

Série d'exercices sur les primitives, intégrales, calculs d'Aires
Classe : TSEXP -TSE

Exercice 1 :

Détermine les primitives des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 7$; 2) $f(x) = (2x - 5)^3$; 3) $f(x) = (x^2 - 3x)(2x^2 - 3)^2$
 4) $f(x) = (3x^2 - 1)(x^3 - x + 2)$; 5) $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; 6) $f(x) = \cos(-3x + 2)$;
 7) $f(x) = \frac{-1}{(x+2)^3}$; 8) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$; 9) $f(x) = \frac{1}{3(\cos x)^2}$; 10) $f(x) = \frac{-\cos x + \sin x}{(\cos x + \sin x)^3}$
 11) $f(x) = \cos 2x \sin 3x$; 12) $f(x) = \cos 4x \cos x$; 13) $f(x) = \cos^5 x$; 14) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
 15) $f(x) = \sin^3 x \times \cos^3 x$; 16) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^2}$; 17) $f(x) = \tan^2(x)$;
 18) $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$; 19) $f(x) = \cos \frac{x}{2} + 3 \sin 2x - 4x$; 20) $f(x) = \sqrt{-3x+4}$

Exercice 2 :

Détermine la primitive F de la fonction f vérifiant les conditions indiquées :

- 1) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$; et $F(0) = -1$
 2) $f(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 2)^3$; et $F(-1) = 2$
 3) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$; et $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$
 4) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$; et $F(\pi) = -1$
 5) $f(x) = \frac{x+1}{(3x^2+6x)^3}$; et $F(-1) = 0$
 6) $f(x) = \sqrt{1-3x}$; et $F(0) = 2$
 7) $f(x) = \sin 3x - \cos 2x + \frac{1}{\cos^2 x}$; et $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}$$

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
 2) Détermine les réels a, b etc tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$.
 3) En déduis la primitive de f qui s'annule en 0.

Exercice 4 :

Soient les fonctions f et F définies par :

$$f(x) = x\sqrt{3-2x} \text{ et } F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}.$$

Détermine les réels a, b et c tel que $\forall x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$, F soit une primitive de f sur $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$.

Exercice 5 : on donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}; g(x) = \frac{2x^2+3x+4}{x^2-1}$$

- 1) Vérifie que f est de la forme : $ax + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$;
 2) calcule les intégrales: $\int_{-1}^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 g(x)dx$

Exercice 6:

Calcule les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x} dx$; 2) $\int_1^2 (1-2x)(x^2-x)^{\frac{7}{2}} dx$; 3) $\int_1^3 \frac{-2x+5}{(-x^2+5x+3)^5} dx$;
 4) $\int_{e^4}^{e^5} \frac{\sqrt{\ln x - 1}}{x} dx$; 5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$; 7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^6 x dx$;

- 8) $\int_{-1}^0 (2x+1)e^{(x^2+x)} dx$; 9) $\int_0^1 e^x dx$; 10) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x - \sqrt{2}} dx$;
 11) $\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx$; 12) $\int_{-5}^7 (|x+3| + 2|x^2 - 3x + 2|) dx$;
 13) $\int_1^2 \left(\frac{e^x}{x} + e^x \ln x\right) dx$; 14) $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 x dx$; 15) $\int_0^1 \frac{x}{(2x^2+3)^3} dx$.

Exercice 7 :

- 1) utilise une intégration par parties pour calculer les intégrales suivantes :
 a) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x dx$; b) $\int_0^1 x \sqrt{x+1} dx$; c) $\int_1^2 x \ln x dx$; d) $\int_1^2 \ln t dt$
 2) Utilise deux intégrations par parties pour calculer :

- a) $\int_0^2 x^2 e^x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$; c) $\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx$; d) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx$.

Exercice 8 : le plan muni du repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (C) est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$;

Calcule l'aire de la partie (Δ) du plan limitée par (C) et la droite (D) d'asymptote de (C); les droites d'équations $x = -3$ et $x = -1$.

✕ **Exercice 9 :** on considère les intégrales I et J ci-dessous

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx$$

- 1) calcule $I + J$ et $I - J$
 2) En déduis I et J

✕ **Exercice 10 :**

On considère les intégrales K et L ci-dessous :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \cos^2 x dx; \text{ et } L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \sin^2 x dx.$$

- 1) Calcule $K + L$; et $K - L$
 2) En déduis K et L .

