

PROBABILITES I

Exercices

Exercice 1

Soient A et B deux évènements indépendants.

Si $p(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,3$ calculer

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A \cup B)$

2) si $P(A \cap B) = 0,1$ et $P(B) = 0,5$

Calculer :

a) $P(A)$

b) $P(A \cup B)$

Exercice 2

Dans une classe de 40 élèves 28 apprennent l'anglais, 16 l'allemand et 8 les deux langues. On choisit au hasard un élève dans cette classe et on considère les évènements

A « l'élève choisit apprend l'anglais ».

B « l'élève choisit apprend l'allemand »

Calculer les probabilités des évènements suivants :

A; B; $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A} \cup B$

Exercice 3

Deux personnes A et B font feu simultanément sur une cible .La probabilité pour A de

toucher la cible est estimée à $\frac{4}{5}$, la probabilité pour B est de $\frac{3}{4}$

Quelle est la probabilité pour :

Que les deux tireurs touchent tous deux la cible.

Que tous deux manquent la cible.

Que la cible soit atteinte par A seulement.

Que la cible soit atteinte par B seulement.

Que la cible soit touchée par un tireur seulement.

Que la cible soit atteinte.

Que la cible soit manquée.

Que la cible soit touchée par un tireur au moins.

Exercice 4

Trois élèves A, B, C passent le même jour un examen. Les trois examens sont différents et se déroulent en des lieux différents.

Les parents de ces candidats leurs attribuent les probabilités suivantes :



$$P(A) = 0,7 \quad ; \quad P(B) = 0,4 \quad ; \quad P(C) = 0,6$$

Calculer la probabilité que:

Les élèves soient reçus.

Les trois élèves échouent.

A seulement soit reçu.

Un élève exactement soit reçu.

B soit le seul à échouer.

Deux élèves exactement soient reçus.

Au moins un élève soit reçu.

Exercice 5

Un sac contient neufs boules numérotées 1,2,...,9

On tire successivement trois boules du sac sans remise et on les range dans l'ordre où elles sont sorties.

Calculer la probabilité que :

Les numéros de trois boules forment le chiffre 123.

Ces numéros forment un nombre divisible par 125

Le nombre formé soit constitué de trois chiffres rangés en ordre croissant.

Exercice 6

Une urne contient trois boules marquées 1, 2,3. On en tire deux successivement en remettant à chaque fois la boule tirée.

Quelle est la probabilité pour que le plus grand nombre tiré soit 3 ?

Exercice 7

Deux sacs désignés par A et B contiennent chacun 9 boules numérotés de 1 à 9. On tire simultanément 2 boules du sac A et une boule du sac B.

Calculer la probabilité pour que 3 numéros soient impairs.

Calculer la probabilité pour que 2 numéros soient pairs et un numéro soit impair.

Exercice 8

Le prénom Caroline est constitué de 8 lettres différentes.

On prépare 8 morceaux de papier portant chacun l'une de ces lettres .on tire 5 de ces papiers sans considération de l'ordre de sortie.

1 – Quelle est la probabilité d'avoir tiré la lettre a ?

2 – Quelle est la probabilité d'avoir tiré 2 voyelles et 2 seulement ?

3 – Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins une voyelle ?

Exercice 9

On lance simultanément deux dés non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note les deux numéros obtenus sur les faces supérieures.

Calculer les probabilités des événements suivants :

« La somme des numéros obtenus est égal à 6 »

« La somme des numéros obtenus est impair »

« La somme des numéros obtenus est pair »

« La somme des numéros obtenus est supérieure à 8 »

«La somme des numéros obtenus est inférieur à 4 »



Exercice 10

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note a le résultat du premier lancer et b le résultat du second lancer. On considère

alors l'équation du second degré $x^2 + ax + b = 0$

Calculer la probabilité pour que cette équation admette :

- Deux solutions distinctes.
- Une solution double.
- Aucune solution

Exercice 11

Une urne contient 3 boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher. L'expérience aléatoire consiste à tirer une boule deux fois de suite lors du tirage avec remise.

a) Quels sont les événements élémentaires de cette expérience ? Combien y a-t-il ?

b) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

R_1 << Tirer une boule rouge au premier tirage >>



CORRIGES**Exercice 1**

$$a- P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

$$b) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,12 = 0,58$$

$$2) a- P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$D'o\grave{u} P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

$$b) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,5 - 0,1 = 0,6$$

Exercice 2

Dans un tel exercice l'effectif de la classe ne se vérifie pas par la somme de 28+16 ou de 28+16+8

L'effectif 40 ne se vérifie pas tout simplement par ce qu'il y a des élèves qui étudient les deux langues à la fois.

