

Exercices corrigés - Dénombrements (pratiques)

Dénombrements - cardinaux

Exercice 1 ★ - Groupe d'étudiants [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

A leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand. Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

Indication ▼

Réaliser un tableau à double entrée.

Corrigé ▼

Ce genre d'exercices se traite très facilement en utilisant un tableau à double entrée dans lequel on inscrit les informations à notre disposition :

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3		
Allemand			6	16
Total	12		15	

On complète alors le tableau de proche en proche de sorte d'obtenir les bons totaux sur chaque ligne et chaque colonne. Par exemple, sur la première ligne de la colonne "Chimie", on peut facilement inscrire le chiffre 9. On obtient donc

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3	9	20
Allemand	4	6	6	16
Total	12	9	15	36

Exercice 2 ★★★ - Dans une entreprise... [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées?

Indication ▼

Donner un nom à chacun des ensembles de base, et exprimer les autres en fonction de ceux-ci.

Corrigé ▼

Notons E, H, M et S les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués. L'énoncé donne :

$$\text{card}(E) = 800, \text{card}(H) = 300, \text{card}(S) = 352, \text{card}(M) = 424,$$

$$\text{card}(H \cap S) = 188, \text{card}(H \cap M) = 166, \text{card}(S \cap M) = 208, \text{card}(H \cap M \cap S) = 144.$$

On cherche $\text{card}(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S})$, où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E. D'après les lois de Morgan :

$$\text{card}(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}) = \text{card}(\overline{H \cup M \cup S}).$$

On applique la formule du crible de Poincaré :

$$\text{card}(H \cup M \cup S) = \text{card}(H) + \text{card}(M) + \text{card}(S) - \text{card}(H \cap M) - \text{card}(H \cap S) - \text{card}(M \cap S) + \text{card}(H \cap M \cap S).$$

On en déduit :

$$\text{card}(H \cup M \cup S) = 658,$$

et

$$\text{card}(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}) = 800 - 658 = 142.$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées.

Dénombrements - listes, arrangements, combinaisons, et variations

Exercice 3 ★ - Triangles [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

On trace dans un plan $n \geq 3$ droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé?

Indication ▼

Comment définir un triangle?

Corrigé ▼

Un triangle est déterminé par 3 droites (ses côtés). Il y a autant de triangles que de possibilités de choisir 3 droites parmi n , c'est-à-dire $\binom{n}{3}$.

Exercice 4 ★ - Podium! [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

Combien y-a-t-il de podiums possibles?
Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier?
Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie?
On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun.
Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles?

Indication ▼

Corrigé ▼

Pour le premier, on a 20 choix possibles, pour le second 19, pour le troisième 18. Le nombre de podiums possibles est donc égal à $20 \times 19 \times 18 = 6840$.
Le premier concurrent est Emile. Pour les autres places, il y a 19 puis 18 choix possibles; Le nombre de podiums ainsi constitués est de 19×18 .
Il y a trois choix possibles pour la place d'Emile. Une fois ce choix fixé, il y a 19 choix possibles pour la première des deux autres places, puis 18 choix possibles pour la seconde des deux autres places. Le nombre de podiums vérifiant ces conditions est donc de $3 \times 19 \times 18$.
L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi 20, c'est-à-dire $\binom{20}{3} = 1140$.

Exercice 5 ★ - Les boulangeries [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire?
Reprendre la même question si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.
Reprendre la même question si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

Indication ▼

On dénombre une liste.
On dénombre un arrangement.
Procéder par différence.

Corrigé ▼

Pour chaque boulangerie, il y a 7 choix possibles. Il y a donc 7^4 façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie.

On peut procéder comme suit pour dénombrer le nombre de possibilités. La première boulangerie peut fermer n'importe quel jour de la semaine, ce qui lui laisse 7 choix. La seconde boulangerie peut fermer n'importe quel autre jour : 6 choix. La troisième ne peut pas fermer l'un des jours déjà choisis, ce qui lui laisse 5 choix, et pour la dernière, il ne reste que 4 choix. Le nombre de possibilités est donc $7 \times 6 \times 5 \times 4$.

On va raisonner par différence, et compter plutôt le nombre de possibilités pour que toutes les boulangeries ferment le même jour : il y a 7 choix (on choisit juste le jour de fermeture commun). Le nombre de possibilités pour qu'il y ait au moins une boulangerie ouverte chaque jour est donc $7^4 - 7$.

Exercice 6 ★ - Autour d'une table [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien y-a-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables?

Indication ▼

Choisir les trois personnes qui vont sur la petite table, puis disposer les personnes sur chaque table.

Corrigé ▼

On commence par choisir les personnes qui vont s'installer autour de la première table. Il y a $\binom{7}{3}$ possibilités. Ensuite, les 3 personnes qui sont autour de la première table peuvent choisir librement leur place. Il y a $3!$ choix (autant que de permutations des 3 chaises). De même, il y a $4!$ choix pour les personnes qui s'installent autour de la deuxième table. Le nombre total de possibilités est donc $\binom{7}{3} \times 3! \times 4! = 7!$.

Le fait de trouver $7!$ montre que le dénombrement que nous avons fait, qui suit les données de l'énoncé, peut être simplifié. En effet, le fait d'imposer deux tables ne change en réalité rien au problème : on doit placer 7 personnes sur 7 chaises, et il y a $7!$ façons différentes de le faire.

Exercice 7 ★ - Addition, multiplication et combinaison [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Une entreprise comporte 18 employés, dont 8 femmes. Pour un sondage, on choisit 3 personnes au hasard. Quel est le nombre d'échantillons comportant au moins 2 hommes?

Indication ▼

Compter le nombre d'échantillons comportant exactement 3 hommes et le nombre d'échantillons comportant exactement 2 hommes.

Corrigé ▼

On commence par compter le nombre d'échantillons comportant exactement 3 hommes. On choisit 3 hommes parmi 10. Il y a donc $\binom{10}{3} = 120$ tels échantillons. On compte ensuite le nombre d'échantillons comportant exactement 2 hommes. On choisit 2 hommes parmi 10, puis une femme parmi 8. Il y a donc $\binom{10}{2} \times \binom{8}{1} = 360$ tels échantillons. Finalement, il y a $120 + 360 = 480$ échantillons comportant au moins deux hommes.

Exercice 8 - Le cadenas [\[Signaler une erreur\]](#) [\[Ajouter à ma feuille d'exos\]](#)

Enoncé ▼

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

- Combien y-a-t-il de codes possibles?
- Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair?
- Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?
- Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?

Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

- Combien y-a-t-il de codes possibles?
- Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair?
- Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

Indication ▼

Corrigé ▼

Il y a $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$ codes possibles.

Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc $9 \times 9 \times 4$ tels codes.

On va compter par différence. Il y a $8 \times 8 \times 8$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 217$ codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.

Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3 \times 8 \times 8$ tels codes.

On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9 \times 8 \times 7$ choix possibles.

Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8 \times 7 \times 5$ tels codes.

Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de $8 \times 7 \times 3$.

Exercice 9 - Les hélicoptères [\[Signaler une erreur\]](#) [\[Ajouter à ma feuille d'exos\]](#)

Enoncé ▼

On dispose de 4 hélicoptères de tourisme, de 4 pilotes et de 8 hôtesses de l'air. Combien de façons différentes y a-t-il d'attribuer les pilotes et hôtesses de l'air aux hélicoptères de manière que chaque hélicoptère ait un pilote et deux hôtesses de l'air ?

Indication ▼

Choisir d'abord les hôtesses et le pilote du premier hélicoptère, puis les hôtesses et le pilote du deuxième hélicoptère, etc...

Corrigé ▼

On fait les choix successifs suivants :

- on choisit 2 hôtesses parmi 8 et un pilote parmi 4 pour le premier hélicoptère. Il y a donc $\binom{8}{2} \times 4 = 28 \times 4 = 112$ tels choix.
- pour le deuxième hélicoptère, on choisit 2 hôtesses parmi les 6 restantes, puis un pilote parmi les 3 restants. Il y a donc $\binom{6}{2} \times 3 = 15 \times 3 = 45$ tels choix.

- pour le troisième hélicoptère, on choisit 2 hôtesse parmi les 4 restantes, puis un pilote parmi les 2 restants. Il y a donc $\binom{4}{2} \times 2 = 6 \times 2 = 12$ tels choix.
- pour le dernier hélicoptère, on n'a plus de choix à faire : on lui affecte les deux dernières hôtesse et le dernier pilote.

Le nombre total de choix est donc $112 \times 45 \times 12 = 60480$.

Exercice 10 ★★ - Comité de joueurs [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Fred et Émile font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

Combien y-a-t-il de comités possibles?

Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille?

Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons?

On veut que Fred et Émile soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles?

On ne veut pas que Fred et Émile soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles?

Indication ▼

Corrigé ▼

Il s'agit de choisir trois joueurs parmi 8. Le nombre de comités possibles est donc de $\binom{8}{3} = 56$.

Il s'agit de choisir deux garçons parmi 6, puis une fille parmi 2. Le nombre de choix possibles est donc de $\binom{6}{2} \times \binom{2}{1}$.

On compte le nombre de comités comprenant 3 garçons : il vaut $\binom{6}{3}$ (il faut choisir trois garçons parmi 6). On a déjà compté le nombre de comités comprenant exactement deux garçons. Donc le nombre de comités comprenant au moins deux garçons vaut $\binom{6}{2} \times \binom{2}{1} + \binom{6}{3}$.

Il ne reste qu'à choisir le dernier membre du comité : il y a 6 comités comprenant à la fois Fred et Émile.

On compte les comités comprenant Fred, mais pas Émile, et les comités comprenant Émile, mais pas Fred. Dans le premier cas, on trouve $\binom{6}{2}$ comités (il reste à choisir deux joueurs parmi 6, puisqu'on ne peut plus prendre ni Fred, ni Émile). Dans le second cas, on a aussi $\binom{6}{2}$ comités. On compte enfin les comités ne comprenant ni Fred, ni Émile. Il y en a $\binom{6}{3}$.

Finalement, le nombre total de comités ne comprenant pas simultanément Émile et Fred est $\binom{6}{2} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 50$. Plus simplement, on pouvait aussi soustraire du nombre total de comités (56, cf question 1) le nombre de comités comprenant à la fois Fred et Émile (6, cf question 4), et on retrouve bien 50 comités ne comprenant pas simultanément Fred et Émile.

Exercice 11 ★★ - Les trois mousquetaires [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Les trois mousquetaires (donc quatre personnes avec d'Artagnan), ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève en premier et prend deux bottes au hasard.

Combien de possibilités s'offrent à lui?

Combien de choix a-t-il tels que les deux bottes forment une paire (une droite et une gauche quelconques)?

Combien de choix a-t-il tels que les deux bottes appartiennent à deux personnes différentes?

Indication ▼

Compter par différence en cherchant le nombre de choix pour que les deux bottes appartiennent à la même personne.

Corrigé ▼

Il y a $\binom{8}{2}$ choix possibles (il s'agit de choisir deux éléments parmi 8).

Il y a $\binom{4}{1}$ choix possibles pour une botte gauche et $\binom{4}{1}$ choix possibles pour une botte droite.

Le nombre total de choix formant une paire est donc $\binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$.

Il y a de nombreuses façons de répondre à cette question mais la plus simple est de raisonner par différence. Il y a en effet 4 choix pour que les deux bottes choisies appartiennent à la même personne. Comme il y a d'après la première question 28 choix possible de deux bottes, il y a $28 - 4 = 24$ choix possibles de sorte que les deux bottes appartiennent à deux personnes différentes.

Exercice 12 ★★ - Chaussures dans mon armoire [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Dans mon armoire, il y a 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et 2 paires de chaussures blanches. Je peux distinguer toutes ces chaussures les unes des autres. Un matin, mal réveillé, je choisis deux chaussures au hasard.

Combien y-a-t-il de choix possibles ?

Combien y-a-t-il de choix où j'obtiens deux chaussures de même couleur ?

Combien de choix amènent un pied gauche et un pied droit ?

Combien de choix amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de même couleur ?

Combien de choix amènent à deux chaussures qui ne sont pas de la même paire?

Indication ▼

On choisit deux chaussures parmi 20.

Commencer par compter le nombre de choix qui amènent deux chaussures noires.

Combien de choix pour choisir une chaussure pied gauche? pied droit? Faire un arbre...

Commencer par compter le nombre de choix qui amènent une chaussure droite et une chaussure gauche qui sont toutes les deux noires.

Dénombrer le complémentaire.

Corrigé ▼

Les chaussures étant discernables, j'ai choisi 2 chaussures parmi les 20 de mon armoire. Il y a donc $\binom{20}{2} = 190$ choix possibles.