Exercice 11 :

On considère la fonction f de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

- 1) Démontre que f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et que pour tout élément x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$: $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$;
 2) Calcule $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$
 3) En déduis une relation entre les intégrales I et J ; avec $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$. Calcule J .

Exercice 12 :

Démontre que pour tout nombre réel positif t , $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

proposée par : Monsieur Badra A KOME
 Tél : 76-46-14-25

En déduis que : pour tout nombre réel positif x ,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Exercice 13 :

Dans chacun des cas suivants, calcule la valeur moyenne sur l'intervalle K de la fonction f définie ci-dessous :

- 1) $f: x \rightarrow x^3 + x - 3$, $k = [1; 3]$
- 2) $f: x \rightarrow \frac{\sin \pi x}{2}$, $k = [0; \frac{1}{2}]$
- 3) $f: x \rightarrow e^{-x}$, $k = [\ln 2, \ln 3]$
- 4) $x \rightarrow \frac{e^x}{1+e^x}$, $k = [0; 3]$

Exercice 14 :

Calcule les intégrales ci-dessous en évitant la linéarisation :

- 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$; 3) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$
- 5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

Exercice 15 :

- 1) Transforme en une somme $\cos x \cos 2x \cos 3x$;
- 2) Calcule les intégrales J , et I définies ci-dessous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x \cos 3x dx; \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 3x dx$$

Exercice 16 :

- 1) Détermine les nombres réels a, b , et c tel que :

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

- 2) Calcule $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2+1)} dx$
- 3) A l'aide de l'intégration par parties calcule :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$$

Exercice 17 :

- 1) Démontre pour tout nombre réel x : $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$
- 2) A l'aide d'une intégration par parties, calcule :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (2x+1) \cos^2 x \sin x dx$$

Exercice 18 :

On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$

- 1) Calculer $f'(x)$
- 2) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte du nombre $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x \sin x} dx$

Exercice 19 :

On considère les intégrales I et J ci-dessous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx; \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$$

- 1) Calcule $I + J$
- 2) Calcule $I - J$ à l'aide d'intégrations par parties
- 3) En déduis I et J

Exercice 20 :

f est la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = \int_1^x \frac{5t}{1+t} dt$

- 1) calcule $f(1)$
- 2) détermine la dérivée f' de f

Exercice 21 :

Le plan est muni du repère orthonormé (o, i, j) . On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t} dt$$

- 1) indique sans calcul $f'(x)$ et $f'(0)$
- 2) étudie les variations de f
- 3) démontre que : pour tout nombre réel x ,

$f(x) = x + \ln(e^{-x} + 1) - \ln 2$; En déduire que la droite d'équation $x - \ln 2$ est une asymptote à la représentation graphique (C) de f

- 4) Construis (C).

Exercice 22 :

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

- 1) calcule I_1
- 2) en intégrant par parties montre que : $I_n = \frac{n-1}{n+1} I_{n-2}$

(On posera $x^n = x \times x^{n-1}$)

Exercice 23 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$$

1) préciser l'ensemble de définition de f

2) détermine les nombres réels a, b, c , et d tel que : pour tout réel x :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}$$

3) donne une primitive de f sur $[-1; 1]$; calcule : $\int_{-1}^1 f(x) dx$

Exercice 24 :

Soit la fonction f définie par $f'(x) = \frac{3x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$

1) Trouve les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$

2) En déduis la valeur de l'intégrale $I = \int_1^2 f(x) dx$.

Exercice 25 :

En utilisant la formule d'intégration par parties, calcule les intégrales suivantes :

1) $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; 2) $J = \int_0^1 x^2 e^x dx$; 3) $G = \int_0^1 (-2x^2 + x) e^x dx$;

3) $Q = \int_1^2 x \sqrt{2x+1} dx$; 5) $T = \int_1^e (x^2 + 3) \ln x dx$; 6) $V = \int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.

Exercice 26 :

On pose $F(x) = ax^2 \cos x + bx \sin x + c \cos x$ où a, b et c sont trois constantes réelles.

1°) Calcule $F'(x)$.

2°) Détermine a, b et c pour que F soit une primitive de $x^2 \sin x$.

3°) En déduis le calcul de $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$.

Exercice 27 :

A l'aide de changement de variable affine, calcule les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x \sqrt{x+1} dx ; J = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sqrt{2x+1} dx ; K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Exercice 28 :

On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ et $K = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$.

 Scanner avec
Balayage rapide