

A) Dénombrement

- 1) **Ensemble fini** : Un ensemble est dit fini lorsqu'on peut connaître le nombre d'éléments de cet ensemble.

On appelle cardinal d'un ensemble le nombre d'éléments de cet ensemble.

Exemple : Soit E un ensemble à n éléments alors $\text{Card}(E) = n$.

$$\text{Card } \emptyset = 0$$

Soit A une partie de E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartient pas à A est appelé le complémentaire de A dans E noté

$$C_E^A = \bar{A} = \{x \in E ; x \notin A\}$$

- ✧ Si $A \cap B = \emptyset$, alors A et B sont disjoints.
- ✧ Une famille de sous-ensembles de E deux à deux disjoints dont la réunion donne E est une partition de E.

Propriété : Etant donné deux sous-ensemble A et B de l'ensemble E, on a :

$$\star \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

$$\star \bar{A} \cap A = \emptyset \text{ et } \bar{A} \cup A = E \text{ (c'est-à-dire } \bar{A} \text{ et } A \text{ forment une partition de E)}$$

$$\star A \cap B = A \cup B ; A \cup B = A \cap B ; \text{card}(P(E)) = 2^{\text{card}(E)}$$

- 2) **Produit cartésien** : Soit A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien de A et B l'ensemble des couples (a ; b) tels que $a \in A$ et $b \in B$. Cet ensemble est noté $A \times B$; on lit « A croix B ».

Propriété : pour tous ensemble fini A et B, on a :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}A \times \text{Card}B$$

Exemple : Un damier comporte 10 lignes et 10 colonnes.

Le nombre de case est $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}E \times \text{Card}F = 10 \times 10 = 100$

- 3) **P – uplet d'un ensemble** : Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul. On appelle p – uplet de E tout élément de E^p

Exemples :

- (5 ; 2) ; (8 ; 8) ; (2 ; 5) sont des couples de $\mathbb{N}^2$

- $(0;0;1) ; (1;1;0) ; (0;0;0) ; (1;1;1)$ sont des triplets de l'ensemble $\{0;1\}$

- $(P;F;F;F;P;P;P;P;F;P)$ est un dix – uplet de l'ensemble $\{P;F\}$; il correspond, par exemple, à un résultat de lancés consécutifs d'une pièce de monnaie (pile ou face).

Propriétés :

- Le nombre de p – uplets d'un ensemble à n éléments est n^p

- Le nombre d'application d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est n^p .

Exemple 1 : Soit $E = \{1;2;3;4;5\}$.

Le nombre de triplets de E est $5^3 = 125$. Autrement, dit il existe 125 nombres de trois chiffres distincts ou non écrits avec les éléments de E .

4) Arrangements : Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que $p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E , tout p – uplet d'éléments de E deux à deux distincts. Il est noté A_n^p .

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)$$

$$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 ; \quad A_7^1 = 7 ; \quad A_{12}^5 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$$

Notation factorielle : Pour tout entier naturel n , $n! = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$

Par convention $0! = 1$

Exemple : $1! = 1$; $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Propriété : Soit n et p deux nombres naturels non nuls tels que $p \leq n$. On a

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

5) Permutations : Soit E un ensemble à n éléments. On appelle permutations de E tout arrangement des n éléments de E . On déduit de la propriété précédente que le nombre de permutation de E est $n!$

Exemple 1 : On se propose de déterminer le nombre de façons de disposer 5 drapeaux de 5 pays différents sur 5 mâts prévus à cet effet.

Il y a autant de façons de placer les drapeaux que de permutations de 5 drapeaux ; donc $5!$ c'est-à-dire 120 façons.

Exemple 2 : On appelle anagramme d'un mot, tout mot formé avec les lettres qui le composent (par exemple, LACE, ECAL sont des anagrammes de CALE)

Déterminer le nombre d'anagramme du mot AFRIQUE.

Tout arrangement des 7 lettres distinctes formant le mot AFRIQUE est un arrangement de ce mot. Il en existe donc $7! = 5040$

6) Combinaisons :

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel tel que $P \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E , tout sous ensemble de E ayant p éléments.

