

Travaux Dirigé

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe : TSE

2024 - 2025

Primitives et intégrales

Exercice 1

A. Dans chacun des cas suivants, Détermine les primitives de f sur D_f de f .

- 1) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 10x - 4$; 2) $f(x) = (x^2 - 6x + 7)^4(2x - 6)$; 3) $f(x) = (2x - 1)^3$;
 4) $f(x) = (x - 3)(x^2 - 6x + 7)^4$; 5) $f(x) = (-x + 3)(x^2 - 6x + 7)^4$; 6) $f(x) = 5x(1 - x^2)^6$;
 7) $f(x) = (-6x^2 + 2)(x^3 - x + 7)^4$; 8) $f(x) = \frac{6x + 3}{(x^2 + x + 1)^4}$; 9) $f(x) = \frac{x(2x^2 + 1)}{\sqrt{x^4 + x^2 + 9}}$;
 10) $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 9}}$; 11) $f(x) = \sqrt{-5x + 2}$; 12) $f(x) = \frac{4 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 13) $f(x) = \frac{2x^5 - 3x^3 + 2}{x^2}$;
 14) $f(x) = \frac{2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$; 15) $f(x) = -2x + 1 - \frac{3}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$;
 16) $f(x) = 2x + 3 + \frac{7x^2}{(5 - x^3)^3}$; 17) $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 4}{(x + 1)^2}$.

B. Dans chacun des cas suivants, Détermine les primitives de f .

- 1) $f(x) = \sin^3 x \cos x$; 2) $f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos^5 3x}$; 3) $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$; 4) $f(x) = 3 \sin 5x - \cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$;
 5) $f(x) = x \sin\left(x^2 - \frac{\pi}{5}\right)$; 6) $f(x) = 3 \sin 5x \cos 9x$; 7) $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$;
 8) $f(x) = \cos^4 x \sin^5 x$; 9) $f(x) = \sin^5 2x$; 10) $f(x) = \cos^4 3x$; 11) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$;
 12) $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x + 2 \cos^2 x \times \sin^2 x$; 13) $f(x) = \cos^2 x$; 14) $f(x) = \sin^2 2x$;
 15) $f(x) = \tan^2 x$; 16) $f(x) = -\tan^2 x$; 17) $f(x) = \tan^6 x + \tan^8 x$; 18) $f(x) = \frac{1}{\cos^2(\pi x)}$;
 19) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$; 20) $f(x) = -\cotan^2 x$; 21) $f(x) = \cotan^{10} x + \cotan^8 x$.

Exercice 2 : Dans chacun des cas suivants, Détermine la primitive f qui prend la valeur y_0 en x_0 .

- 1) $f(x) = (x - 1)^4$ $x_0 = 2$ et $y_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{1}{(1 - x)^3}$ $x_0 = y_0 = 0$;
 3) $f(x) = \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et $y_0 = 1$; 4) $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$ $x_0 = \pi$ et $y_0 = 1$.

Exercice 3

A. Soient f et g deux fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x\sqrt{x}$

a. Calcule la dérivée de g sur $]0; +\infty[$.

b. Déduis - en une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

B. Soit les fonctions f et F définies par : $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - 2x}$

Détermine les réels a ; b et c tel que $\forall x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$, F soit une primitive de f sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$

Exercice 4 : On donne la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 7}{(x+2)^2}.$$

1. Trouve les réels a , b et c tels que : $\forall x \in D_f; f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$.
2. Trouve la primitive F de f prenant la valeur $-\frac{5}{2}$ en 0 .
3. Déduis - en $I = \int_2^3 f(x)dx$.

Exercice 5 : On donne la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^4}.$$

1. Trouve les réels a et b tels que : $\forall x \in D_f; f(x) = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^4}$.
2. Trouve la primitive F de f prenant la valeur 2 en 0 .

