

Exercice 1

Déterminer une primitive de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 1$. 2) $f(x) = \sin x \cos^3 x$.

3) $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$. 4) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{x^3}$. 5) $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x-2}$.

6) $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{(x+1)^2}$. 7) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. 8) $f(x) = e^{-3x+1}$.

9) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$. 10) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

Exercice 2

1. Soit $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$. Déterminer la primitive de f qui s'annule en

1.

2. Soit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+8}}$.

a) Sur quel intervalle g admet-elle des primitives ?

b) Déterminer la primitive de g qui prend la valeur 4 en 2.

3. Soit $h(x) = \frac{1}{x}$.

a) Déterminer un intervalle I sur lequel h admet des primitives.

b) Préciser dans ce cas l'ensemble des primitives de h sur I .

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$. 2) $\int_2^1 3xe^{x^2-1} dx$. 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx$.

4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \tan u du$. 5) $\int_{-1}^2 |1-x| dx$.

1. Calculer à l'aide d'une (ou d'une double) intégration par parties les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx.$ b) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x^2} \, dx.$
c) $\int_0^1 x^2 e^{2x} \, dx.$ d) $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx.$

2. Déterminer les primitives de f dans les cas suivants :

a) $f(x) = \ln x$ sur $[1 ; +\infty[.$ b) $f(x) = (x+1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}.$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos x$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal d'unités 2 et 3 cm.

1. Calculer en cm^2 , l'aire du domaine D limité par C_f , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{3\pi}{4}$.

2. Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Montrer que $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x) \, dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 6

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

1. Déterminer le volume d'une boule de rayon R .

2. Soit la courbe (C) d'équation $y = \sqrt{x}$ où $1 \leq x \leq 4$.

Calculer le volume de la figure obtenue en faisant tourner (C) autour de l'axe des abscisses $(O, \vec{i})$.

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $2y' - 3y = 0$. b) $y' = \frac{-1}{3}y$. c) $y'' + y' - 6y = 0$.

2. Résoudre les équations différentielles vérifiant les conditions posées :

a) $y' + 2y = 0$; $y(-1) = 2$.

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

c) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y(\pi) = 1$ et $y'(\pi) = 0$.

Exercice 8

1. Déterminer f la solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$, vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.

2. En déduire F une primitive de f .

3. Vérifier que la fonction F trouvée est une primitive de f .

Exercice 9

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = \cos x$

1. Déterminer les réels p et q tels que $h(x) = p\cos x + q\sin x$ soit solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

3. Montrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E').

4. En déduire les solutions de (E).

5. Déterminer f la solution de (E) dont la courbe passe par $A(0 ; 1)$.

Exercice 10

Soit les fonctions f , g et h définies par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $g(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$ et $h(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. Montrer qu'il existe des réels a , b , c , d , e , α et β tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$, $g(x) = \frac{d}{x-1} + \frac{e}{x-2}$ et $h(x) = \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x+1}$.
2. En déduire l'ensemble des primitives de f , de g et de h .

Exercice 11

Soit la fonction f définie par $f(x) = \cos^4 x + \sin^2 x$.

1. Linéariser $f(x)$.
2. En déduire la primitive de f qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 12

Soit les fonctions f et g définies sur $]-1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x+1) \text{ et } g(x) = \frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4}(x^2 - 2x).$$

Montrer que g est une primitive de f sur $]-1 ; +\infty[$.

Exercice 13

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos^2 x \cos 2x \text{ et } g(x) = \sin^2 x \cos 2x.$$

1. Montrer que $f(x) + g(x) = \cos 2x$ et $f(x) - g(x) = \cos^2 2x$.
2. En déduire une nouvelle expression de $f(x)$ et $g(x)$.
3. Déterminer des résultats précédents l'ensemble des primitives F de f et G de g .

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin^2 x \, dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $I - J$.
3. En déduire les valeurs de I et de J .

Exercice 15

Soit la suite u définie par $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$.

1. Calculer U_n à l'aide d'une double intégration par parties.
2. On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$; calculer la limite de S_n .

Exercice 16

Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^{1-x}$ et (C) sa courbe.

1. Etudier f et tracer sa courbe (C) .
2. Utiliser une intégration par parties pour calculer $I_1 = \int_0^1 f(x) \, dx$. Quelle est l'interprétation géométrique de I_1 ?
3. Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx$.
 - a) Montrer que $\forall x \in [0 ; 1]$, on a $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
 - b) En déduire que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et étudier la convergence de (I_n) .
 - c) Utiliser une intégration par parties pour montrer que $\forall n \geq 1$, on a $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

Exercice 17

Soit f l'application de $] -1 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}.$$

1. Justifier l'existence de f et déterminer sa dérivée.
En déduire le sens de variation de f .

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin^2 x \, dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $I - J$.
3. En déduire les valeurs de I et de J .

Exercice 15

Soit la suite u définie par $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$.

1. Calculer U_n à l'aide d'une double intégration par parties.
2. On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$; calculer la limite de S_n .

Exercice 16

Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^{1-x}$ et (C) sa courbe.

1. Etudier f et tracer sa courbe (C) .
2. Utiliser une intégration par parties pour calculer $I_1 = \int_0^1 f(x) \, dx$. Quelle est l'interprétation géométrique de I_1 ?
3. Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx$.
 - a) Montrer que $\forall x \in [0 ; 1]$, on a $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
 - b) En déduire que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et étudier la convergence de (I_n) .
 - c) Utiliser une intégration par parties pour montrer que $\forall n \geq 1$, on a $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

Exercice 17

Soit f l'application de $] -1 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}.$$

1. Justifier l'existence de f et déterminer sa dérivée.
En déduire le sens de variation de f .

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2$ et (C) sa courbe.

1. Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} .
2. Calculer l'aire du domaine définie par l'ensemble des points $\{M(x ; y), 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) \leq y \leq f^{-1}(x)\}$.

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C).
2. Soit g la restriction de f à $[0 ; 2]$; montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} et construire (C') sa courbe.
3. λ étant un réel strictement positif, on pose $I(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx$.
 - a) Interpréter graphiquement $I(\lambda)$.
 - b) Calculer $I(\lambda)$ en procédant à une intégration par parties.
 - c) Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.
4. On pose $\lambda = 2$.
 - a) Calculer $I(2)$.
 - b) En déduire la valeur en cm^2 de l'aire du domaine limité par (C') et les droites d'équation $y = 0$, $x = 0$ et $x = \frac{4}{e^2}$.

Exercice 21

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$.
2. Trouver f la solution particulière de cette équation dont la courbe (C) passe par le point A(0 ; 4) et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.

Exercice 22

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 6y = 0$.
2. Soit (E') l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = -6x - 1$.
Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$, soit solution de (E').
3. a) Démontrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - h$ est solution de (E).
b) En déduire l'ensemble des solutions de (E').
c) Déterminer la solution f de (E') telle que $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$.

Exercice 23

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y' + y = x^2 + x$.

1. Déterminer g un polynôme de degré de 2, solution de (E).
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $f + g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de (E') : $y' + y = 0$.
3. Résoudre (E') et en déduire sur $\mathbb{R}$ les solutions de (E).