

EXERCICE1

1) Détermine l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = -x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 11x + 7$; b) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3(x)}$; d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + 5}}$
 e) $f(x) = \cos 5x - 7\sin(-2x + \frac{\pi}{5})$; f) $f(x) = x(1 - 3x^2)^7$ g) $f(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 5\cos x$ h)
 $f(x) = \cos^5(x)$; i) $f(x) = \cos^4(x)$; $f(x) = \tan^2 x$

2) Soit la fonction f définie pour tout $x \neq -1$ par $f(x) = \frac{3x+4}{(x+1)^3}$

a) Détermine les réels a et b tels que $\forall x \neq -1$ $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}$

b) Dédus une primitive F de f qui s'annule en 1

3) Soit la fonction g définie pour tout $x \neq -1$ par $g(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 4}{(x+1)^2}$

a) Détermine les réels a , b et c tels que $\forall x \neq -1$ $g(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$

b) Détermine l'ensemble des primitives G de g

4) Soit la fonction f définie pour tout $x \neq -1$ par $f(x) = \frac{x}{(x+1)^3}$

c) Détermine les réels a et b tels que $\forall x \neq -1$ $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}$

d) Dédus une primitive F de f qui s'annule en 1

5) Soit la fonction f définie pour tout $x \neq -1$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

e) Détermine les réels a et b tels que $\forall x \neq 1$ et 0 , $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$

f) Dédus l'ensemble des primitives F de f

EXERCICE2

Calcule les intégrales suivantes

1) $\int_{-3}^2 (x^4 - 5x^2 + 3)dx$; 2) $\int_0^1 (1+x)^n dx$ où $n \in \mathbb{N}$; 3) $\int_1^2 \frac{3x^2 - 3x^2 + 1}{5x^2} dx$; 4) $\int_1^2 \frac{3x+6}{(x^2+4x+3)^4} dx$

5) $\int_0^{\pi} \cos x (1 - 3\sin^2 x) dx$; 6) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$; 7) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$; 8) $\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{t-1} + \sqrt{t+1}} dt$; 9) $\int_{-1}^4 (x|x^2 - x - 2|) dx$

10) $\int_{-4}^1 (|x+3| + |2x-1|) dx$; 11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan y + \tan^3 y) dy$; 12) $\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$

EXERCICE3

I) Calcule à l'aide d'intégration par parties

1) $\int_0^1 (x+1)\sqrt{2x+1} dx$; 2) $\int_0^{\pi} (3t^2 - t + 1)\sin t dt$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$; 4) $\int_0^{\pi} (2x+1)\cos x dx$

II) A l'aide d'un changement de variable, calcule les intégrales suivantes :

1) $\int_{-1}^0 \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt$; 2) $\int_1^2 \frac{x^2}{(3x-4)^5} dx$; 3) $\int_0^1 x\sqrt{1+x} dx$

III) 1. Déterminer les réels a , b , c tels que pour tout différent de $\frac{1}{2}$; on a : $\frac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \frac{c}{2u-1}$

2- Calcule l'intégrale $J = \int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1} dx$

3- Dédus la valeur de l'intégrale $k = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{\cos^3(x) dx}{1-2\sin x}$

EXERCICE4

I) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$

a) Calcule $I + J$; b) Calcule $I - J$; c) Déduis I et J

II) Soit les intégrales A et B définies par $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

1) Calcule A

2) Soit $f : \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

a) Montre que pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

b) Déduis du calcul précédent une relation entre A et B puis calcule B

EXERCICE5 L'objectif est de calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}, J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx; K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

1) Calcul de I

Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$

a) Calculer la dérivée de la fonction $\sqrt{x^2+2}$

b) En déduire la dérivée f' de f c) Calculer la valeur de I

2) Calcul de J et K

a) Sans calculer explicitement J et K vérifier que $J + 2I = K$

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K , montrer que $K = \sqrt{3} - J$

c) En déduire les valeurs de J et de K

EXERCICE6

A) 1) Détermine les réels a , b et c tel que pour tout x strictement positif,

$$\text{on ait : } \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

2) Calcule $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2+1)} dx$

3) En déduis en utilisant l'intégration par parties le calcul de $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$

B) Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$

1) Détermine deux réels a et b tels que : $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$

2) Détermine la valeur de I

3) Soit g la fonction définie dans $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = \ln \left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right]$

a) Montre que g est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$

b) Détermine une autre expression de I . Déduis la valeur de $\tan \frac{\pi}{12}$

Problème 1 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = (-2x + 4)e^{-\frac{x}{2}} + 2 - x$ et (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Partie A : Pour tout x , on considère la fonction g définie par : $g(x) = x - e^{\frac{x}{2}}$.

1°) Etudie les variations de la fonction g .

2°) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

1°) Calcule la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2°) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2 - x)]$ puis interprète.

3°) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = g(x)e^{-\frac{x}{2}}$

4°) En déduire le sens de variation de f .

5°) Détermine les coordonnées du point B intersection de la courbe (Cf) de f et de son asymptote oblique (D) . En déduire la position et (Cf) et de (D) .

6°) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et $-2 < \alpha < -1$.

7°) Donne une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.

8°) Trace (D) et (Cf) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

9°) Calcule l'aire de la partie du plan limitée par (Cf) , (D) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$

Problème 2

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + e^{-2x} + xe^{-2x}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 2cm

- 1) Calcule la dérivée f'' et f' de f . Dresse le tableau de variation de f' sur $[0; +\infty[$ puis deduis le signe de f' sur $[0; +\infty[$
- 2) Dresse le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$
- 3) Montre que (C) admet une asymptote (D) que l'on précisera. Etudie la position de (C) par rapport à (D)
- 4) Calcule le coefficient directeur de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0
- 5) Etablit que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution unique l que l'on encadrera par deux entiers naturels consécutifs
- 6) Construis (D) ; (T) et (C) sur un même graphique
- 7) Calcule en cm^2 l'aire A du domaine limité par (C) et les droites d'équations $y = 0$; $x = 0$ et $x = 1$