Exercice 6 : Calcule les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{3}{(3-2x)^4} dx; B = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx; C = \int_2^3 \left(3x^2 - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx;$$

$$D = \int_2^3 \left(x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx; E = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) dx; F = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^5 t dt; G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx;$$

$$H = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x dx; I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \cos 4t dt; J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cos x} dx; K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$L = \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx; M = \int_{-4}^1 (|x+3| + |2x-1|) dx; N = \int_1^{-1} \frac{x^3}{x^4 - x^2 + 3} dx.$$

Exercice 7 : 1. Utilise une intégration par parties pour calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^2 x\sqrt{2x+1} dx; B = \int_0^1 (x+1)\sqrt{2x+1} dx; C = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx;$$

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x dx; E = \int_0^{\pi} (x-1)\sin 3x dx; F = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin^2 x dx$$

2. Utiliser deux intégrations par parties pour Calcule les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x} dx; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin 2x dx; K = \int_0^{\pi} (2x^2-1)\cos 3x dx; L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin^2 x dx.$$

Exercice 8

1) A l'aide d'un changement de variable affine, Calcule les intégrales suivantes:

$$A = \int_0^1 x\sqrt{x+1} dx; B = \int_1^2 t\sqrt{-t+3} dt; C = \int_{\frac{5}{3}}^2 \frac{x^2}{(3x-4)^5} dx; D = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

2) Calcule $E = \int_0^1 x\sqrt{3x+1} dx$ de trois manières différentes.

Exercice 9 : Dans chacun des cas suivants, calcule $I + J$ et $I - J$; puis déduis - en I et J .

$$1. \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos^2 x dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin^2 x dx.$$

$$2. \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \, dx.$$

$$3. \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x \, dx.$$

Exercice 10

On se propose de trouver sans calculer séparément les trois intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 x \sin^2 x \, dx.$$

- 1) Calcule $I - J$ et $I + J + K$.
- 2) Exprime $\cos^4 x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Déduis - en la valeur de $I + J - 3K$ puis celles de I ; J ; K .

Exercice 11

Soit les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} \, dx$

- 1) Calcule I
- 2) Soit la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$
 - a) Montre que $\forall x \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$
 - b) Déduis - en une relation entre I et J .
 - c) Calcule J .

Exercice 12

Soit les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \, dx$

Calcule $I + J$ et $I - J$ puis déduis-en les valeurs de I et J .

Exercice 13

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad g(x) = -\frac{x}{2} + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$$

1. Etablis que $\forall x \in [0; 1]; g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
2. Déduis - en un encadrement puis une valeur approchée de $\int_0^1 f(x) \, dx$

Exercice 14

Une culture de bactéries à un rythme de croissance (exprimé en millimètre par jour) est modélisé par la fonction $f(x) = \frac{3000}{(1+0,25x)^2}$ où $x \in [0; +\infty[$ est le temps écoulé en jour.

On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population

$P : x \mapsto P(x)$ et au temps $x = 0$ la culture compte 1000 bactéries c'est-à-dire $P(0) = 1000$.

1. Détermine $P(x)$ désignant la population des bactéries après x jours.

2. Calcule le nombre de bactéries ainsi que leur rythme de croissance au bout de 3 jours.
3. Détermine le nombre de jours au bout duquel le nombre de bactéries atteindra 10 000 individus.
4. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$ puis interprète ce résultat.
5. Dresse le tableau de variation de P sur $[0; +\infty[$.

Exercice 15 : Le plan est muni du repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm).

Soit (C_f) la courbe de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x|x|$.

1. Etudier les variations de f et construire (C_f) .
2. Calcule en cm^2 l'aire A de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe (ox) , les droites d'équation : $x = -2$ et $x = 0$.
3. Calcule en cm^2 l'aire A de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe (ox) , les droites d'équation : $x = -1$ et $x = 2$.

Exercice 16 :

Le plan est muni du repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1cm).

Soit (C_f) la courbe de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Calculer en cm^2 l'aire A de la partie du plan limitée par (C_f) et $(D): y = x + 1$

Exercice 17

On considère l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$

- 1) Détermine une valeur approchée A par la méthode de rectangle en partageant l'intervalle $[0, 1]$ en 5 intervalles de même amplitude.
- 2) Retrouve le résultat par la méthode de changement de variable.

