées (1; 0).

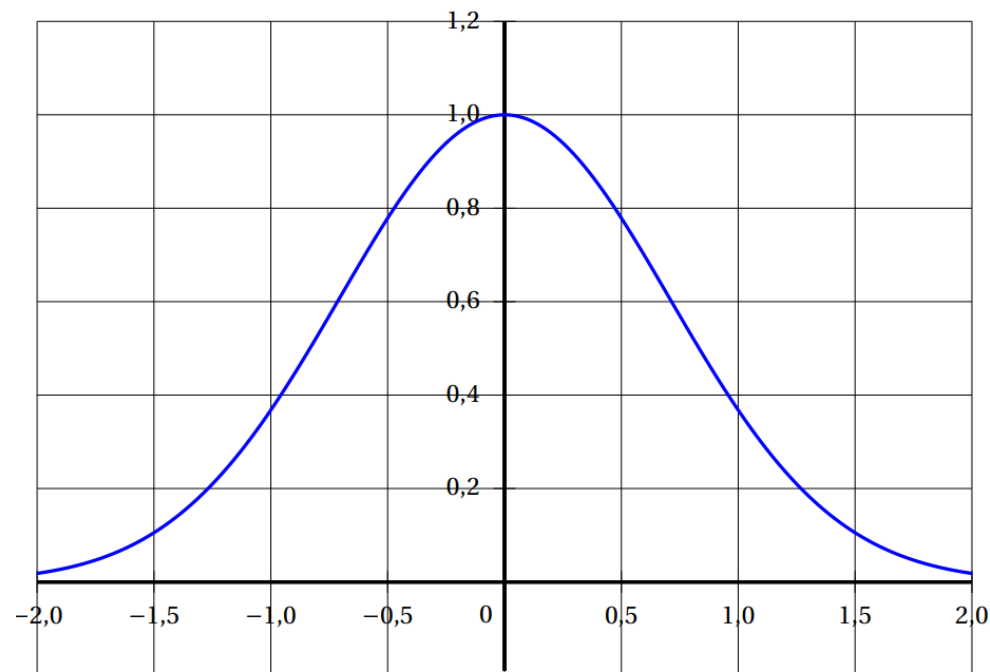


1. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. Exprimer, en fonction de k , l'aire du triangle OCB et celle du domaine $\mathcal{D}$ délimité par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathcal{C}_f$ et le segment [OB].
3. Montrer qu'il existe une unique valeur du réel k strictement positive telle que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ vaut le double de celle du triangle OCB.

Exercice 4 Métropole – Septembre 2019

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthogonal d'une fonction g

définie et continue sur $\mathbb{R}$. La courbe $\mathcal{C}_g$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et se situe dans le demi-plan $y > 0$.



Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose : $G(t) = \int_0^t g(u) du$

Partie A

Les justifications des réponses aux questions suivantes pourront s'appuyer sur des considérations graphiques.

1. La fonction G est-elle croissante sur $[0; +\infty[$? Justifier.
2. Justifier graphiquement l'inégalité $G(1) \leq 0,9$.
3. La fonction G est-elle positive sur $\mathbb{R}$? Justifier

Partie B

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u) = e^{-u^2}$

On se propose de déterminer une majoration de $G(t)$ pour $t > 1$.

1. *Un résultat préliminaire.*

On admet que, pour tout réel $u > 1$, on a $g(u) \leq \frac{1}{u^2}$

En déduire que, pour tout réel $t > 1$, on a : $\int_1^t g(u) du \leq 1 - \frac{1}{t}$

2. Montrer que, pour tout réel $t > 1$: $G(t) \leq 2 - \frac{1}{t}$

Que peut-on dire de la limite éventuelle de $G(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?