

PARTIE A

(02 points)

1. Pour tout $x < 0$, on pose : $u(x) = x + 1 - e^{-x}$.

Etudier le signe de $1 - e^{-x}$ pour $x < 0$.

En déduire que pour tout $x < 0$, $u(x) < 0$.

2. Pour tout $x > 0$, on pose : $v(x) = x - 1 - \ln x$.

a. Dresser le tableau de variations de v .

b. En déduire le signe de $v(x)$ pour $x > 0$.

PARTIE B

(08 points)

Soient f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. a. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

b. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

Préciser la position de (C_f) par rapport à (D) sur $] -\infty, 0[$.

d. Etudier la nature de la branche infinie de (C_f) en $+\infty$.

(0,5 point)

(0,5 point)

(0,5 point)

(0,25 point)

(0,25 point)

(0,5 point)

2024GS26NA0132

Séries: S2-S2A-S4-S5

Epreuve du 1^{er} groupe

PDS N° 33

PARTIE B



2. a. Etudier la continuité de f en 0. (0,5 point)
b. Etudier la dérivabilité de f en 0. (0,5 point)
Interpréter graphiquement les résultats obtenus. (0,5 point)
3. a. Montrer que pour tout $x < 0$, $f'(x) = u(x)e^x$. (0,5 point)
En déduire le signe de $f'(x)$ sur $] -\infty, 0[$. (0,25 point)
b. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2v(x)$. (0,5 point)
En déduire le signe de $f'(x)$ sur $] 0, +\infty[$. (0,25 point)
c. Dresser le tableau de variations de f . (0,5 point)
4. Tracer (D) et (C_f) dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,25 point + 0,5 point)
5. a. Soit g la restriction de f à l'intervalle $] 0, +\infty[$.
Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont en précisera l'ensemble de définition et le sens de variations. (0,25 point + 0,25 point + 0,25 point)
b. Tracer la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de g^{-1} dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,25 point)
6. Soit λ un réel strictement négatif.
a. Exprimer l'aire $A(\lambda)$ en fonction de λ de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = \lambda$, $x = 0$, $y = -x - 1$ et la courbe (C_f) . (0,5 point)
b. En déduire $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$. (0,25 point)

PARTIE A**(02 points)**

1. Pour tout $x < 0$, on pose : $u(x) = x + 1 - e^{-x}$.

Etudier le signe de $1 - e^{-x}$ pour $x < 0$.

(0,25 point)

En déduire que pour tout $x < 0$, $u(x) < 0$.

(0,25 point)

- $1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} = 0 \rightarrow \frac{e^x - 1}{e^x} = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0$

- Si $x < 0 \rightarrow \begin{cases} e^x - 1 < 0 \\ e^x > 0 \end{cases} \rightarrow 1 - e^{-x} < 0$

- $u(x) = x + 1 - e^{-x}$; pour tout $x < 0 \begin{cases} x < 0 \\ 1 - e^{-x} < 0 \end{cases}$

- **$u(x) < 0$ pour tout $x < 0$**

2. Pour tout $x > 0$, on pose : $v(x) = x - 1 - \ln x$.

a. Dresser le tableau de variations de v .

b. En déduire le signe de $v(x)$ pour $x > 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 - \ln x = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$

- v est dérivable pour tout $x > 0$:

- $v'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

- Signe: $x > 0$ donc le signe dépend de $x - 1$

- En posant $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$v'(x)$		-	+
$v(x)$	$+\infty$		$+\infty$

Diagram illustrating the variation of $v(x)$ on the interval $(0, +\infty)$. A red arrow points from $+\infty$ at $x=0$ down to a minimum value of 0 at $x=1$. A green arrow points from the minimum value of 0 at $x=1$ up to $+\infty$ at $x=+\infty$.