Notons E les tirages qui m'amènent à des chaussures de même couleur, et E_N , E_M , E_B les tirages qui m'amènent à deux chaussures noires (resp. marron, resp. blanches). Alors $E = E_N \cup E_M \cup E_B$ et cette réunion est disjointe. On a donc

$$\text{card}(E) = \text{card}(E_N) + \text{card}(E_M) + \text{card}(E_B).$$

Or, $\text{card}(E_N) = \binom{10}{2}$, puisque je peux choisir 2 chaussures parmi 10. Finalement,

$$\text{card}(E) = \binom{10}{2} + \binom{6}{2} + \binom{4}{2} = 66.$$

Il y a 10 choix possibles pour la chaussure droite. Une fois ce choix réalisé, il y a 10 choix possibles pour la chaussure gauche. Au total, il y a $10 \times 10 = 100$ choix possibles.

Notons A les tirages qui amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de la même couleur. Comme précédemment, on va décomposer A en $A_N \cup A_M \cup A_B$, où A_N est l'ensemble des tirages amenant une chaussure droite noire et une chaussure gauche noire.

On a $\text{card}(A_N) = 5^2$ (5 choix pour la chaussure droite, 5 choix pour la chaussure gauche) et finalement

$$\text{card}(A) = 5^2 + 3^2 + 2^2 = 38.$$

On compte d'abord le nombre de choix de deux chaussures qui amènent la même paire : il y en a 10 (autant que de paires de chaussures). Par différence, le nombre de choix qui amènent à deux chaussures qui ne sont pas de la même paire est $\binom{20}{2} - 10 = 180$.

Exercice 13 ★★ - Nombres et chiffres [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun "1". Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

- A .
- A_1 , ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents.
- A_2 , ensemble des nombres pairs de A .
- A_3 , ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

Indication ▼

Il faut mettre à part le premier chiffre (différent de 0), puis

- Décrire les éléments de A en terme de 7 – liste.
- Décrire les éléments de A_1 en terme d'applications injectives.
- Séparer le traitement du chiffre des unités et le traitement des chiffres précédents.
- Combien y-a-t-il de façons de choisir 7 chiffres distincts parmi 9?

Corrigé ►

Exercice 14 ★★ - Anagrammes [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.

Indication ►

Corrigé ▼

Une anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot! On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombre de permutations entre lettres identiques. On trouve donc :

- MATHS : $5!$
- RIRE : $4!/2!$
- ANANAS : $6!/(2!3!)$

Pour compter les anagrammes d'ANANAS, on peut aussi :

- choisir la position des 3 lettres A : il y a $\binom{6}{3}$ choix possibles;
- choisir la position des 2 lettres N : il y a $\binom{3}{2}$ choix possibles (il reste 3 places une fois qu'on a placé les A);
- le S est alors placé.

Le nombre d'anagrammes d'ANANAS est donc

$$\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 3!}.$$

Exercice 15 ★★ - Des tours sur un échiquier [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

De combien de façons différentes peut-on placer p tours sur un échiquier de taille n de façon à ce qu'elles ne puissent pas se prendre?

Indication ▼

Commencer par choisir les lignes où sont les tours.

Corrigé ▼

Les p tours doivent être sur des lignes différentes. On commence par choisir les p lignes où sont les tours. Il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles. Une fois ces lignes choisies, on choisit les colonnes où sont les tours. Pour la tour située sur la première ligne, on a n choix, pour la tour située sur la deuxième ligne, on a $n - 1$ choix, et ainsi de suite jusqu'à la p -ième ligne où on a $n - p + 1$ choix. On obtient $n(n - 1) \dots (n - p + 1)$ choix. Finalement, le nombre total de façons différentes dont l'on peut placer les tours sans qu'elles puissent se prendre est égal à $\binom{n}{p} \times n(n - 1) \dots (n - p + 1)$.

Exercice 16 ★ - Le tournoi de tennis [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]**Enoncé ▼**

Un tournoi de tennis comporte $2n$ joueurs. De combien de façons peut-on organiser le premier tour dans le cas où :

- on s'intéresse à la fois aux joueurs qui sont opposés et à l'ordre des matches ;
- on ne s'intéresse qu'à la connaissance des joueurs opposés.

Indication ▼

Choisir les deux premiers joueurs, puis les deux suivants, etc...

Corrigé ▼

On choisit d'abord 2 joueurs parmi les $2n$ joueurs pour le match 1, puis 2 joueurs parmi les $2n - 2$ joueurs restants pour le match 2, et ainsi de suite. Le nombre de façons d'organiser le premier tour, en tenant compte de l'ordre des matches, est donc

$$\binom{2n}{2} \times \binom{2n-2}{2} \times \dots \times \binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}.$$

Si l'ordre des matches n'est plus pris en compte, alors il faut diviser en plus par le nombre de permutations possibles des matches, c'est-à-dire $n!$. Le nombre de façons d'organiser le premier tour, sans tenir compte de l'ordre des matches, est donc $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$.

Exercice 17 ★★ - Dénombrement de tirages successifs et simultanés, avec ou sans remise [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]**Enoncé ▼**

Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.

- On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré. Donner le nombre de résultats possibles.
- Combien de ces résultats amènent
 - exactement 1 jeton noir ?
 - au moins 1 jeton noir ?
 - au plus un jeton noir ?
 - 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?
- Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.
- Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.

On est dans un cas où l'ordre et la répétition interviennent puisque les jetons sont tirés successivement et avec remise. A chaque tirage, on a 13 choix possibles, et donc on obtient 13^6 résultats possibles (on a dénombré des listes).

Pour obtenir exactement un jeton noir, on doit choisir à quel tirage on va tirer le jeton noir (6 choix possibles). Ensuite pour chaque choix de numéro de tirage, on a 8 choix possibles de jetons noirs et pour les 5 autres tirages, on a 5 possibilités à chaque fois puisqu'il y a 5 jetons blancs. Ainsi, on obtient : $6 \times 8 \times 5^5$ résultats possibles.

On va dénombrer l'ensemble complémentaire. En effet, il y a exactement 5^6 tirages sans jeton noir (à chaque fois, on a tiré un jeton blanc). Il y a donc $13^6 - 5^6$ tirages avec au moins un jeton noir.

On a déjà dénombré les tirages avec exactement un jeton noir et les tirages sans jeton noir. L'ensemble recherché étant l'union disjointe des ensembles précédents, il y a $6 \times 8 \times 5^5 + 5^6$ tirages amenant au plus un jeton noir.