Propriété : le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté C_n^p , est tel que

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple 1 : On désire sélectionner 6 joueurs parmi les 15 membres d'un club pour constituer une équipe de volley – ball. Déterminer le nombre de sélections différentes que l'on peut former.

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{6! \times 9!} = 5005$$

Exemple 2 : Une assemblée de 12 personnes se comporte de 5 hommes et 7 femmes. Les membres de cette assemblée se proposent de désigner un comité de 6 personnes. De combien de façon peut-on constituer un comité comprenant

1°) seulement deux hommes ?

2°) au moins une femme ?

B) Probabilité

1) Probabilité d'un évènement :

1) Définition : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Une probabilité sur l'univers Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0; 1]$, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel $P(A)$ appelé probabilité de l'évènement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent ;
- La probabilité de l'évènement certain est 1
- La probabilité de l'évènement impossible est 0

Propriété : Soit Ω l'univers (ou l'évènement certain), A et B deux évènements élémentaires de Ω . On a : $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$; $P(A) + P(B) = 1$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) ;$$

Si A et B sont disjoints alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) ; \bar{A} \text{ est l'évènement contraire de } A$$

2) Equiprobabilité :

- Lorsque les évènements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité.
- Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme : « dé parfait », « dé non pipé », « pièce parfaite », « boules indiscernables au toucher », « cartes bien battues », « tirage au hasard » ...

Propriété : Soit P une probabilité définie sur un univers Ω . Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout évènement A on a :

$$P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$$

Remarque : Les éventualités de A sont appelées cas favorables et celle de Ω cas possibles. On écrit souvent

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple : On jette un dé ordinaire non piqué. Soit Ω l'ensemble des résultats possible s tel que : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ω est appelé univers ou population.

- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6 ?

II) Probabilité conditionnelle, évènements indépendants :

1) Définitions :

- Soit A et B deux évènements de probabilités non nulles tels que $A \cap B = \emptyset$. La probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de A sachant B.

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Deux évènements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas celle de l'autre. On a :

$$\begin{cases} P_B(A) = P(A) \\ P_A(B) = P(B) \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- 2) Variable aléatoire :** On appelle variable aléatoire X sur un univers Ω toute application de Ω vers $\mathbb{R}$. L'ensemble des valeurs prises par X, noté $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et s'appelle l'univers image de Ω par X.

$(X = x_i)$ désigne l'évènement « X prend la valeur x_i ».

$(X < \alpha)$ désigne l'évènement « X prend une valeur strictement inférieure à α ».

3) Loi de probabilité d'une variable aléatoire X

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire x la fonction :

$P : x \mapsto P(X = x)$ qui à toute valeur image si associe la probabilité $P_i = P(X = x_i)$.

N.B : Une loi de probabilité se présente sous forme d'un tableau de valeurs

x_i	x_1	x_2	x_3		x_n
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	P_3		P_n

Avec $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$

4) Fonction de répartition d'une variable aléatoire X

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire x, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto P(X \leq x)$$

N.B : Si $x_i \leq X < x_{i+1}$, alors $F(X) = P_1 + P_2 + \dots + P_i$.

En particulier : $F(X) = 0$ pour $X < x_1$; $F(X) = 1$ pour $X > x_n$

La fonction F est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1

III) Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire :

- 1) Espérance mathématique X :** On appelle espérance mathématique de X, le

$$\text{nombre } \bar{X} = E(x) \text{ tel que : } \bar{X} = E(X) = \sum_{i=1}^n P_i x_i = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n$$

- 2) Variance :** On appelle variance de x le nombre réel positif noté $V(X)$ et défini

i par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n P_i (X_i - E(X))^2 = P_1(x_1 - E(x))^2 + P_2(x_2 - E(x))^2 + \dots + P_n(x_n - E(x))^2$$

$$\text{Ou } V(X) = E[(X - E(X))^2] \quad \text{ou} \quad V(X) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$\text{Ou } V(x) = (P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + \dots + P_n x_n^2) - (E(x))^2$$

3) Ecart – type : On appelle écart-type la racine carrée de la variance. On la note σ tel que $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

Exemple 1 : une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément de l'urne 3 boules et l'on considère la variable aléatoire X définie par « nombre de boules noires parmi les boules tirées »

- Quelles sont les valeurs prise par X ?
- Déterminer la loi de probabilité de X.
- Calculer l'espérance mathématique, la variance, l'écart – type de X.

