

2. Formulaires de primitives usuelles

2-1. Fonctions trigonométriques réciproques

Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$] -1, 1[$	
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$	$] -a, a[$	$a > 0$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$	$a \neq 0$
$\frac{1}{\beta^2+(x+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$	$\mathbb{R}$	$\beta \neq 0$

2-2. les « fonctions puissances ».

Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}^*$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$	$a > 1$ et $a \neq 1$
$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$	$\mathbb{R}$	

2-3. la « trigonométrie circulaire »

Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$
$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cotan^2(x)$	$\cotan(x)$	$]k\pi, (k+1)\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln \tan(\frac{x}{2}) $	$]k\pi, (k+1)\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) $	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$

3. Quelques propriétés

Théorème 1 : Si F et G sont des primitives de f et g sur I (intervalle donné de $\mathbb{R}$), alors :

- Une primitive de $f + g$ sur I est $F + G$ et une primitive de λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) sur I est λF .
- D'autre part, si f est dérivable sur I et g est dérivable sur $f(I)$, une primitive de $f' \times (g' \circ f)$ sur I est $g \circ f$.

Le dernier point du théorème précédent fournit le formulaire non exhaustif suivant :

Fonction	Une primitive	Commentaire
$f' f^\alpha$	$\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{f'}{f}$	$\ln f $	
$\frac{f'}{f^n}$	$-\frac{1}{(n-1)f^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}$	
$f' e^f$	e^f	
$f' \sin(f)$	$-\cos(f)$	

3. Quelques propriétés

Théorème 1 : Si F et G sont des primitives de f et g sur I (intervalle donné de $\mathbb{R}$), alors :

- Une primitive de $f + g$ sur I est $F + G$ et une primitive de λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) sur I est λF .
- D'autre part, si f est dérivable sur I et g est dérivable sur $f(I)$, une primitive de $f' \times (g' \circ f)$ sur I est $g \circ f$.

Le dernier point du théorème précédent fournit le formulaire non exhaustif suivant :

Fonction	Une primitive	Commentaire
$f' f^\alpha$	$\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{f'}{f}$	$\ln f $	
$\frac{f'}{f^n}$	$-\frac{1}{(n-1)f^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}$	
$f' e^f$	e^f	
$f' \sin(f)$	$-\cos(f)$	
$f' \cos(f)$	$\sin(f)$	
$\frac{f'}{\cos^2(f)} = f'(1 + \tan^2(f))$	$\tan(f)$	
$\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arcsin(f)$	
$\frac{f'}{1+f^2}$	$\arctan(f)$	

Exemple

Déterminons une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^3} \quad I = \mathbb{R}$

$f_1(x)$ est continue sur $I = \mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. De plus $f_1(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{(1+x^2)^3}$ avec $((x^2+1)' = 2x)$. En utilisant le tableau précédent on déduit qu'une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{4(x^2+1)^2}$.

2. $f_2 : x \mapsto -\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^3} + \frac{5}{x} \quad I =]0, +\infty[$

f_2 est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que somme finie de fonctions continues sur $]0, +\infty[$. Donc f_2 admet une primitive sur $]0, +\infty[$ qui est la fonction $x \mapsto -6\sqrt{x} - \frac{3}{2x^2} + 5\ln(x)$.

Exercice 1

Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré (on admettra que les fonctions considérées sont définies et continues sur I)

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ avec $I = \mathbb{R}$

2. $f_2 : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ avec $I = \mathbb{R}$.

3. $f_3 : x \mapsto (1+\ln(x))x^x$ avec $I =]0, +\infty[$

4. $f_4 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ avec $I =]0, 2[$

Solution

1. Pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2}$ (Avec $(x^2+1)' = 2x$). D'après le tableau des primitives, une primitive de f_1 est alors $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(|x^2+1|) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$.

L'ensemble des primitives de f_1 sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

2. Pour tout réel x , $f_2(x) = \frac{e^x}{1+(e^x)^2}$ avec $((e^x)' = e^x)$. On déduit qu'une primitive de f_2 est la fonction $x \mapsto \text{Arctan}(e^x)$. L'ensemble des primitives de f_2 sont les fonctions $x \mapsto \text{Arctan}(e^x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

3. pour tout $x > 0$; $f_3(x) = [1+\ln(x)]e^{x\ln(x)}$ avec $((x\ln(x))' = 1+\ln(x))$. Alors une primitive de f_3 sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto e^{x\ln(x)} = x^x$. Les primitives de f_3 sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto x^x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

4. Pour tout $x \in]0, 2[$ $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$ avec $(x-1)' = 1$. Alors une primitive de f_4 sur $]0, 2[$ est la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x-1)$. Les primitives de f_4 sur $]0, 2[$ sont les fonctions $x \mapsto \text{Arcsin}(x-1) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

II. Intégration d'une fonction

1. Intégrale d'une fonction continue et positive

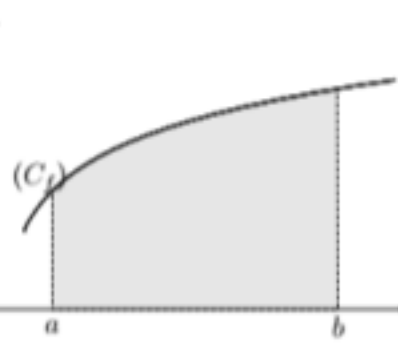
1-1. Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive

Définition :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ où a et b sont deux réels tels que $a \leq b$. L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine D du plan délimité par les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f .

Elle se note $\int_a^b f(x) dx$ ce qui se lit « intégrale de a à b de $f(x)dx$ »



1-2. Calcul d'intégrale d'une fonction continue et positive

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f , alors on a le théorème suivant :

Théorème 1 : Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$