Si on a deux fois plus de jetons noirs que de jetons blancs, c'est qu'on a tiré 4 jetons noirs et 2 jetons blancs. On commence par fixer les 2 tirages parmi 6 pour lesquels on a trouvé un jeton blanc : il y en a $\binom{6}{2}$. Ce choix fixé, il y a 5^2 choix pour les jetons blancs et 8^4 choix possibles pour les jetons noirs. On obtient au final $\binom{6}{2} \times 5^2 \times 8^4$ tirages amenant 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs.

Si on tire les jetons successivement et sans remise, l'ordre intervient mais il n'y a plus de répétition. On dénombre des arrangements et il y a $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 13!/7!$ tirages possibles.

Pour obtenir exactement un jeton noir, on doit choisir à quel tirage on va tirer le jeton noir (6 choix possibles). Ensuite pour chaque choix de numéro de tirage, on a 8 choix possibles de jetons noirs et pour les 5 autres tirages, on doit choisir 5 jetons parmi 5 sans remise mais avec ordre : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$. Ainsi, on obtient $6 \times 8 \times 5!$ résultats possibles.

On remarque qu'il n'y a aucun tirage sans jeton noir, puisque l'on fait 6 tirages, sans remise, et qu'il n'y a que 5 jetons blancs. Le nombre de tirages avec au moins un jeton noir est égal au nombre total de tirages, soit $13!/7!$.

Comme il n'y a aucun tirage sans jeton noir, le nombre de tirages avec au plus un jeton noir est égal au nombre de tirages avec exactement un jeton noir, soit $6 \times 8 \times 5!$ résultats possibles.

Comme précédemment, on tire 2 jetons blancs et 4 jetons noirs. On commence par fixer la place des 2 jetons blancs parmi les 6 tirages, il y a $\binom{6}{2}$ choix. Puis il y a 5×4 choix pour les jetons blancs et $8 \times 7 \times 6 \times 5$ choix possibles pour les jetons noirs. Finalement, on obtient $\binom{6}{2} \times 5 \times 4 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ choix possibles.

On est dans le cas où ni l'ordre ni la répétition n'interviennent, on dénombre donc des combinaisons. Il y a donc $\binom{13}{6}$ résultats possibles.

On tire forcément tous les jetons blancs et un jeton noir parmi les 8 : il y a donc 8 tirages possibles.

On remarque qu'il n'y a aucun tirage sans jeton noir, puisque l'on fait 6 tirages, sans remise, et qu'il n'y a que 5 jetons blancs. Le nombre de tirages avec au moins un jeton noir est égal au nombre total de tirages, soit $\binom{13}{6}$.

Comme il n'y a aucun tirage sans jeton noir, le nombre de tirages avec au plus un jeton noir est égal au nombre de tirages avec exactement un jeton noir, soit 8 résultats possibles.

On doit tirer 2 jetons blancs parmi 5 et 4 jetons noirs parmi 8. Le nombre de tirages recherché est donc $\binom{5}{2} \times \binom{8}{4}$.

Exercice 18 ★★ - Bridge [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Dans cet exercice, on attend des réponses qui ne sont pas des valeurs numériques, mais des expressions en termes de factorielles, sous la forme la plus simple possible.

Combien y-a-t-il de façons de répartir les 52 cartes d'un jeu entre 4 joueurs N, S, E, O, chacun possédant 13 cartes.

Parmi ces façons, combien y-en-a-t-il qui sont telles que chaque joueur n'a qu'une seule couleur (par exemple, N a les 13 piques, S a les 13 coeurs,...)?

Combien y-a-t-il de façons que deux joueurs quelconques aient chacun une seule couleur?

Combien y-a-t-il de façons que deux partenaires, c'est-à-dire (N,S) ou (E,O), aient chacun une seule couleur, les deux autres partenaires ayant des cartes quelconques.

Indication ▼

Compter le nombre de choix possibles pour le premier joueur, puis pour le deuxième...

Choisir une couleur parmi 4 pour N, puis une couleur parmi...

Choisir d'abord les deux joueurs qui ont une seule couleur, puis choisir pour chaque joueur la couleur.

Raisonnement de la même façon.

Corrigé ▼

Il y a $\binom{52}{13}$ choix possibles pour le premier joueur, puis $\binom{52-13}{13} = \binom{39}{13}$ choix possibles pour le deuxième joueur, et encore $\binom{39-13}{13} = \binom{26}{13}$ pour le troisième. Le dernier joueur prend les 13 cartes restantes. Au total on trouve

$$\binom{52}{13} \times \binom{39}{13} \times \binom{26}{13} = \frac{52!}{39!13!} \times \frac{39!}{26!13!} \times \frac{26!}{13! \times 13!} = \frac{52!}{(13!)^4}.$$

On choisit une couleur parmi 4 pour le premier joueur, puis une couleur parmi 3 pour le deuxième et enfin une couleur parmi 2 pour le troisième. Cela fait $4!$ possibilités. On peut aussi argumenter à l'aide du nombre de permutation de 4 couleurs.

On commence par choisir les deux joueurs qui ont la même couleur. Il y a $\binom{4}{2}$ tels choix. On choisit ensuite une couleur parmi 4 pour le premier joueur, et une couleur parmi 3 pour le deuxième joueur. Il reste pour le 3ème joueur à choisir 13 cartes parmi les 26 restantes tandis que le quatrième prend le reste. On trouve donc :

$$\frac{4 \times 3}{2} \times 4 \times 3 \times \binom{26}{13} = \frac{72 \times (26)!}{(13!)^2}.$$

Mais ce faisant, on a compté trop les tirages où les 4 joueurs ont une seule couleur : en effet, un tel tirage est compté $\binom{4}{2}$ fois, puisqu'on a choisi deux joueurs qui avaient la même couleur et que cela n'a pas lieu d'être dans ce cas là puisque tous les joueurs ont la même couleur. Il faut donc retirer $(\binom{4}{2} - 1) 4!$ et le résultat final est :

$$\frac{4 \times 3}{2} \times 4 \times 3 \times \binom{26}{13} - (\binom{4}{2} - 1) 4! = \frac{72 \times (26)!}{(13!)^2} - 5 \times 4!.$$

Le dénombrement à réaliser est très similaire, mais il y a moins de choix pour choisir les deux joueurs qui ont la même couleur puisqu'on ne choisit plus deux joueurs quelconques, mais deux partenaires. Il n'y a donc que 2 choix au lieu de $\binom{4}{2}$. Finalement, on trouve

$$\frac{24 \times (26)!}{(13!)^2} - 4!.$$

Exercice 19 ★★★★★ - Le poker [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Une main au poker est formée de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes.

