

Intégrales et primitives

Exercice 1 - Calcul intégral

Calculer

$$I = \int_1^2 \frac{1+x^2}{1+x} dx$$

en cherchant une intégrale intermédiaire de la forme

$$J = \int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

qui s'intégrera facilement.

Exercice 2 - Intégration par partie

Calculer ces intégrales en intégrant par parties:

A. $\int_0^3 x\sqrt{3-x} dx$.

B. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

C. $\int_0^\pi x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

Exercice 3 - Dérivée d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$.

Quelle est la dérivée de f sur $\mathbb{R}^{+*}$?

Exercice 4 - Limite d'une fonction et asymptotes

Soit f une fonction définie sur $] -\infty; 0] \cup [1; +\infty[$ tel que $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$, que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

2. Cette fonction est-elle dérivable en 0 ? en 1 ?

Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

3. a. Déterminer la limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$.

b. déterminer la limite en $+\infty$ de $[f(x) - 2x]$

En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$.

Exercice 5 - Fonction numérique et dérivée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 7}{x - 3}$

et C sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

1.a. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Étudier le comportement asymptotique de f en 3. Interpréter les résultats graphiquement.

2.a. Déterminer la dérivée de f et étudier les variations de f . Dresser le tableau de variation complet de f .

3.a. Montrer que la courbe de f admet la droite (D) d'équation $y = -2x - 3$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Déterminer algébriquement la position relative de la courbe C et de la droite (D) .

4. Soit $S(3; -9)$. Montrer que S est le centre de symétrie de la courbe C .

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

5. Construire la courbe C et y faire apparaître les éléments remarquables.

Exercice 6 - Intégrales et suites numériques au Bac S Liban

On considère la suite (U_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$$

1.

a. Montrer que $U_0 + U_1 = 1$.

b. Calculer U_1 , en déduire U_0 .

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_n \geq 0$.

3.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$U_{n+1} + U_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$U_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$$

4. Déterminer la limite de la suite (U_n) .

Exercice 7 - Intégrales et exponentielles Bac S Nouvelle Calédonie

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Calculer, pour tout nombre réel x , $f'(x)$.

En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^n f(x) dx$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x) dx = (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n .

c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e.$$

Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

Exercice 8 - Dérivée

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^4 x - \cos^2 x$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

En déduire que $f''(x) + 16f(x)$ est constant.

2. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

Exercice 9 - Intégration par partie

Calculer :

$$I = \int_1^x (t^2 - t) \ln t \, dt$$

Exercice 10 - Le calcul de primitives

Etudier les primitives de la fonction f sur un intervalle I que l'on précisera .

a. $f(x) = -1 + x + \frac{x^3}{2} + x^5$.

b. $f(x) = (x-1)^2(x+1)$.

c. $f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{7}{3}x^2 + 12x^4$.

d. $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

d. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

e. $f(x) = -\frac{-3}{(3x-1)^2}$.

f. $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

g. $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{6x+7}}$.

h. $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} + \cos x$.

i. $f(x) = \ln(x)$.

j. $f(x) = \sin x \times \cos^2 x$.

k. $f(x) = \sin(-3x+1)$.

l. $f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^2}$.

m. $f(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

(Indication : penser à $\frac{u'v - uv'}{v^2} = \left(\frac{u}{v}\right)'$.).

Exercice 11

Déterminer la primitive F de la fonction f sur I vérifiant la condition indiquée.

a. $f(x) = x^3 - x^2 - 1$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = 7$.

b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$, $I =]0; +\infty[$, $F(1) = 0$.

c. $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$, $I = \mathbb{R}$, $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6}$.

Exercice 12

Soit $f(t) = \frac{-6t-3}{(t+2)^2(t-1)^2}$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout t différent de -2 et 1 ,

$$f(t) = \frac{a}{(t+2)^2} + \frac{b}{(t-1)^2} .$$

b. En déduire les primitives de f sur $] -2; 1[$.

Exercice 13 - Extrait bac s sur l'intégration par partie

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que , pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

2. Soit $X \geq 1$.

a. Calculer $\int_1^X \frac{dx}{x(1+x)^2}$.

b. Soit f la fonction définie sur $x \in [1; +\infty[$ par $f(X) = \int_1^X \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx$

En intégrant par parties, calculer $f(X)$ en fonction de X .

c. Montrer que $\lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = \frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{1}{2})$

Exercice 14 - Les intégrales et les primitives

Calculer l'intégrale proposée :

a. $\int_2^3 0 dt$.

b. $\int_{-\frac{1}{4}}^2 (-x+6) dx$.

c. $\int_{\frac{2\pi}{3}}^0 (2x^2+8x-1) dx$.

d. $\int_0^0 (\cos x) dx$.

e. $\int_{-\frac{2}{3}}^0 (x^5+4x^3+x^2-x) dx$.

f. $\int_{\frac{1}{4}}^1 (\frac{1}{x^2}) dx$.

g. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{\cos^2 x}) dx$.

h. $\int_3^4 (\frac{1}{\sqrt{2x+5}}) dx$.

Exercice 15 - calculs d'aires

Soit $f(x) = x^2 + 1$.

$I = [-1; 0]$.

D est délimité par l'axe des abscisse, la courbe C , les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$.

Démontrer que f est positive sur I et calculer l'aire du domaine D .

Exercice 16 - propriétés de l'intégration

On considère $\int_a^b f(x)dx =$ et $\int_a^b g(x)dx =$

a. Calculer $\int_a^b (2f(x) - 4g(x))dx$.

b. Déterminer β . sachant que : $\int_a^b (4f(x) - \beta g(x))dx =$

Exercice 17 - propriétés de l'intégration

Justifier sans calcul le résultat suivant :

$$\int_{-5}^5 (x^3 - \tan x)dx =$$

Exercice 18

Calculer l'intégrale proposée en linéarisant :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$.

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos x dx$.

Exercice 19

Soit $f(t) = \frac{-6t-3}{(t+2)^2(t-1)^2}$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout t différent de -2 et 1,

$$f(t) = \frac{a}{(t+2)^2} + \frac{b}{(t-1)^2}.$$

b. En déduire les primitives de f sur $] -2; 1[$.

