

Dénombrement

1. Premiers outils pour dénombrer :

1.1. Le comptage :

Activité :

Soit $E = \{1,2,3,4\}$.

a°) Écrire tous les nombres de 3 chiffres distincts avec les éléments de E. Combien y en a-t-il ?

b°) Parmi ces nombres combien sont divisibles par 6, par 9.

Solution :

a°) On a 24 nombres.

b°) Les nombres divisibles par 6 sont ce qui sont divisible à la fois par 3 et par 2 :

(132, 312, 234, 324, 342, 432).

Les nombres divisibles par 9 ceux dont la somme des chiffres est divisible par 3 :

(234, 243, 342, 324, 432, 423)

1.2. Le diagramme

Activité :

Dans un groupe de 25 personnes 10 jouent aux basket-balls 17 jouent au football et 8 pratiquent ces deux autres sports. Déterminer le nombre de personnes qui jouent :

- qui joue seulement au football, seulement au basket-ball.
- qui ne pratique aucun de ces deux sports.

Solution :

- Les personnes qui jouent seulement au football sont : $17 - 8 = 9$
Les personnes qui jouent seulement au basketball sont : $10 - 8 = 2$
- Les personnes qui ne pratiquent aucun des deux sports sont :
 $25 - (9 + 8 + 2) = 25 - 19 = 6$

1.3. L'arbre des ensembles

Activité :

Soit $E = \{1,2,3,4\}$.

Démontrer qu'à l'aide de l'arbre des ensembles qu'il y a 24 nombres de 3 chiffres choisis parmi les éléments de l'ensemble E.

2. Complément sur les ensembles

2.1. Parties d'un ensemble

2.1.1. Ensembles des parties d'un ensemble

Activité :

Soit $E = \{a, b, c\}$ trouvez tous les ensembles possibles avec les éléments de E.

Solution :

$\{\{a, b, c\}; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a, b\}; \{b, c\}; \{a, c\}; \emptyset\}$ cet ensemble est appelé l'ensemble des parties de E et notée $\mathcal{P}(E)$.

$\mathcal{P}(E) = \{\{a, b, c\}; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a, b\}; \{b, c\}; \{a, c\}; \emptyset\}$

Définition

Soit E un ensemble fini, le nombre d'éléments de E est appelé **cardinal** de E et noté **card(E)**.

Exemple :

Soit $E = \{a, b, c\}$ alors $\text{card}(E) = 3$

Propriété :

Soit E un ensemble fini.

Si $\text{card}(E) = n$ alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Exemple :

Soit $E = \{a, b, c\}$ alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$

2.1.2. Partition d'un ensemble :

Activité :

Soit $E = \{a, b, c, d, e, f\}$; $A = \{a\}$; $B = \{b, c, f\}$; $D = \{d, e\}$.

a°) Déterminer le cardinal des ensembles E , A , B et D .

b°) Déterminer $A \cap B$, $A \cap D$, $D \cap B$.

c°) Déterminer $A \cup B \cup D$

Solution :

a°) $\text{card}(E) = 6$; $\text{card}(A) = 1$; $\text{card}(B) = 3$; $\text{card}(D) = 2$

b°) $A \cap B = \emptyset$, $A \cap D = \emptyset$, $D \cap B = \emptyset$.

c°) $A \cup B \cup D = \{a, b, c, d, e, f\}$ $A \cup B \cup D = E$

Définition :

Les parties d'un ensemble E forment une partition si et seulement si :

- elles sont non vides
- elles sont disjointes deux à deux.
- leur réunion est égale à E .

Exemple :

Soit $E = \{a, b, c, d, e, f\}$; $A = \{a\}$; $B = \{b, c, f\}$; $D = \{d, e\}$.

Les ensembles A , B et D forment une partition de E .

Propriété :

Soit E , A , B , C tels que $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$ et E fini.

Si A , B et C forment une partition de E alors : $\text{card}(E) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C)$

Pour toutes parties A et B d'un ensemble E fini.

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

2.1.3. Produit cartésien

Soient $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$.

X	1	2
a	(a ; 1)	(a ; 2)
b	(b ; 1)	(b ; 2)
c	(c ; 1)	(c ; 2)

Propriété :

Si $\text{card}(A) = m$ et $\text{card}(B) = n$ alors $\text{card}(A \times B) = m \times n$

Exemple :

Soient $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$. Calculer $\text{card}(A \times B)$.

Solution :

$$\text{card}(A) = 3 ; \text{card}(B) = 2 ;$$

$$\text{card}(A \times B) = 3 \times 2 = 6$$

3. Problème de dénombrement

3.1. Nombre d'applications d'un ensemble E vers un ensemble F (Arrangement avec répétition)

Activité :

Soient $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2\}$.

Trouver le nombre d'application possible de E vers F.

Solution

Il y a 4 applications de E vers F on aura 2^2 applications de E vers F.

Activité :

Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$.

Trouver le nombre d'application possible de E vers F.

Solution

Il y a 8 applications de E vers F on aura 2^3 applications de E vers F.