4) Epreuve de Bernoulli :

On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve ne conduisant qu'à deux éventualités. L'une de ces deux éventualités est appelée succès avec pour probabilité p et l'autre échec avec pour probabilité $q = 1 - p$.

5) Loi binomiale :

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Soit P la probabilité du succès et $q = 1 - p$ celle de l'échec. Soit x la variable aléatoire désignant le nombre de succès. La probabilité d'avoir exactement k succès est :

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Exemple 2 : Soit le tableau ci – dessous donnant la loi de probabilité de fabrication de voiture d'une société

X	0	1	2
P(x = x _i)	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

- Calculer l'espérance mathématique
 - Calculer la variance puis en déduire l'écart – type
 - Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X de cette loi de probabilité puis faite sa représentation graphique.
- 6) Epreuve de Bernoulli :** on appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve ne conduisant qu'à deux éventualités. L'une de ces deux éventualités est appelée succès avec pour probabilité p et l'autre échec avec pour probabilité $q = 1 - p$.
- 7) Loi binomiale :** soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Soit P la probabilité du succès et $q = 1 - p$ celle de l'échec.

Soit x la variable aléatoire désignant le nombre de succès.

La probabilité d'avoir exactement k succès est : $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit le tableau ci – dessous donnant la loi de probabilité de fabrication de voiture d'une société

X	0	1	2
P(x = x _i)	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

- Calcule l'espérance mathématique
- Calcule la variance puis en déduire l'écart – type
- Donne la fonction de répartition de la variable aléatoire X de cette loi de probabilité puis faite sa représentation graphique.

Exercice 2 : on suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$. Une famille a 5 enfants.

Calcule la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

Solution 1 :

a) Espérance mathématique est :

$$E(x) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7} = 0,857 \Rightarrow E(x) = 0,857$$

b) La variance et l'écart – type

● **Variance :**

$$V(x) = 0^2 \times \frac{2}{7} + 1^2 \times \frac{4}{7} + 2^2 \times \frac{1}{7} - 0,857^2 = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - 0,857^2 \Rightarrow V(x) = 1,142 - 0,857^2 = 0,407$$