Traditionnellement, trèfle, carreau, coeur, pique sont appelées couleurs et les valeurs des cartes

sont rangées dans l'ordre : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, de la plus forte à la plus faible. Dénombrer les mains suivantes :

quinte flush : main formée de 5 cartes consécutives de la même couleur (Attention! la suite as, 2, 3, 4 et 5 est une quinte flush).

carré : main contenant 4 cartes de la même valeur (4 as par exemple).

full : main formée de 3 cartes de la même valeur et de deux autres cartes de même valeur (par exemple, 3 as et 2 rois).

quinte : main formée de 5 cartes consécutives et qui ne sont pas toutes de la même couleur.

brelan : main comprenant 3 cartes de même valeur et qui n'est ni un carré, ni un full (par exemple, 3 as, 1 valet, 1 dix).

Indication ▼

On choisit la couleur puis la hauteur de la plus haute carte.

On choisit la hauteur, puis la dernière carte.

Choisir les deux hauteurs, puis 3 cartes parmi 4, et 2 cartes parmi 4.

Raisonner par différence en utilisant le résultat pour les quintes flush.

Raisonner par différence.

Corrigé ▼

Il y a 4 choix pour la couleur. La couleur choisie, il suffit de choisir la plus haute carte de la main : il s'agit de n'importe quelle carte entre le 5 et l'as. Il y a donc 10 choix possibles pour la hauteur de la plus haute carte, et donc $4 \times 10 = 40$ mains conduisant à une quinte flush.

Il y a 13 choix possibles pour la hauteur de la carte constituant le carré (carré d'as, carré de rois,...). Cette hauteur fixée, il faut encore choisir une carte parmi les 48 autres pour compléter la main. Il y a donc $13 \times 48 = 624$ mains contenant un carré.

On choisit d'abord la hauteur des 3 cartes de même valeur. Il y a 13 choix. On choisit alors ces 3 cartes de même valeur. Il y a $\binom{4}{3} = 4$ choix possibles. On choisit ensuite la hauteur des deux autres cartes. Il reste 12 choix. Puis on choisit ces 2 cartes de même valeur. Il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix. Finalement, le nombre de mains constituant un full est

$$13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744.$$

On va dénombrer d'abord le nombre de mains constituée de 5 cartes consécutives, qu'elles soient ou non de la même couleur. On retirera ensuite le nombre de quintes flush pour obtenir le nombre de mains constituées de 5 cartes qui ne sont pas toutes de la même couleur. Si on compte le nombre de mains constituées de 5 cartes consécutives, qu'elles soient ou non de la même couleur, alors on doit choisir la hauteur de la carte la plus haute. Comme précédemment, il y a 10 choix possibles. Ensuite, pour chacune des cinq hauteurs consécutives, on choisit l'une des 4 couleurs, ce qui fait 4^5 choix. Finalement, le nombre de mains correspondant est $10 \times 4^5 = 10240$ ce qui fait que le nombre de quintes est exactement $10240 - 40 = 10200$.

On compte le nombre de mains comprenant 3 cartes de même niveau et qui ne contient pas un carré : il y a 13 choix pour le niveau, $\binom{4}{3} = 4$ choix de 3 couleurs parmi 4 pour ce niveau. Puis, pour les deux autres cartes, il faut choisir deux cartes parmi 48 (on doit exclure la dernière carte de même hauteur, sinon on aurait un carré), soit $\binom{48}{2} = 48 \times 47/2 = 1128$ choix. Il y a donc $13 \times 4 \times 1128 = 58656$ mains contenant 3 cartes de même niveau, mais pas de carrés. Pour dénombrer le nombre de brelans, il faut retirer les fulls. Il y a donc $58656 - 3744 = 54912$ brelans.

Attention au raisonnement faux suivant : on pourrait compter le nombre de mains comprenant 3 cartes de même niveau : il y a 13 choix pour le niveau, $\binom{4}{3} = 4$ choix de 3 couleurs parmi 4 pour ce niveau. Puis, pour les deux autres cartes, il faut choisir deux cartes parmi $52-3=49$, soit $\binom{49}{2} = 49 \times 48/2 = 1176$ choix. Il y a donc $13 \times 4 \times 1176 = 61152$ mains contenant 3 cartes de même niveau. Pour dénombrer le nombre de brelans, il faut retirer les carrés et les fulls. Il y a donc $61152 - 624 - 3744 = 56784$ brelans. Ce raisonnement est faux car quand on a compté le nombre de mains contenant 3 cartes de même niveau, on a compté 4 fois chaque carré. En effet, un carré d'as peut apparaître en choisissant d'abord as de coeur, de carreau, de trèfle, puis en complétant avec as de pique, ou en choisissant as de

coeur, de carreau, de pique, puis en complétant avec as de trèfle, etc... Si on veut réaliser un dénombrement correct avec cette méthode, il faut retirer quatre fois le nombre de carrés, et on a bien $61152 - 4 \times 624 - 3744 = 54912$.

Exercice 20 - Tirages dans un jeu de cartes [\[Signaler une erreur\]](#) [\[Ajouter à ma feuille d'exos\]](#)

Énoncé ▼

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

- sans imposer de contraintes sur les cartes.
- contenant 5 carreaux ou 5 piques.
- contenant 2 carreaux et 3 piques.
- contenant au moins un roi.
- contenant au plus un roi.
- contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques.

Indication ▼

- Il faut choisir une partie à 5 éléments dans un ensemble à 32 éléments.
- Compter séparément le nombre de tirages comprenant 5 carreaux et 5 piques.
- Choisir les carreaux, puis les piques.
- Compter les tirages sans roi, et retirer du nombre total.
- Compter les tirages sans roi, puis ceux avec exactement un roi.
- Séparer les tirages contenant le roi de pique, et ceux ne contenant pas le roi de pique.

Corrigé ▼

Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition sur les cartes : un tirage est donc une combinaison de 5 cartes parmi 32. Il y a : $\binom{32}{5} = 201376$ tirages différents.

