

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affections respectives: $z_A = -3i$, $z_B = -2$ et $z_C = 1 + 2i$.
 - a) Déterminer le module et un argument du quotient $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$
 - b) En déduire la nature du triangle ABC
 - c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un carré
 - d) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
2. On considère les points M et M' d'affections respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels. Soit S l'application du plan dans le plan d'expression analytique
$$\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$
 - a) Montrer que l'écriture complexe de S est $z' = (1 + i)z + 2 - i$
 - b) Déterminer la nature et les caractéristiques de S
 - c) Déterminer l'image par S de la droite (D) d'équation $x + y + 1 = 0$
 - d) Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|(1 + i)z + 2 - i| = 2$

PARTIE

A

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affections respectives: $z_A = -3i, z_B = -2$ et $z_C = 1 + 2i$.

a) Déterminer le module et un argument du quotient $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

b) En déduire la nature du triangle ABC

BAC 2024

$$\bullet \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1 + 2i + 2}{-3i + 2} = \frac{3 + 2i}{-3i + 2} = \frac{3 + 2i}{-3i - 2i^2} = \frac{3 + 2i}{-i(3 + 2i)} = \frac{1}{-i} = i$$

$$\bullet \left| \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right| = |i| = 1$$

$$\bullet \arg \left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right) = \arg i = \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet \left| \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right| = \frac{BC}{BA} = 1 \rightarrow BA = BC$$

$$\bullet \arg \left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$$

• **Conclusion: ABC est rectangle isocèle en B**

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives: $z_A = -3i, z_B = -2$ et $z_C = 1 + 2i$.

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un carré

- ABC est rectangle isocèle en B. donc pour que ABCD soit un carré il faut que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$
- $z_A - z_B = z_D - z_C \rightarrow z_D = z_A - z_B + z_C$
- $= -3i + 2 + 1 + 2i = 3 - i$
- $z_D = 3 - i$



1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affections respectives: $z_A = -3i, z_B = -2$ et $z_C = 1 + 2i$.

d) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

- Comme ABCD est un carré donc les points A, B, C et D appartiennent au cercle circonscrit au carré de centre le centre du carré. On peut aussi passer par la formule

$$\bullet \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} = \frac{1+2i+3i}{-2+3i} \times \frac{-2-3+i}{1+2i-3+i} = \frac{1+5i}{-2+3i} \times \frac{-5+i}{-2+3i} = \frac{(1+5i)(-5+i)}{(-2+3i)^2}$$

$$\bullet = \frac{-5+i-25i-5}{4-12i-9} = \frac{-10-24i}{-5-12i} = \frac{2(-5-12i)}{-5-12i} = 2 \in \mathbb{R}$$

- Soit O le centre du cercle circonscrit donc C milieu de $[AC]$

$$\bullet z_O = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-3i + 1 + 2i}{2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\bullet \text{ Le rayon } AO = |\overrightarrow{AO}| = |z_O - z_A| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + 3i \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}}$$

- **Conclusion:** A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$

2. On considère les points M et M' d'affections respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels. Soit S l'application du plan dans le plan d'expression

analytique $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

a) Montrer que l'écriture complexe de S est $z' = (1 + i)z + 2 - i$

PARTIE

- $z' = x' + iy' = x - y + 2 + i(x + y - 1)$
- $= x - y + 2 + ix + iy - i$
- $= x + ix + iy - y + 2 - i = x + iy + ix - y + 2 - i$
- $= x + iy + i(x + iy) + 2 - i$
- $= (1 + i)(x + iy) + 2 - i$
- $= (1 + i)z + 2 - i$
- **$z' = (1 + i)z + 2 - i$**

2. On considère les points M et M' d'affections respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels. Soit S l'application du plan dans le plan d'expression

analytique $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

PARTIE

a) Montrer que l'écriture complexe de S est $z' = (1 + i)z + 2 - i$

b) Déterminer la nature et les caractéristiques de S

- $z' = (1 + i)z + 2 - i$
- Donc $z' = az + b \rightarrow \begin{cases} a \neq 1 \text{ et } a \in \mathbb{C}^* \\ b \in \mathbb{C} \end{cases}$
- S est une similitude plane directe
- $\begin{cases} \text{rapport } k = |a| = |1 + i| = \sqrt{2} \\ \text{Centre } \Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2-i}{1-1-i} = \frac{2-i}{-i} = 1 + 2i = z_C \\ \text{Angle} = \arg a = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$
- **Conclusion:** S est une similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$, de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$

2. On considère les points M et M' d'affections respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels. Soit S l'application du plan dans le plan d'expression

$$\text{analytique} \begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

PARTIE

c) Déterminer l'image par S de la droite (D) d'équation $x+y+1=0$

• On a :

$$\begin{cases} x' = x - y + 2 & (1) \\ y' = x + y - 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow (1) + (2) \rightarrow x' + y' = 2x + 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}(x' + y' - 1) \\ (1) - (2) \rightarrow x' - y' = -2y + 3 \rightarrow y = -\frac{1}{2}(x' - y' - 3) \end{cases}$$

- La droite (D) a pour équation $x+y+1=0$
- $\rightarrow \frac{1}{2}(x' + y' - 1) - \frac{1}{2}(x' - y' - 3) + 1 = 0$
- $\rightarrow \frac{1}{2}(x' + y' - 1 - x' + y' + 3) + 1 = 0$
- $\rightarrow \frac{1}{2}(2y' + 2) + 1 = 0 \rightarrow y' + 1 + 1 = 0 \rightarrow y' = -2$
- **Conclusion:** l'image par S de la droite (D) est la **droite (D')**
d'équation $y = -2$



d) Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|(1 + i)z + 2 - i| = 2$

- On a:
- $(1 + i)z + 2 - i = (1 + i) \left(z + \frac{2-i}{1+i} \right) = (1 + i) \left(z + \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \right)$
- $= (1 + i) \left(z + \frac{2-2i-i-1}{2} \right) = (1 + i) \left(z + \frac{1-3i}{2} \right) = (1 + i) \left(z - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right) \right)$
- Soit le point P tel que $z_P = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$
- $(1 + i) \left(z - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right) \right) = (1 + i)(z - z_P)$
- $|(1 + i)(z - z_P)| = |1 + i||z - z_P| = \sqrt{2}MP = 2 \rightarrow MP = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
- **Conclusion:** l'ensemble des points M est le **cercle de centre P et de rayon $\sqrt{2}$**



COURS DE RENFORCEMENT & REMISE À NIVEAU

COURS PRÉSENTIEL
COURS EN LIGNE

DE LA 6ÈME À LA TERMINALE

MATHS
PC
SVT



77 106 98 79 - 76 312 52 24

