

Primitives - Intégrales Série N° 1

Exercice : 1

Déterminer une primitive sur I de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$f(x) = \tan^2(2x) \quad I = \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$$

$$f(x) = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad I =]-\pi; \pi[$$

$$f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} \quad I =]-\pi; \pi[$$

$$f(x) = \sin x \cdot \sin(2x) \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \tan x \cdot \tan^3 x \quad I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}} \quad I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}} \quad I =]1; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-4x}} \quad I = \left] -\infty; \frac{3}{4} \right[$$

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}} \quad I =]-\infty; -1[$$

$$f(x) = 3x^3 - 2x + 2 \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x^2} \quad I =]0; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 2}{x^4} \quad I =]0; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{3}{(3x+4)^3} \quad I = \left] -\frac{3}{4}; +\infty \right[$$

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2} \quad I =]1; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{6x-9}{(x^2-3x+2)^2} \quad I =]1; 2[$$

$$f(x) = 2\sqrt{2x+3} \quad I = \left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$$

$$f(x) = \sqrt{1-x} \quad I =]-\infty; 1[$$

$$f(x) = x\sqrt{x^2+1} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x+1}} \quad I =]-1; +\infty[\quad \text{Écrire } f$$

sous la forme $\left(f(x) = a\sqrt{x+1} + \frac{b}{\sqrt{x+1}} \right)$

$$f(x) = x^3 - x + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4} \quad I = \mathbb{R}_+^*$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - \sqrt{x}}{x} \quad I = \mathbb{R}_+^*$$

$$f(x) = 12x^5 - 4x^3 + 1 \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}; \quad I = \mathbb{R}_+^*$$

$$f(x) = 3x^3 - 2x + 2 \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3x^4 + 4x - 2}{x^4} \quad I = \mathbb{R}_+^*$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x^2} \quad I = \mathbb{R}_+^*$$

Exercice : 2

1- Calculer la fonction dérivée de la fonction

$$f : t \mapsto (at^2 + bt + c)\sqrt{t^2 + 2} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

2- En déduire le calcul de l'intégrale :

$$\int_{-1}^4 \frac{6x^3 + 2x^2 + 9x + 2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

Exercice : 3

- 1- Trouver trois réels a , b et c tels que :

$$\frac{4x^2 + 7x + 1}{x + 2} = ax + b + \frac{c}{x + 2}$$

- 2- En déduire $I = \int_0^2 \frac{4x^2 + 7x + 1}{x + 2} dx$

Exercice : 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 7}{(x + 2)^2}$

- 1- Trouver trois réels a , b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x + 2)^2}.$$

- 2- Trouver la primitive F de f prenant la valeur $-\frac{5}{2}$ en 0 .

- 3- En déduire $I = \int_2^3 f(x) dx$

Exercice : 5

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$$

- 1- Préciser l'ensemble de définition de f
 2- Déterminer les nombres réels a , b , c , et d tels que pour tout nombre réel x

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2} + \frac{d}{(x - 2)^2}$$

- 3- Donner une primitive de f sur $[-1; 1]$.
 4- calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$

Exercice : 6

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 2x^2 - 5x + 6}$$

- 1- Montrer que $a = 1$ est une racine du polynôme

$$x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

- 2- En déduire les deux autres racines, que l'on note b et c tel que $b < c$.

- 3- Déterminer les réels A , B et C tels que

$$f(x) = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c}$$

- 4- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_4^5 f(x) dx$

Exercice : 7

On donne l'intégrale suivante :

$$I = \int_3^4 \frac{1}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx$$

On considère le polynôme P défini par :

$$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

- 1- Soit $a = -2$; montrer que $P(a) = 0$.
 2- Déterminer les réels b et c ($b > c$) tels que :

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

- 3- Déterminer les réels A , B et C tels que :

$$\frac{1}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c}$$

- 4- En déduire la valeur de l'intégrale I .

Exercice : 8

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$$

- 1- Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad f(x) = a + \frac{b}{(x + 1)^2}$$

- 2- Déterminer la fonction F de la fonction f sur

$$[0; +\infty[\text{ tel que : } F(1) = \frac{5}{2}$$

Exercice : 9

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty; 2[$ par :

$$f(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

1- Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel

$$x \in]-\infty; 2[\quad f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$$

2- En déduire la primitive de f sur I qui s'annule en $x = 1$

Exercice : 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$$\text{par } f(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x^2 - 4)^3}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout

$$x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

$$f(x) = \frac{a}{(x-2)^3} + \frac{b}{(x+2)^3}.$$

2. En déduire les primitives de f sur $]-2; 2[$

Exercice : 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^3}$

1- Déterminer deux réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}.$$

2- En déduire une primitive de f sur $]-\infty; 1[$.

Exercice : 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

1- Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$x^2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

2- En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$ tels que :

$$g(x) = x^2(x-1)^{2019}$$

Exercice : 13

Déterminer les réels a , b et c puis calculer l'intégrale I

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2} = a + \frac{b}{x+2} \quad I = \int_1^2 f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x-3} = ax + b + \frac{c}{x-3} \quad I = \int_0^1 f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+4} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-4} \quad I = \int_2^3 f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} \quad I = \int_{-1}^0 f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} \quad I = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = a + \frac{be^{-x}}{1+e^{-x}} \quad I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$$

Exercice : 14

On pose $F(x) = ax^2 \cos x + bx \sin x + c \cos x$
(a , b et c sont trois constantes réelles)

1- Calculer $F'(x)$.

2- Déterminer a , b et c pour que F soit une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 \sin x$.

3- En déduire le calcul de $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$.

Exercice : 15

1- Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$\frac{2x^2 + 3x}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2} \text{ pour tout } x \neq -2.$$

2- Calculer l'intégrale $A = \int_0^2 \frac{2x^2 + 3x}{x+2} dx$ puis

$B = \int_0^2 (4x+3) \ln(x+2) dx$. (on pourra utiliser une intégration par parties)



BONNE CHANCE