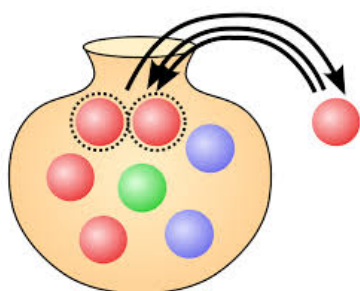


Probabilités

Exercice 1 - Probabilités

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes boules ont la même probabilité d'être tirées.

Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur. Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.



1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne,
 - a. Démontrer que : $P(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$
 - b. Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X .
 - c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

$$E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}$$

- d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive,
2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne.

Les tirages sont indépendants.

Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que $n = 1\,000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}$$

d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive,

Exercice 2 - Extrait du baccalauréat s sur les probabilités

1. Cette question est une restitution organisée de connaissances.

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que

$1 \leq p \leq n$ on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher

7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.

On tire simultanément deux jetons de ce sac.



1. a. On note A l'évènement «obtenir deux jetons blancs».

Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\frac{7}{15}$.

b. On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs».

Calculer la probabilité de B.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a. Déterminer la loi de probabilité de X,

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a. Déterminer la loi de probabilité de X,

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 3 - Extrait du baccalauréat

Pour chacune des questions suivantes, une ou deux des réponses proposées sont correctes,

Un point est attribué à chacune des questions. Toute réponse inexacte est pénalisée de 0,25 point.

Il n'y a pas de pénalité en cas d'absence de réponse. Aucune justification n'est attendue.

Si le total des points obtenus est négatif, le note attribuée à l'exercice est 0.

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale :

$$A: \frac{5}{8}; B: \frac{21}{32}; C: \frac{11}{32}; D: \frac{3}{8};$$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes,

La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

$$A: \frac{105}{248}; B: \frac{\frac{21}{2}}{32}; C: \frac{21^2}{32^2}; D: \frac{5^2}{8^2};$$

3. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 1]$,

La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

$$A: \frac{1}{3}; B: \frac{1}{5}; C: \frac{1}{12}; D: \frac{1}{4};$$

4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres.

La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.

La probabilité pour qu'exactly 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :

$$A: 0,35 \times 10^{-2}; B: 0,85^9; C: 0,85^9 \times 0,15 \times 10; D: 0,85^9 \times 0,15 \times 10$$

Exercice 4 - Probabilités avec des cartes

1. Une grande enveloppe contient les douze "figures" d'un jeu de carte : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. On tire, simultanément et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe.

a. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux rois.

b. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un roi.

c. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de rois obtenus.

Donner la loi de probabilité de X (sous la forme d'un tableau) et calculer son espérance mathématique.

Interpréter cette espérance.

2- Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe.

Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de rois obtenus au cours de ces cinq tirages.

a. Calculer la probabilité d'obtenir 5 fois un roi.

b. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux rois.

c. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un roi.

d. Calculer l'espérance mathématique de Y Interpréter.

3- Dans la même enveloppe contenant toujours les mêmes douze cartes, on effectue maintenant n fois le tirage d'une carte avec remise. Y désigne encore la variable aléatoire correspondant au nombre de rois obtenus au cours des n tirages.

Combien de tirages faut-il effectuer (au minimum) pour être sûr à 95 % d'obtenir au moins un roi ?



Exercice 5 :

Des individus $I_1, I_2, \dots, I_n$ se transmettent une information dans cet ordre.

Chaque individu transmet l'information de manière fidèle avec une probabilité égale à 0,8 ou la change en son contraire avec une probabilité égale à 0,2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement «le n ème individu reçoit l'information non déformée» et $p_n = P(A_n)$.

On suppose que $p_1 = 1$ (le premier individu I_1 possède l'information non déformée).

On a donc $p_2 = 0,8$.

1. Calculer p_3 .

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,2$$

3. Exprimer p_n en fonction de n .

4. En déduire la probabilité que le 10ème individu reçoive l'information non déformée.

(On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près)

5. Étudier la limite de la suite (p_n) .



Exercice 6 :

Chez une espèce animale, la mutation de chacun des trois gènes A, B, C conduit à une modification de l'apparence.

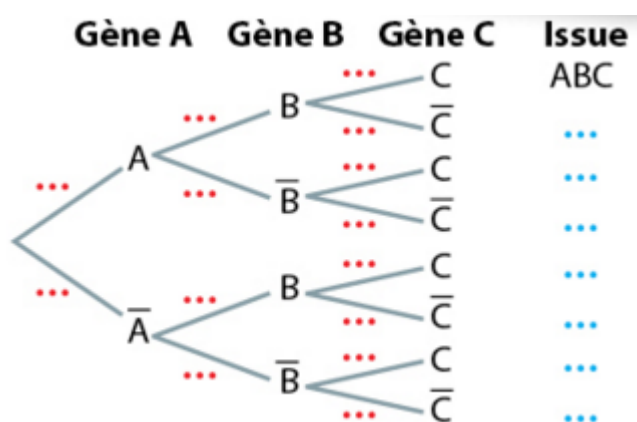
Ces mutations sont indépendantes car les gènes sont situés sur des chromosomes différents.