Pour obtenir 5 carreaux, il faut choisir 5 cartes parmi 8 : il y a $\binom{8}{5}$ tels tirages. De même pour obtenir 5 piques. Comme les deux cas sont disjoints, il y a $2 \times \binom{8}{5} = 112$ tels tirages différents.

Il y a $\binom{8}{2}$ façons de choisir 2 carreaux parmi 8 puis, pour chacune de ces façons, il y a $\binom{8}{3}$ façons de choisir 3 piques. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1568$.

On compte le complémentaire, c'est-à-dire les tirages sans rois : il faut alors choisir 5 cartes parmi 28, il y a $\binom{28}{5}$ tels tirages. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103096$.

On a déjà compté les tirages sans roi. Pour les tirages comprenant exactement un roi, il y a 4 façons de choisir le roi, puis, pour chacune de ces façons, $\binom{28}{4}$ façons de choisir les autres cartes. On en déduit qu'il y a $\binom{28}{5} + 4 \binom{28}{4} = 180180$ tels tirages.

On sépare les tirages contenant le roi de pique et ceux ne contenant pas le roi de pique.

- si le tirage ne contient pas le roi de pique, il y a $\binom{3}{2}$ choix différents de 2 rois parmi 3, puis $\binom{7}{3}$ choix de 3 piques parmi 7 (tous sauf le roi de pique).
- si le tirage contient le roi de pique, il reste 3 choix pour le roi différent du roi de pique, puis $\binom{7}{2}$ choix pour les deux autres piques. Cela faisant, on n'a tiré que 4 cartes. Il reste une carte à choisir qui n'est ni un roi, ni un pique, et donc $32 - (4 + 7) = 21$ choix (attention à ne pas compter à nouveau deux fois le roi de pique!).

Finalement, le nombre de tirages possibles est :

$$3 \times \binom{7}{2} \times 21 + \binom{3}{2} \times \binom{7}{3} = 1428.$$

Exercice 21 - Ranger des livres [\[Signaler une erreur\]](#) [\[Ajouter à ma feuille d'exos\]](#)

Enoncé ▼

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

- si les livres doivent être groupés par matières.
- si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Indication ▼

Choisir l'ordre des groupes, puis l'ordre des livres à l'intérieur de chacun des groupes.
Choisir la position du groupe des livres de mathématiques, puis ranger les livres de mathématiques d'un côté, le reste des livres de l'autre.

Corrigé ▼

Il y a $3!$ façons de choisir l'ordre des matières. Une telle façon choisie, il y a $4!$ façons de ranger les livres de mathématiques, $6!$ façons de ranger les livres de physique, et $3!$ façons de ranger les livres de chimie. Le nombre de rangements possible est donc : $3!4!6!3!$.
Il peut y avoir 0, 1, ..., 9 livres placés avant les livres de mathématiques. Il y a donc 10 choix du nombre de livres placés avant le livre de mathématiques. Ce choix fait, il y a $4!$ façons d'ordonner les livres de mathématiques, et $9!$ façons d'ordonner les autres : il y a donc en tout $10 \times 4!9!$ rangements différents.

Exercice 22 ★★ - Polygones et diagonales [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit p points du plan distincts.

Combien de polygones à $n \leq p$ côtés peut-on réaliser à partir de ces points?
On fixe un tel polygone à n côtés. Combien de diagonales ce polygone comporte-t-il?

Indication ▼

Choisir les n sommets, choisir l'ordre de parcours de ces sommets, puis compter combien de fois chaque polygone est compté.
Une diagonale est définie par deux sommets non consécutifs.

Corrigé ▼

Il faut d'abord choisir n points parmi ces p points. Il y a $\binom{p}{n}$ tels choix. Ces points $A_1, \dots, A_n$ étant choisis, on fixe un premier sommet comme origine. On choisit ensuite le sommet suivant pour lequel il y a $n - 1$ choix, puis le troisième sommet, pour lequel il y a $n - 2$ choix, etc... Il y a donc $(n - 1)!$ possibilités pour ordonner les sommets. Mais attention, procédant ainsi, on compte chaque polygone deux fois car l'ordre global des points n'importe pas (par exemple, le polygone ABCD est le même que le polygone ADCB). Finalement, on trouve qu'il y a $\frac{1}{2}(n - 1)!\binom{p}{n}$ polygones possibles à n sommets choisis parmi p points du plan.
Une diagonale est définie par deux sommets non consécutifs. On choisit donc d'abord un premier sommet A parmi les n sommets du polygone. On choisit ensuite un deuxième sommet parmi les sommets du polygone qui ne sont ni A ni un sommet adjacent à A . Il y a $n - 3$ choix. Mais ce faisant, on compte deux fois chaque diagonale (la diagonale (AB) est comptée en choisissant A , puis B , et en choisissant B , puis A). Le nombre de diagonales est donc $\frac{n(n-3)}{2}$.

Dénombrements - autres dénombrements

Exercice 23 ★★ - Autour d'une table! [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Une table ronde comporte cinq places, numérotées de 1 à 5. On veut répartir Adélie, Brigitte, Chafik, Denis et Emilie autour de la table. Mais attention! Denis et Émilie ne s'entendent pas du tout, et il ne faut pas les placer côte à côte!!! Combien y-a-t-il de dispositions possibles?

Indication ▼

Compter le nombre de dispositions totales (sans contraintes) et le nombre de dispositions où Denis et Émilie sont côte à côte.

Corrigé ▼

On va raisonner par différence. Si l'on ne met pas de contraintes, il y a $5! = 120$ façons de placer les gens autour de la table. Comptons maintenant le nombre de façons où Denis et Émilie sont côte à côte. On commence par choisir la position de ce couple. Il y a cinq positions possibles : (1,2), (2,3), (3,4), (4,5) et (5,1). Cette position fixée, il y a $2! = 2$ choix pour placer Denis et Émilie, puis $3! = 6$ choix pour placer les autres. Il y a donc $5 \times 2 \times 6 = 60$ dispositions où Denis et Émilie sont côte à côte. Finalement, il y a $120 - 60 = 60$ dispositions où Émilie et Denis ne sont pas côte à côte!

Remarquons que ce raisonnement dépend du fait que l'on a numéroté les places et donc que, implicitement, la position Adélie 1, Brigitte 2, Chafik 3, Denis 4 et Emilie 5 est différente de la position Adélie 2, Brigitte 3, Chafik 4, Denis 5 et Emilie 1, alors que dans ces deux configurations, tout le monde a le même voisin. Si on ne numérote pas les places, alors on doit diviser le nombre de possibilités par 5 et il y a 12 configurations différentes.

