

Série des exercices

fiche ②

Exercice ①

Calculer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes :

1/ $f(x) = 2x^5 - 5x^3 + 5x$

2/ $f(x) = -3x^4 + 2x^3 - 5x + 7$

3/ $f(x) = (5 - 2x)^6$

4/ $f(x) = x(x^2 - 4)^5$

5/ $f(x) = -x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{(x+3)^2}$

6/ $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 1}{3x^2}$

7/ $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3}$

8/ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x+1}}$

9/ $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

10/ $f(x) = \frac{-5}{(7x+3)^3}$

11/ $f(x) = 3 \sin(1 - 4x)$

Exercice ②

1/ Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant les conditions indiquées :

a/ $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ et $F(0) = 7$

b/ $f(x) = \frac{2}{(3-x)^3}$ et $F(0) = 0$

2/ Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}$

a/ Déterminer l'ensemble de définition de f .

b/ En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.

3/ Soit les fonctions f et F

définies par :

$f(x) = x\sqrt{3-2x}$ et

$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$

Déterminer les réels a , b et c tel que $\forall x \in]-\infty; \frac{3}{2}]$

F soit une primitive de f sur $]-\infty; \frac{3}{2}]$.

Exercice ③

1/ En utilisant les formules des primitives, calculer les intégrales suivantes :

a/ $A = \int_1^2 \frac{(-x+1)}{(\sqrt{x^2-2x+5})} dx$

b/ $B = \int_{-1}^0 \frac{-2}{(3x-1)^2} dx$

c/ $C = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) dx$

d/ $D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} \right) dx$

$$e) E = \int_0^2 (-2x+1) \sqrt{5x^2-5x+4} dx$$

$$f) F = \int_{-1}^2 (x+2) \sqrt{x+2} dx$$

$$g) G = \int_0^2 |x^2-3x+2| dx$$

$$h) H = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x + \frac{\pi}{3}) dx$$

2) En utilisant la formule de l'intégration par partie, Calcule les intégrales suivantes:

$$a) I = \int_0^{\pi} x \sin 2x dx ;$$

$$b) J = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx ;$$

$$c) K = \int_0^4 x \sqrt{4x+9} dx$$

$$d) L = \int_{-2}^1 (x-5) \sqrt{2-x} dx$$

$$e) M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx$$

Exercice (4):

Soient les intégrales I et J définies par:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos^2 2x dx \text{ et}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin^2 2x dx$$

1) Calcule $I + J$

2) Calcule $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.

3) Déduis de ce qui précède la valeur de I et J .

Exercice (5):

Soit l'intégrale I_n définie par: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouve une relation entre I_n et I_{n-1} (On posera:

$$\sin^n x = \sin^{n-1} x \times \sin x).$$

2) On donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$.

Calcule: I_2 et I_4 .

Exercice (6):

Soient les intégrales I et J définies par:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \text{ et}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

Calcule $I + J$ et $I - J$ puis en déduis les valeurs de I et J .

Exercice (1) :

1/ Calcule l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^6 x + \sin^6 x) dx$$

2/ Soient les intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx ; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$$

et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x dx$

a/ Calcule $I - J$ et $I + J + K$

b/ En déduis la valeur de :

$I + J - 3K$ puis celles de I , J et K .

3/ a/ Linéariser :

$$A(x) = \cos^2 x + \sin^2 x \text{ et}$$

$$B(x) = \cos^4 x.$$

b/ En déduis la valeur des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A(x) dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} B(x) dx$$

4/ a/ Calcule l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

b/ En déduis la valeur de l'intégrale $A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$

5/ Calcule les intégrales suivantes :

a/ $\int_2^3 \left(\frac{x+1}{x-1} \right) dx ;$

b/ $\int_0^1 (x^3 + 2x^2 + x + 2) dx ;$

c/ $\int_0^1 (2x+1) e^{x^2+x+2} dx$

d/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - 3 \sin x \cos x) dx$

e/ $\int_0^1 \left(\frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 2}{x+1} \right) dx$

Exercice (2) :

On considère les intégrales

$$I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx \text{ et } J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$$

1/ a/ Montre que l'intégrale I peut s'écrire $I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$

b/ A l'aide d'une intégration par parties, montre que

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3} J.$$

c/ Montre de même que

$$J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I.$$

2/ a/ Montre que $I + J = \frac{3\pi}{4}.$

b/ Montre que $J - I = 0$

c/ En déduis les intégrales I et J

Exercice (3) :

À la suite d'un début de contamination de la maladie

CORONAVIRUS dans une ville, on a constaté que le nombre de personnes ayant contracté la maladie t jours après l'apparition des premiers cas est donné par: $f(t) = 45t^2 - t^3$ avec $t \in [0; 25]$.
 Calcule le nombre moyen de personnes malades durant les huit premiers jours.

Exercice (4):

L'intensité du courant qui circule dans une bobine en fonction du temps t , a été modélisé par la fonction i telle que pour tout t appartenant à une période T , on a: $i(t) = 5 \cos(100\pi t)$.
 Détermine la valeur moyenne de l'intensité du courant entre les instants $t_1 = 0.5$ et $t_2 = 3.5$.

Exercice (5):

1/ Soit la fonction f numérique à variable réelle définie par:

a/ Ecrire $f(x)$ sous la forme ci-dessous:

$$f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1}$$

b/ En déduire l'expression d'une primitive de la fonction f .

2/ Soit $f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^3 - x}$

a/ Vérifier que

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+1}$$

b/ En déduire une primitive de f qui s'annule en 2.

3/ Détermine les réels a, b et c tel que:

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$$

Exercice (6):

Soit la fonction f définie sur $[-4; 2]$ par $f(x) = x^2 + x - 2$.
 Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
 Déterminer l'aire A du domaine limité par l'axe des abscisses les droites d'équations $x = -4$; $x = 2$ et par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f .

Exercice (7):

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \sin^2 x \, dx$.

a/ Calculer $I+J$ puis $I-J$

b/ En déduire les valeurs de I et J .