Des scientifiques ont observé que :

- 2 % des individus présentent une mutation du gène A ;
- 4 % des individus présentent une mutation du gène B ;
- 10 % des individus présentent une mutation du gène C.

On choisit au hasard un animal de cette espèce et on note A (resp. B, resp. C) l'issue « le gène A (resp. B, resp. C) a muté ».

1.a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous par les probabilités qui conviennent (pointillés rouges).



b) Compléter les pointillés bleus par les issues de cette succession de trois épreuves indépendantes.

2. Calculer, puis interpréter la probabilité de chacune des issues :

- ABC
- $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$
- $A \bar{B} C$



Exercice 7 - Test de dépistage

Dans une population donnée, la proportion d'individus atteint d'une certaine maladie est x . ($0 \leq x \leq 1$)

On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on voudrait étudier sa fiabilité.

On dispose des données suivantes

- on effectue le test de dépistage sur 100 personnes considérées comme malades : 98 ont un test positif.
- on effectue le test de dépistage sur 100 personnes considérées comme saines : une seule a un test positif.

On choisit au hasard un individu de cette population et on le soumet au test.

On note :

M = " l'individu est malade "

T = " l'individu a un test positif "

On note $f(x)$ la probabilité qu'un personne ayant un test positif soit malade.

1. Montrer que $f(x) = \frac{98x}{97x+1}$

Tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle [0, 1].

2. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure à 0,95-

Le test est-il fiable si la proportion x d'individus atteints de la maladie est de 0,05 (5%) ?

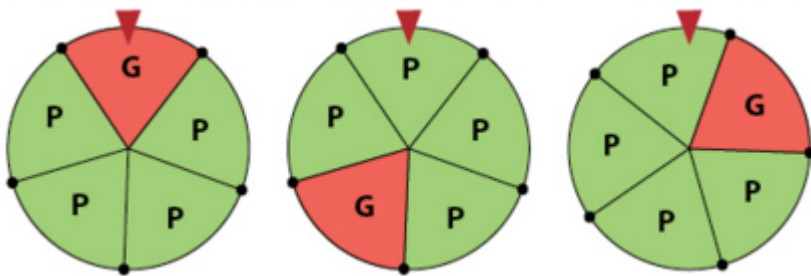
À partir de quelle proportion x le test est-il fiable ?



Exercice 8 :

À la fête foraine, Aya joue à la loterie et fait tourner les trois roues ci-dessous.

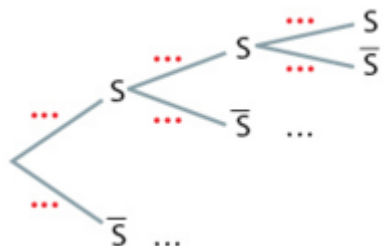
Chaque roue est divisée en cinq secteurs identiques ; un seul des cinq secteurs (G) est gagnant, les autres (P) sont perdants.



L'expérience aléatoire qui consiste à faire tourner une roue a deux issues, le succès S : « Aya obtient le secteur G » et l'échec S : « Aya obtient un secteur P ».

On dit qu'il s'agit d'une **épreuve de Bernoulli**.

Faire tourner les trois roues revient à répéter 3 fois cette même épreuve de Bernoulli, dans des conditions d'indépendance. On dit qu'il s'agit d'un **schéma de Bernoulli**.



1.a) Quelle est la probabilité du succès S ?

b) L'arbre ci-dessus représente ce schéma de Bernoulli ; il n'est que partiel.

Recopier et terminer cet arbre, puis indiquer la probabilité qui convient sur chaque branche.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.

À l'aide de l'arbre précédent, présenter la loi de probabilité de X dans un tableau tel que celui ci-dessous.

Cette loi est appelée **loi binomiale de paramètres $n = 3$** (nombre d'épreuves répétées) et $p = 0,2$ (probabilité du succès) ; on la note $B(3; 0,2)$.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$				

Exercice 9 :

On lance une pièce équilibrée dont les faces sont numérotées 1 et 2, puis on tire au hasard un papier de ce sac.

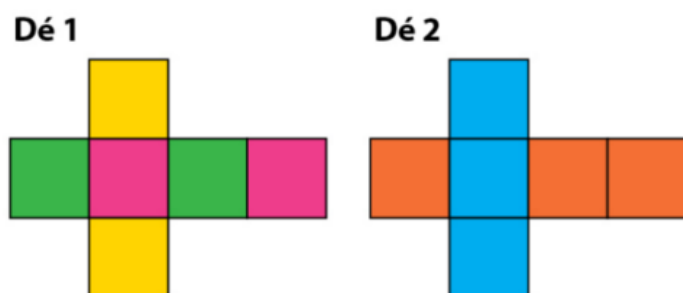
a) S'aider d'un arbre pour déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble E des issues.

b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le numéro 2.



Exercice 10 :

Voici les patrons de deux dés équilibrés.