Une autre possibilité, pour faire le dénombrement, est de choisir d'abord la place de Denis (5 choix), puis la place d'Emilie (il ne reste que 2 choix), puis la place des 3 autres (respectivement, 3, 2 et 1 choix). Le nombre de dispositions possibles vaut bien $5 \times 2 \times 3 \times 2 = 60$.

Exercice 24 ★★★★★ - Le concours [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit n un entier non nul. On désigne par u_n le nombre de listes de n termes, chaque terme étant 0 ou 1, et n'ayant pas deux termes 1 consécutifs.

Que vaut u_1 ? u_2 ?

Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, on a $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

Écrire un algorithme permettant de calculer u_{20} .

Application : un concours comporte vingt questions, numérotées de 1 à 20. On a constaté que, parmi les 17712 personnes ayant participé au concours, aucune n'a répondu juste à deux questions consécutives. Peut-on affirmer que deux candidats au moins ont répondu de la même manière au questionnaire, c'est-à-dire juste aux mêmes questions et faux aux mêmes questions?

Indication ▼

Trier les listes : finissant par 0 ou finissant par 1.

Associer à chaque questionnaire une liste de 0 et de 1.

Corrigé ▼

Il y a deux listes possibles à 1 terme, et aucune ne comporte deux 1 consécutifs. Donc $u_1 = 2$. Il y a 4 listes à 2 termes, dont une seule comporte deux 1 consécutifs. Donc $u_2 = 3$. Considérons une liste à n termes n'ayant pas deux 1 consécutifs.

- ou bien elle se termine par un 1. Le terme précédent est donc forcément un 0, et pour les $n - 2$ premiers termes, la seule contrainte est qu'il n'y ait pas deux 1 consécutifs. Il y a donc u_{n-2} telles listes.
- ou bien elle se termine par un 0. Il n'y a pas de contraintes sur les $n - 1$ premiers termes, si ce n'est qu'il ne faut pas qu'il y ait deux 1 consécutifs. Il y a donc u_{n-1} telles listes.

On a donc réalisé une partition des listes à n termes ne comportant pas deux 1 consécutifs, et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

Variables :
U entier

```

V entier
W entier
N entier
Traitement
  2->U
  3->V
  Pour N allant de 3 à 20 faire
    U+V->W
    V->U
    W->V
  Fin Pour
Afficher V

```

On peut associer à chaque questionnaire une liste de 0 et de 1, le i -ème terme vaut 1 si la réponse est juste, et 0 si la réponse est fausse. L'énoncé nous dit que les 17712 listes obtenues ne comportent deux termes 1 consécutifs. Or, il y a $u_{20} = 17711$ telles listes différentes. Deux des listes doivent donc être identiques, et il y a bien deux candidats qui ont répondu de la même manière aux questions.

Exercice 25 ★★★★★ - Mon escalier [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Dans ma maison, il y a un escalier de 17 marches. Pour descendre cet escalier, je peux à chaque pas descendre une marche, descendre deux marches, ou descendre trois marches à la fois. Combien y-a-t-il de façons de descendre cet escalier?

Indication ▼

Noter $S(n)$ le nombre de façons de descendre un escalier à n marches. Trouver une relation de récurrence liant $S(n)$ aux valeurs précédentes. Calculer alors $S(n)$ en utilisant par exemple un tableur ou un algorithme.

Corrigé ▼

Notons $S(n)$ le nombre de façons de descendre un escalier à n marches. On a $S(1) = 1$, $S(2) = 2$ (ou bien on descend deux fois une marche, ou bien on descend deux marches d'un coup), et $S(3) = 4$: ou bien notre premier pas descend de trois marches, et on a fini, ou bien il descend de deux marches, et il reste un escalier à une marche à descendre, ou bien il descend d'une seule marche, et il reste encore un escalier de deux marches à descendre. Autrement dit, $S(3) = 1 + 1 + S(2) = 4$.

Cherchons maintenant une formule de récurrence pour $S(n)$ lorsque n est supérieur ou égal à 4. On raisonne en fonction du premier pas :

- ou bien on descend une seule marche : dans ce cas, il reste un escalier à $n - 1$ marches à descendre, et donc $S(n - 1)$ possibilités;
- ou bien on descend deux marches : dans ce cas, il reste un escalier à $n - 2$ marches à descendre, et donc $S(n - 2)$ possibilités;
- ou bien on descend trois marches : dans ce cas, il reste un escalier à $n - 3$ marches à descendre, et donc $S(n - 3)$ possibilités.

On a donc la formule de récurrence

$$S(n) = S(n - 1) + S(n - 2) + S(n - 3).$$

Il nous faut calculer $S(17)$. Plusieurs méthodes sont possibles. On peut par exemple utiliser un algorithme sous Python :

```

def S(n):
    if n<1:
        return 0
    elif n==1:
        return 1
    elif n==2:
        return 2
    elif n==3:
        return 4

```

```
else:
    return S(n-1)+S(n-2)+S(n-3)
```

On trouve $S(17) = 19513$. On pouvait aussi utiliser un tableur en rentrant 1 dans la cellule A1, 2 dans la cellule A2, 4 dans la cellule A3, $=A1+A2+A3$ dans la cellule A4, et en étirant cette cellule vers le bas.

Dénombrement - principe des tiroirs

Exercice 26 ★ - Trop d'entiers! [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

On considère 51 entiers (distincts!) compris entre 1 et 100. Démontrer que parmi ces entiers, il y en a deux qui sont consécutifs.

Indication ▼

Procéder par l'absurde et noter les entiers $n_1 < n_2 < \dots < n_{51}$. Que dire de n_2 ? de n_3 ? de n_{51} ?

Corrigé ▼

On va procéder par l'absurde et supposer que parmi ces entiers, il n'y en a pas deux qui sont consécutifs. Rangeons ces entiers par ordre croissant, $n_1 < n_2 < \dots < n_{51}$. On a donc, pour tout $k = 1, \dots, 50$, $n_{k+1} - n_k \geq 2$. On en déduit facilement (par récurrence finie) que pour tout $k \in \{1, \dots, 51\}$, $n_k \geq n_1 + 2(k-1)$.

En particulier, on a $n_{51} \geq n_1 + 100 \geq 101$, une contradiction!