Calculons les probabilités

Anglais : 28

Allemand : 16

ang +all : 8

$$CARD(\Omega) = 40 ; CARD(A) = 28 ; CARD(B) = 16 ; CARD(A \cap B) = 8$$

$$P(A) = \frac{CARD(A)}{CARD(\Omega)} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$$

$$P(B) = \frac{CARD(B)}{CARD(\Omega)} = \frac{16}{40} = \frac{4}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{CARD(A \cap B)}{CARD(\Omega)} = \frac{8}{40} = \frac{2}{10}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{9}{10}$$

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

$\bar{A} \cap B$ Est l' v nement « l'élève choisit apprendre uniquement l'allemand »

$$CARD(\bar{A} \cap B) = 16 - 8 = 8$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{CARD(\bar{A} \cap B)}{CARD(\Omega)} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$



Exercice 3

$$P(A) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} ; \quad P(B) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$1) \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

$$2) \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$3) \quad P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B}) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$4) \quad P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$$

$$5) \quad P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P(B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) \times P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P(B) + P(A) \times P(B) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{3}{20} + \frac{12}{20} \\ &= \frac{19}{20} \end{aligned}$$

$$7) \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad & P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) \times P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P(B) + P(A) \times P(B) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{3}{20} + \frac{12}{20} = \frac{19}{20} \end{aligned}$$

Exercice 5

Les choix possibles de trois boules différentes soit par les boules qui les constituent soit par l'ordre de sortie des boules. Le nombre de ces cas possibles est donc le nombre d'arrangement de trois éléments pris parmi neuf.

$$\text{Soit } A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

1) Le nombre de cas favorables est 1 car il y a une seule façon d'obtenir le nombre 123

la probabilité est alors $\frac{1}{504}$

2) Le nombre de cas favorables est 4 car les nombres divisibles par 125 sont :

125 ; 375 ; 625 ; 875 les probabilités sont $\frac{4}{504}$



Exercice 6

Tirer deux boules d'une urne contenant 3 boules en remettant et reprendre à nouveau le tirage donne le nombre de cas possibles :

Soit Ω l'univers des possibles. Avec $\Omega = 3$

$$\begin{aligned} \text{CARD}(\Omega) &= \text{CARD}(\Omega_1) \times \text{CARD}(\Omega_2) \\ &= 3 \times 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Avec Ω_1 : l'univers du premier tirage

Ω_2 : L'univers du second tirage

Le nombre de cas favorable est 5, ces cas sont : (1,3);(3,1);(2,3);(3,2);(3,3)

La probabilité est $\frac{5}{9}$

Exercice 7

Les trois numéros sont impairs si les 2 numéros du sac A sont impairs et le numéro du sac B est impair.

Dans le sac A il y a 5 numéros impairs à savoir 1, 3, 5, 7, et 9

Il y a C_5^2 façons de choisir 2 numéros parmi les 5.

Il y a C_9^2 façons de choisir 2 numéros dans le sac parmi les neuf.

La probabilité de choisir 2 numéros impairs dans le sac est $\frac{C_5^2}{C_9^2}$

Dans le sac B il ya 9 numéros et C_9^1 façons de choisir un numéro parmi 9.

Il ya 5 numéros impairs et C_5^1 façons de choisir un numéro impair parmi 5.

La probabilité de choisir un numéro impair dans le sac B est $\frac{C_5^1}{C_9^1} = \frac{5}{9}$

La probabilité de tirer 2 numéros impairs du sac A et un numéro impair du sac B est

$$\frac{C_5^2}{C_9^2} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{72} \times \frac{5}{9} = \frac{100}{648}$$

Donc la probabilité pour que les 3 numéros tirés soient tous impairs est $\frac{100}{648}$

Pour que 2 numéros soient pairs et un numéro soit impair.

Il faut que soit l'on tire 2 numéros pairs du sac A et un numéro impair du sac B ou soit l'on tire du sac A 1 numéro pair et un numéro impair et du sac B un numéro pair.

Considérons les évènements suivants :

E « on tire deux numéros pairs et un numéro impair ».

F « on tire deux numéros pairs de A et 1 numéro impair de B »

G « on tire un numéro pair et un numéro impair de A et 1numéro pair de B »

On a : $P(E) = F(F) + P(E)$



F : il y a C_4^2 façons de tirer 2 numéros pairs de A et C_9^2 façons de tirer 2 numéros de A. La probabilité de tirer 2 numéros pairs de A est $\frac{C_4^2}{C_9^2}$

Il y a C_9^1 façons possibles de tirer 1 numéro de B et C_5^1 de tirer 1 numéro impair de B.