Propriété :

Soient E et F deux ensembles si $\text{card}(E) = p$ et $\text{card}(F) = n$ alors le nombre d'applications de E vers F est n^p .

Exemple :

De combien de façon différente peut-on répartir 6 jetons dans 4 assiettes.

Solution :

On peut répartir les 6 jetons dans les 4 assiettes de 4^6 façons.

3.2. Nombre d'application injective :

Soient E et F deux ensembles tel que $\text{card}(E) = p$ et $\text{card}(F) = n$ ($p \leq n$).

Activité :

Trouver le nombre d'injections d'un ensemble $E = \{a, b\}$ vers un ensemble $F = \{1, 2, 3\}$.

Solution :

Il y a 6 applications injectives soit 3×2 applications injectives.

Le nombre d'applications injectives de E à p éléments vers F à n éléments ($p \leq n$) est :

$$n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-p+1)$$

Définition :

Soient E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$.

Le produit de n entiers consécutifs dont le plus grand est n est appelé arrangement de p éléments parmi n éléments et noté A_n^p (se lit A n p). $A_n^p = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-p+1)$.

Exemple :

Une classe de 40 élèves veut créer un bureau de 4 membres, 1 président, un vice-président, un secrétaire général et un trésorier. Combien de bureau peut-on constitué.

Solution :

On peut constituer : $A_{40}^4 = 40 \times 39 \times 38 \times 37 = 2193360$ bureaux.

3.3. Notation factoriel

Soit n un entier naturel non nul, factoriel n est noté $n!$ et $n! = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$ avec $0! = 1$.

Autre forme d'arrangement : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exemple :

a°) Calculer : A_3^2 , A_7^4 , A_n^2 , A_n^3 .

b°) Simplifier les expressions suivantes : $\frac{7!}{6!}$ $\frac{5!}{6!}$ $\frac{4!7!}{5!3!}$ $\frac{3.4!}{(3!)^2}$

3.4. Nombre de bijection (ou permutation)

Soient E et F deux ensembles tels que $\text{card}(E) = p$ et $\text{card}(F) = n$ avec $(p \leq n)$.

$A_n^p = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ donc le nombre de bijections est $n!$.

Exemple :

De combien de façon peut-on garer 5 voitures dans un parking de 5 places.

Solution :

Il y a $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ façon de garer les 5 voitures.

3.5. Nombre de parties de p éléments d'un ensemble à n éléments (nombre de combinaison)

Définition :

Une combinaison de p éléments dans un ensemble à n éléments est le nombre de façons de choisir p éléments parmi n éléments et on note : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple 1:

Quel est le nombre de façons de choisir 3 boules dans une urne contenant 10 boules.

Solution :

Il y a $C_{10}^3 = 120$ façons de choisir 3 boules dans une urne contenant 10 boules.

Exemple 2 :

Calculer : C_n^{n-p} C_n^0 C_n^1 C_n^n C_n^{n-1}

3.6. Nombre de permutation avec répétition :

Soit une association de n objets, a, b et c dans la quelle a est répété α fois, b , β fois et c γ fois. Le nombre de permutation avec répétition est : $N = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!}$

Exemple :

Quel est le nombre de mot que l'on peut former avec les lettres du mot «banane »

Solution :

Le nombre de mot est : $N = \frac{6!}{1!2!2!1!} = 180$

Exercice :

Exercice 1:

Répondez par Vrai ou Faux. (*Le mieux sera de vérifier le résultat avant de l'affirmer*)

Un digicode comporte 9 chiffres (de 1 à 9) et 4 lettres (A à D). Il est placé à l'entrée d'un immeuble. Pour ouvrir il faut composer un code formé de trois chiffres suivi de deux lettres les chiffres sont nécessairement distincts les lettres non.

Le nombre de codes :

a) possibles est : 8064

b) composés de 2 lettres identiques est : 4032

c) composés de 3 chiffres de même parité : 768

d) composés de 3 chiffres impairs et de 2 lettres distinctes est : 720

Exercice 2 :

Un sondage auprès de 150 personnes a donné les résultats suivants :

A la question «Consommez-vous régulièrement du café ?», 50 personnes répondent oui.

A la question «Êtes-vous amateur de thé ?», 80 personnes répondent oui.

A la question «Êtes-vous un amateur de thé consommant régulièrement du café ?», 35 personnes répondent oui.

Représenter ces données par un diagramme.

Combien de personnes sont des amateurs de thé ne consommant pas régulièrement du café ?

Combien de personnes consomment régulièrement du café et ne sont pas amateurs de thé ?

Combien de personnes ne sont pas amateurs de thé et ne consomment pas régulièrement du café ?

Combien de personnes sont amateurs de thé ou consomment régulièrement du café ?

Exercice 3 :

Pour remplir une grille de loto, il faut cocher 6 cases sur 49. Sachant que l'on met 10 secondes pour remplir une grille, combien de temps faudrait-il pour remplir toutes les grilles différentes possibles.