Exercice 27 ★★ - $n+1$ entiers parmi $2n$ [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

On considère un ensemble X de $n+1$ entiers (distincts) choisis dans $\{1, \dots, 2n\}$. Démontrer que parmi les éléments de X , on peut toujours trouver 2 entiers dont la somme fait $2n+1$.

Indication ▼

Considérer les n paires d'entiers "complémentaires" $\{1, 2n\}$, $\{2, 2n-1\}$, ...

Corrigé ▼

Considérons les paires d'entiers dont la somme fait $2n+1$: ce sont $\{1, 2n\}$, $\{2, 2n-1\}$, $\{3, 2n-2\}$, ..., $\{n, n+1\}$. On a donc défini ici n paires d'entiers, et chaque entier entre 1 et $2n$ est contenu dans une seule paire. Tous les entiers de X ne peuvent pas être dans des paires différentes, puisque X contient $n+1$ éléments. Donc il existe deux éléments de X dans la même paire, et leur somme fait $n+1$.

Exercice 28 ★★★★★ - Somme d'entiers divisible par n [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Énoncé ▼

Soit $k \geq 2$ et $n_1, \dots, n_k$ k entiers relatifs (pas nécessairement distincts). Montrer qu'on peut toujours choisir certains de ces entiers de sorte que la somme soit divisible par k .

Indication ▼

Raisonner dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ en considérant les entiers $m_j = n_1 + \dots + n_j$.

Corrigé ▼

Pour $j = 1, \dots, k$, posons $m_j = n_1 + \dots + n_j$ et considérons les classes $\overline{m_j}$ dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Deux cas sont possibles :

- ou bien l'une des classes, disons $\overline{m_j}$, est égale à $\overline{0}$. Dans ce cas, m_j est divisible par k .
- ou bien aucune de ces classes n'est égale à $\overline{0}$. Mais alors, $\overline{m_1}, \dots, \overline{m_k}$ vit dans $\{\overline{1}, \dots, \overline{k-1}\}$ et donc toutes les classes ne peuvent pas être différentes. Autrement dit, il existe $j < \ell$ tel

que $\overline{m_j} = \overline{m_\ell}$, c'est-à-dire que $m_\ell - m_j$ est divisible par k . Ceci prouve le résultat dans ce cas puisque $m_\ell - m_j = n_{j+1} + \dots + n_\ell$.

Dénombrement et cryptographie

Exercice 29 ★ - Le disque de l'armée mexicaine [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Le disque de l'armée mexicaine est un outil de cryptographie utilisé par l'armée mexicaine au début du XXI^e siècle. Il est constitué de 5 disques de diamètres différents, empilés les uns sur les autres, et qui peuvent tourner les uns par rapport aux autres. Chaque disque est partagé en 26 parts. Sur le bord du plus grand disque, on écrit les 26 lettres, de A à Z. Sur le bord du second disque, on écrit les 26 nombres 01, 02, ..., 26. Sur le bord du troisième disque, on écrit 27, ..., 52, sur le bord du quatrième disque, 53, ..., 78, et enfin sur le bord du plus petit disque, 79, ..., 99, et 00 (il reste 4 secteurs sans nombre sur le plus petit disque).

On convient alors d'une clé, qui est un mot de 4 lettres, par exemple FRED. On fait alors coïncider alors le plus petit nombre du deuxième disque, à savoir 01, avec la première lettre de la clé, ici F. On fait de même tourner le troisième disque pour faire coïncider son plus petit nombre, 27, en face de la deuxième lettre de la clé, R, et ainsi de suite pour les deux autres disques.

Pour chiffrer un message, on remplace alors une lettre par l'un des 3 ou 4 nombres qui lui fait face sur le disque. Avec l'exemple précédente, on pourrait remplacer E par 26, 40, 53 ou 80.

Combien-y-a-t-il de clés possibles pour cette méthode de chiffrement?

Indication ▼

Corrigé ▼

Une clé est simplement la donnée d'un mot de 4 lettres sur un alphabet à 26 caractères. Il y a donc 26^4 clés possibles.

Exercice 30 ★★★★★ - Grilles de Fleissner [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Les grilles tournantes, mises au point par le colonel Fleissner, servirent pour une méthode de cryptographie qui fut utilisée par les allemands lors de la Première Guerre Mondiale. Une telle grille est constituée par un carré de côté 6. On divise ce carré en une grille de 36 petits carrés égaux (tous de côté 1), et on ôte 9 de ces carrés. La propriété suivante doit être vérifiée : les trous que l'on obtient avec la grille en position initiale, avec la grille tournée d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quart de tour ne se superposent jamais. Ainsi, les 36 positions peuvent être occupées par un trou après éventuellement une rotation de la grille d'un quart, d'un demi ou de trois-quart de tour.

Combien peut-on fabriquer de telles grilles?

Pour quelles valeurs de n peut-on fabriquer une grille de Fleissner de côté n ? Combien de telles grilles peut-on alors fabriquer?

Indication ▼

On a 36 choix pour le premier trou. Et combien pour le second?
Il faut effectuer $n^2/4$ trous...

Corrigé ▼

On a $36=4*9$ choix pour placer le premier trou. On ne peut ensuite plus choisir ni ce carré, ni les 3 carrés obtenus à partir de celui-ci par rotation. Il reste donc $32=4*8$ choix pour placer le second trou. On a ensuite $4*7$ choix pour placer le troisième trou, et ainsi de suite... jusqu'à 4 choix pour placer le 9^{ème} trou. Mais attention! Ce faisant, on compte certaines grilles deux fois. En effet, on obtient la même grille si on échange le premier trou et le deuxième trou.... Il faut diviser donc le total obtenu par le nombre de permutations possibles entre les 9 trous, soit 9! Finalement, le nombre de grilles possibles est

$$\frac{4 \times 9 \times 4 \times 8 \times 4 \times 7 \times \dots \times 4 \times 1}{9!} = 4^9.$$

Si on veut construire une grille de Fleissner, il faut pouvoir réaliser $n^2/4$ trous (pour qu'avec les 4 positions, on puisse obtenir n^2 trous). Ainsi, n doit être pair (et dans ce cas, n^2 est bien un multiple de 4). Ensuite, on procède comme dans le cas précédent : on a $n^2 = 4 \times \frac{n^2}{4}$ choix pour le premier carré, $n^2 - 4 = 4 \times (\frac{n^2}{4} - 1)$ choix pour le deuxième carré,... En n'oubliant pas de diviser par la factorielle de $\frac{n^2}{4}$, on obtient que le nombre de grilles est $4^{n^2/4}$.