Exercice 18

Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

- 1) Calcule I_0 .
- 2) A l'aide d'une intégration par parties trouve une relation entre I_n et I_{n-1} pour $n \geq 1$.
- 3) Calcule alors I_1 et I_2 .

Exercice 19

Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$.

- 1) Démontre que $I_0 = \frac{\pi}{4}$.
- 2) Calcule I_1 .
- 3) En intégrant par parties, montre que $\forall n \geq 2$ on a : $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$.
- 4) Calcule alors I_2 et I_3 .

Exercice 20

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ($n \geq 0$)

- 1) Calculer I_0
- 2) En intégrant par parties, montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.
- 3) En déduire la valeur de I_1 ; I_2 et I_3 .

Exercice 21

Soit (I_n) la suite définie par $I_n = \int_0^\pi \sin^n x \, dx$. (On indique $\sin^n x = \sin^{n-1} x \times \sin x$)

1. Calcule I_0 et I_1 .
2. Sans Calculer I_n , démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. A l'aide d'une intégration par parties de I_n démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$. $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$
4. Calcule I_9 ; I_{10} et I_{11}
5. En déduire que :

$$\frac{2^{17}}{3^4 \times 7^2 \times 11} \leq \pi \leq \frac{2^{16}}{3^4 \times 5 \times 7^2}$$

Exercice 22

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$

1. Détermine deux réels a et b tels que : $\forall x \left[0 ; \frac{\pi}{4} \right]$ on a : $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$.
2. Calcule la valeur de I_0 .
Démontre à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :
 $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$ (On pourra poser : $\frac{1}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \times \frac{1}{\cos^2 x}$)

Exercice 23

Pour tout entier naturel on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} \, dx$

- 1) a) Calcule I_0 .
- b) Calcule I_1 de trois manières différentes.
- 2) Compare x^n et x^{n+1} lorsque $0 \leq x \leq 1$. Déduis-en que suite (I_n) est décroissante.
- 3) Etablis que $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$. Etudie la limite de la suite (I_n) .
- 4) a) Démonstre que, $\forall x \in [0; 1]$, on a : $0 \leq 2 - \sqrt{3+x} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x)$.
- b) Déduis que : $\frac{2}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$
- c) Détermine la limite de (nI_n) .

Exercice 24

Soit (I_n) la suite définie par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \, dx$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Majore et minore l'intégrale I_n .
- 2) Déduis que la suite (I_n) converge vers 0.

Exercice 25

On considère la suite (I_n) : $n \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{4}} nx^n \cos 2x \, dx$

- 1) Montre que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$.
- 2) Déduis - en que (I_n) converge.

Exercice 26

L'objet de l'exercice est d'étudier la suite de terme général $u_n = \int_0^1 f(x) dx$ où $f_n = \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$

On convient que $x^0 = 1$.

- 1) Calcule u_0 et u_1 .
- 2) Compare x^n à x^{n+1} lorsque $x \in [0; 1]$. Déduis - en que la suite (u_n) est décroissante.

- 3) En observant que $u_{n-1} + u_n = \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1+x} dx$, établie que $u_{n-1} + u_n < \frac{\sqrt{2}}{n}$.
- 4) A l'aide des résultats précédents, établie que : $\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$.
- 5) Déduis - en la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 27

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$.

- 1) Démontre que la suite (I_n) est positive et décroissante.
- 2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$; détermine la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan^{n+1} x$.
b) Déduis en que :

$$i_1) \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} ; \quad i_2) \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} ; \quad i_3) \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$
- c) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = I_{n+4} - I_n$. Utilise $i_1)$ pour démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}.$$
- 3) a) Calcule I_2 .
b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$.
c) Déduis en que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{\pi}{4}$.
- 4) a) Calcule I_1 .
b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(1) + f(5) + f(9) + \dots + f(4n-3) = I_{4n+1} - I_1$.
c) Déduis en que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$.