La probabilité de tirer 1 numéro impair de B est $\frac{C_5^1}{C_9^1} = \frac{5}{9}$

On a $P(F) = \frac{C_4^2}{C_9^2} \times \frac{5}{9} = \frac{60}{648}$

G : il y a C_9^2 façons possible de tirer 2 numéros de A et $C_5^1 \times C_4^1$ façons de tirer 1 numéro impair et 1 numéro pair de A. La probabilité de tirer 1 numéro pair et 1 numéro impair de A est $\frac{C_5^1 \times C_4^1}{C_9^2}$

Il y a C_9^1 façons possibles de tirer un numéro de B et C_4^1 façons de tirer 1 numéro pair de B. La probabilité de tirer 1 numéro pair de B est $\frac{C_4^1}{C_9^1} = \frac{4}{9}$

On a : $P(G) = \frac{C_5^1 \times C_4^1}{C_9^2} \times \frac{4}{9} = \frac{160}{648}$

$P(E) = P(F) + P(G) = \frac{60}{648} + \frac{160}{648} = \frac{220}{648}$

La probabilité pour que 2 numéros soient pairs et un impair est $\frac{220}{648}$.

Exercice 8

Comme on ne tient pas compte de l'ordre de sortie, il y a C_8^5 cas possibles.
1 - Parmi les lettres tirées il y a la lettre a .

Comme il y a une seule lettre a parmi les 8 lettres, il y a C_1^1 façon de la tirer et les 4 autres lettres sont tirées parmi les 7 lettres restantes soit C_7^4 façons de les obtenir.

$$\frac{C_1^1 \times C_7^4}{C_8^5} = \frac{5}{8}$$

Le nombre de cas favorable à l'évènement avoir tiré la lettre a est

2 - Les 8 lettres différentes comprennent 4 voyelles et 4 consonnes. Il y a C_4^2 façons de tirer 2 voyelles parmi les 4 et les 3 autres lettres sont des consonnes à tirer parmi les 4 consonnes il y a C_4^3 façons de les tirer.

Le nombre de cas favorables à l'évènement « avoir tiré 2 voyelles et 2 seulement est $C_4^2 \times C_4^3$

$$\frac{C_4^2 \times C_4^3}{C_8^5} = 0,42$$

La probabilité est

4 consonnes seulement figurent dans le mot caroline.

En tirant 5 lettres on est certain de tirer au moins une voyelle.



La probabilité est donc égale à 1

Exercice 9

Résumons les deux lancers dans un tableau récapitulatif (tableau à double entrée)

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

L'univers des possibles $\Omega = 36$

Soit A l'évènement « la somme des numéros obtenu est égal à 6 »

$$A = \{(5,1); (4,2); (3,3); (2,4); (1,5)\}$$

$$CARD(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{CARD(A)}{\Omega} = \frac{5}{36}$$

B «la somme des numéros obtenus est impair »

$$B = \{(1,2); (1,4); (1,6); (2,1); (2,3); (2,5); (3,2); (3,4); (3,6); (4,1); (4,3); (4,5); (5,2); (5,4); (5,6); (6,1); (6,3); (6,5)\}$$

$$CARD(B) = 18 \Rightarrow P(B) = \frac{18}{36}$$

C «la somme des numéros obtenus est pair »

$$C = \{(1,1); (1,3); (1,5); (2,2); (2,4); (2,6); (3,1); (3,3); (3,5); (4,2); (4,4); (4,6); (5,1); (5,3); (5,5); (6,2); (6,4); (6,6)\}$$

$$CARD(C) = 18 \Rightarrow P(C) = \frac{18}{36}$$

D «la somme des numéros obtenus est supérieur à 8 »

$$D = \{(6,3); (5,4); (6,4); (4,5); (5,5); (6,5); (3,6); (4,6); (5,6); (6,6)\}$$

$$CARD(D) = 10 \Rightarrow P(D) = \frac{10}{36}$$

E «la somme des numéros obtenus est inférieur à 4 »

$$E = \{(1,1); (1,2); (2,1)\}$$

$$CARD(E) = 3 \Rightarrow P(E) = \frac{3}{36}$$



Exercice 10

a étant le résultat du premier lancer et b celui du second lancer.

Les solutions de l'équation dépendent du discriminant $\Delta = a^2 - 4b$

Utilisons le tableau suivant

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

L'équation admet une solution double lorsque $\Delta > 0$ c'est-à-dire $a^2 - 4b > 0$

Les couples (a, b) pour lesquels $\Delta > 0$ sont :

$(3,1); (4,1); (5,1); (6,1); (3,2); (6,4); (5,5); (6,5); (5,6); (6,6)$

L'univers des possibles étant 36 la probabilité pour que l'équation admette deux solutions

distinctes est $P_1 = \frac{17}{36}$

Les couples pour lesquels l'équation admette une solution double pour $\Delta = 0$ c'est-à-dire

$a^2 - 4b = 0$ ce sont : $(2,1)$ et $(4,4)$ la probabilité pour laquelle l'équation admette une solution

double est $P_2 = \frac{2}{36}$

Les couples pour que l'équation admet pas de solution sont :

$(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); (4,5); (4,6)$

la probabilité est $P_3 = \frac{17}{36}$

On vérifie que la somme des probabilités calculées $P_1 + P_2 + P_3 = 1$

