

Exercices d'applications :

Exercice1 : Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de f sur D_f de f .

- 1) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 10x - 4$; 2) $f(x) = (x^2 - x + 7)^4(2x - 1)$; 3) $f(x) = (2x - 1)^3$;
 4) $f(x) = 5x(x^2 + 1)^6$; 6) $f(x) = (6x + 3)(x^2 + x + 1)^4$; 7) $f(x) = 7x^2(5 - x^3)^3$;
 8) $f(x) = \frac{-x}{(x^2 - 9)^5}$; 9) $f(x) = \frac{2x^5 - 3x^3 + 3x^2 + 2}{x^2}$; 10) $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 4}{(x + 1)^2}$;
 11) $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^4}$; 12) $f(x) = \sin^3 x \cos x$; 13) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^5 x}$; 14) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$;

Exercice2 : Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive f qui prend la valeur y_0 en x_0 .

- 1) $f(x) = (x - 1)^4$ $x_0 = 2$ et $y_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{1}{(1 - x)^3}$ $x_0 = y_0 = 0$;
 3) $f(x) = \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et $y_0 = 1$; 4) $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$ $x_0 = \pi$ et $y_0 = 1$.

Exercice3 : calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{3}{(3 - 2x)^4} dx ; \quad B = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} dx ; \quad C = \int_2^3 \left(3x^2 - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx ;$$

$$D = \int_2^3 \left(x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx ; \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) dx ; \quad F = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^5 t \, dt ; \quad G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx ;$$

$$H = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x \, dx ; \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \cos 4t \, dt ; \quad J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cos x} dx ; \quad K = \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx ;$$

$$L = \int_{-4}^1 (|x + 3| + |2x - 1|) dx ; \quad M = \int_2^6 \frac{1}{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}} dx ; \quad N = \int_1^{-1} \frac{x^3}{x^4 - x^2 + 3} dx .$$

Exercice4 : 1. Utiliser une intégration par parties pour calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^2 x \sqrt{2x + 1} dx ; \quad B = \int_0^1 (x + 1) \sqrt{2x + 1} dx ; \quad C = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x + 1}} dx ;$$

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \cos x \, dx ; \quad E = \int_0^{\pi} (x-1) \sin 3x \, dx ; \quad F = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin^2 x \, dx ; \quad G = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin^2 3x \, dx ;$$

2. Utiliser deux intégrations par parties pour calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} \, dx ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x \, dx ; \quad K = \int_0^{\pi} (2x^2-1) \cos 3x \, dx ; \quad L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin^2 x \, dx .$$

Exercice5 : A l'aide d'un changement de variable affine, calculer les intégrales suivantes:

$$A = \int_0^1 x \sqrt{x+1} \, dx ; \quad B = \int_1^2 t \sqrt{-t+3} \, dt ; \quad C = \int_{\frac{5}{3}}^2 \frac{x^2}{(3x-4)^5} \, dx ; \quad D = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} \, dx .$$

Exercice6 : Dans chacun des cas suivants, calculer $I+J$ et $I-J$; puis en déduire I et J .

$$1. \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \cos^2 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \sin^2 x \, dx .$$

$$2. \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x \, dx .$$

Exercice7 : on donne la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 7}{(x+2)^2} .$$

1. Trouver les réels a , b et c tels que : $\forall x \in D_f ; f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$.
2. Trouver la primitive F de f prenant la valeur $-\frac{5}{2}$ en 0 .
3. En déduire $I = \int_2^3 f(x) \, dx$.

Exercice8 : Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

Soit (C_f) la courbe de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x|x|$.

1. Etudier les variations de f et construire (C_f) .
2. Calculer en cm^2 l'aire A de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe (Ox) , les droites d'équation : $x=0$ et $x=-2$.

Exercice9 : Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 1 cm).

On considère la fonction f et sa courbe (C_f) telles que : $f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-2)^2}$.

1. Montrer sur D_f que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C_f) .
2. Montrer que $\forall x \in D_f, (C_f)$ est au dessus de (Δ) .
3. Etudier les variations de f et construire (C_f) .
4. Calculer en cm^2 l'aire A de la partie du plan limitée par (C_f) , (Δ) , les droites d'équation : $x=3$ et $x=6$.

Exercice10 : On donne $A = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

1. Donner un encadrement de A , puis une valeur approchée de A en utilisant la méthode des rectangles pour $n=10$ subdivisions.
2. Retrouver le résultat précédent en faisant un changement de variable. (**indication** : on pourra poser $x = \tan t$).

Exercice10 : Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{x-1}{|x^2-2x|+1}$ et m un réel supérieur à 2.

1. Calculer $I = \int_1^2 h(x) dx$, puis $J = \int_1^m h(x) dx$.
2. Quelle est la valeur moyenne de h sur l'intervalle $[1 ; m]$.