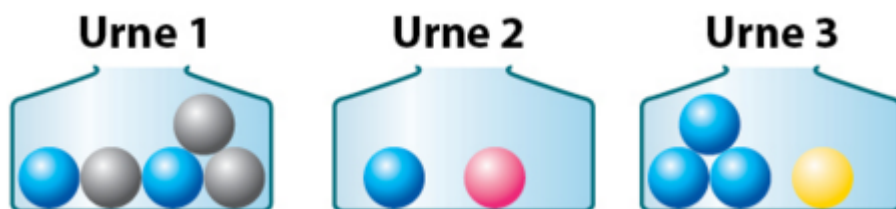
On lance le dé 1, puis le dé 2 et on note les couleurs obtenues (rose : R ; jaune : J ; vert : V ; bleu : B ; orange : O).

- Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?
- Représenter la situation par un arbre pondéré.
- Dans chaque cas, déterminer la probabilité.

$$P(V;B) ; P(R;B) ; P(J;O) ; P(R;O)$$

Exercice 11 :

On tire successivement une boule de chacune des urnes ci-dessous



et on note les couleurs obtenues (B : bleu ; G : gris ; R : rose ; J : jaune).

- Déterminer le nombre d'issues de cette expérience aléatoire.
- Représenter la situation par un arbre pondéré.
- Déterminer la probabilité de l'événement : « Les trois boules sont de couleurs différentes. »
- Donner deux issues différentes dont la probabilité est égale à $\frac{3}{40}$.

Exercice 12 :

Selon la Sécurité routière, en 2019, environ 1,8 % des véhicules roulaient sans assurance. Depuis, de nouveaux radars capables de détecter le défaut d'assurance ont été mis en service.

Trois véhicules passent devant l'un de ces radars qui interroge alors les fichiers d'assurance.

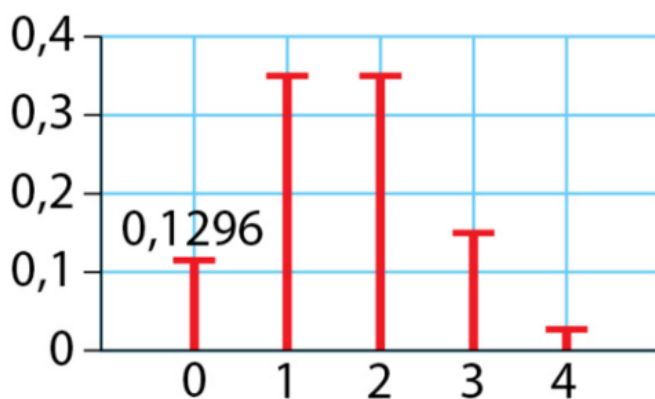
- Expliquer pourquoi on peut associer un **schéma de Bernoulli** à cette situation.

b) Représenter ce schéma par un arbre pondéré.



Exercice 13 :

On a représenté graphiquement ci-dessous une loi binomiale de paramètres n et p .
Déterminer les valeurs de ces paramètres.



Exercice 14 :

Pour décorer la terrasse, le gérant d'un hôtel a acheté cinq lampes extérieures.

Ces lampes changent de couleur de manière aléatoire, indépendamment les unes des autres : rouge, bleu, vert et rose.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de lampes qui s'allument en vert lorsque le gérant les allume à la tombée du jour.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

b) Déterminer la probabilité, arrondie au centième, de chacun des événements :

A : « Moins de deux lampes s'allument en vert » ;

B : « Au moins deux lampes s'allument en vert ».



Exercice 15 :

Au casino, le jeu de la roulette contient 37 numéros (de 0 à 36).



On a détaillé ci-dessous cinq façons de jouer une partie à la roulette.

	1 à 18	Pair			Impair	19 à 36							
0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	20 à 120
	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	
	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	
	1 ^{er} 12				2 ^d 12				3 ^e 12				

- (1) Miser sur l'un des 37 numéros.
- (2) Miser sur « Impair ».
- (3) Miser sur « 1 à 18 ».
- (4) Miser sur « Rouge ».
- (5) Miser sur « 1er 12 », c'est-à-dire sur les 12 premiers numéros de 1 à 12.

Un joueur décide de jouer quatre parties successives en misant, à chaque fois, de la même façon.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées sur les quatre parties jouées.

Pour chaque façon de miser :

- a) modéliser la situation par une loi binomiale dont on précisera les paramètres ;
- b) déterminer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie. Arrondir au millième.

Exercice 16 :

Voici un jeu proposé sur une application smartphone.



Les trois rouleaux de la machine sont identiques et constitués de :

deux **WIN** ; trois **7** ; quatre **BAR** ; cinq 🍋 ;
 six 🍊 ; huit 🍇 ; dix 🍒.

Les gains sont indiqués en points sur la machine.

- Calculer la probabilité d'obtenir chacun des gains indiqués. Arrondir au millième.
- Pour jouer, le joueur doit miser 10 points.

Calculer la probabilité que la partie ne soit pas perdante.