● L'écart – type : $\delta(x) = \sqrt{0,407} = 0,637$

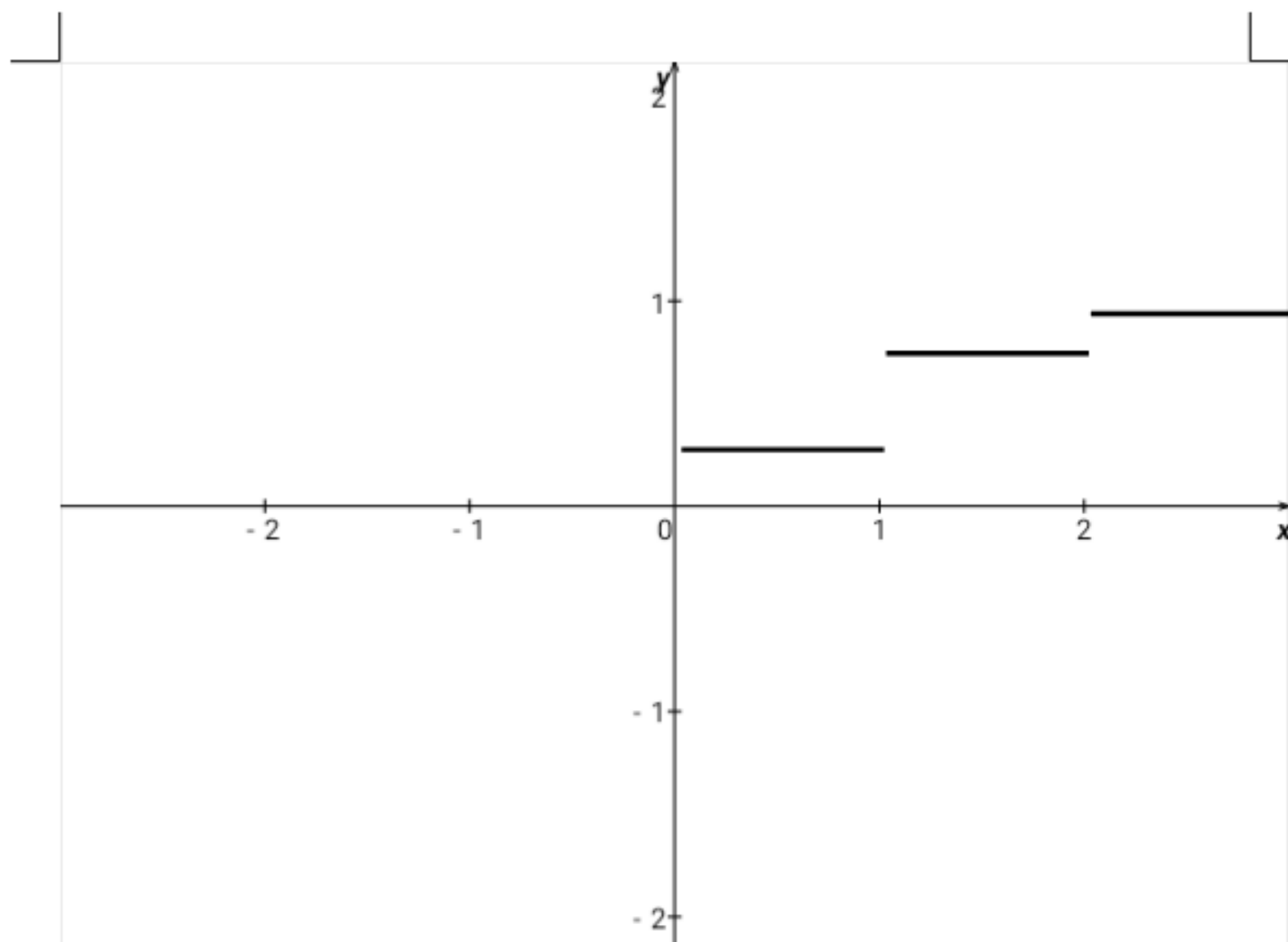
c) La fonction de répartition est :

$$P(x < 0) = 0 \quad \left| \quad P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$$

$$P(x \leq 0) = \frac{2}{7} \quad \left| \quad P(x \leq 2) = P(x = 2) + P(x = 1) + P(x = 0) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = 1$$

$$D'où \diamond F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{7} & \text{si } x \in [0;1] \\ \frac{6}{7} & \text{si } x \in [1;2] \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

La présentation graphique est définie par la figure suivante :



Solution 2 :

Avoir une naissance simple conduit à 2 éventualités : soit on a un garçon, soit on a une fille. C'est donc une épreuve de Bernoulli. On pourrait considérer l'épreuve « avoir un garçon » comme le succès de probabilité $p = \frac{1}{4}$ et l'épreuve « avoir une fille » comme l'échec de probabilité $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Cinq naissances successives constituent une succession de 5 épreuves de Bernoulli. Pour Calculer la probabilité d'avoir exacte

ment 3 garçons, on utilise alors la loi binomiale de paramètre 5 et $\frac{3}{4}$ tel que

$$p(x = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} = \frac{90}{1024} \Rightarrow p(x = 3) = \frac{45}{512} = 0,088$$

$$\Rightarrow p(x = 3) = 0,088$$

Alors la probabilité d'avoir exactement 3 garçons est $p(x = 3) = 0,088$.