- b) d'après le tableau de variation, **pour tout $x > 0$, $v(x) \geq 0$**

PARTIE B

(08 points)

Soient f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. a. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

(0,

- Soit $f_1(x) = xe^x - x - 1$
- $f_1 \exists \text{ sssi } x \leq 0 \rightarrow Df_1 =]-\infty; 0]$
- Soit $f_2(x) = x^2 - 1 - 2x \ln x$
- $f_2 \exists \text{ sssi } x > 0 \rightarrow Df_2 =]0; +\infty[$
- **$Df = Df_1 \cup Df_2 = \mathbb{R}$**

PARTIE B

(08 points)

Soient f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - x - 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - 1 = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Par somme : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 - 2x \ln x$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

PARTIE B

(08 points)

Soient f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

(0,25 point)

Préciser la position de (C_f) par rapport à (D) sur $] -\infty, 0[$.

(0,25 point)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$
- **Conclusion:** $y = -x - 1$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$
- **Position relative entre C_f et (D) :**
- $f(x) - y = xe^x \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ e^x > 0 \end{cases} \rightarrow xe^x < 0 \rightarrow f(x) - y < 0$
- **Conclusion:** C_f est en dessous de (D)

PARTIE B

(08 points)

Soient f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d. Etudier la nature de la branche infinie de (C_f) en $+\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$
- $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} \right) = +\infty$
- **Conclusion:** Cf admet une branche parabolique de direction (Oy)

PARTIE B

(08 points)

2. a. Etudier la continuité de f en 0.

b. Etudier la dérivabilité de f en 0.

Soient f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^x - x - 1 = -1 = f(0)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 - 2x \ln x = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1$
- Conclusion: f est continue en 0



PARTIE B

(08 points)

2. a. Etudier la continuité de f en 0.

b. Etudier la dérivabilité de f en 0.

Soient f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^x - x - 1 + 1}{x}$
- $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - 1 = 0$: f est dérivable en 0^-
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2x \ln x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 \ln x = +\infty$: f n'est pas dérivable en 0^+
- **Conclusion: f n'est pas dérivable en 0.**
- **Interprétation graphique:** Cf admet au point d'abscisse 0 un point anguleux formé par:
 - Une demi tangente horizontale d'équation $y = -1$ en 0^-
 - Une demi tangente verticale dirigée vers le haut en 0^+

PARTIE B

(08 points)

$$u(x) = x + 1 - e^{-x}.$$

Soient f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3. a. Montrer que pour tout $x < 0$, $f'(x) = u(x)e^x$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty, 0[$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$:
- Pour tout $x < 0$:
- $f'(x) = e^x + xe^x - 1 = e^x \left(1 + x - \frac{1}{e^x}\right) = e^x(x + 1 - e^{-x})$
- $f'(x) = u(x)e^x$
- On sait que $e^x > 0$ donc le signe dépend de $u(x)$
- Or $u(x) < 0$ pour tout $x < 0$

Conclusion: pour tout $x < 0$, $f'(x) < 0$ et f décroissante

PARTIE B

(08 points)

$$v(x) = x - 1 - \ln x.$$

Soient f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2v(x)$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

- $f'(x) = 2x - 2\ln x - 2 = 2(x - 1 - \ln x)$
- $f'(x) = 2v(x)$
- On sait que pour tout $x > 0$, $v(x) \geq 0$
- Conclusion: pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ et f croissante



c. Dresser le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

5. a. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$.

Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont en précisera l'ensemble de définition et le sens de variations.
(0,25 point + 0,25 point + 0,25 point)

- Sur $]0; +\infty[$ g est continu et strictement croissante: donc g est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $] -1; +\infty[$

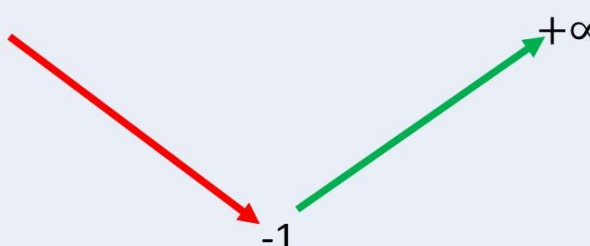
- **Conclusion:** g admet une bijection réciproque notée g^{-1} sur $]0; +\infty[$

- $D_{g^{-1}} =] -1; +\infty[$

- Sens de variation: **croissante**

c. Dresser le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$



PARTIE B**(08 points)**

Soient f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

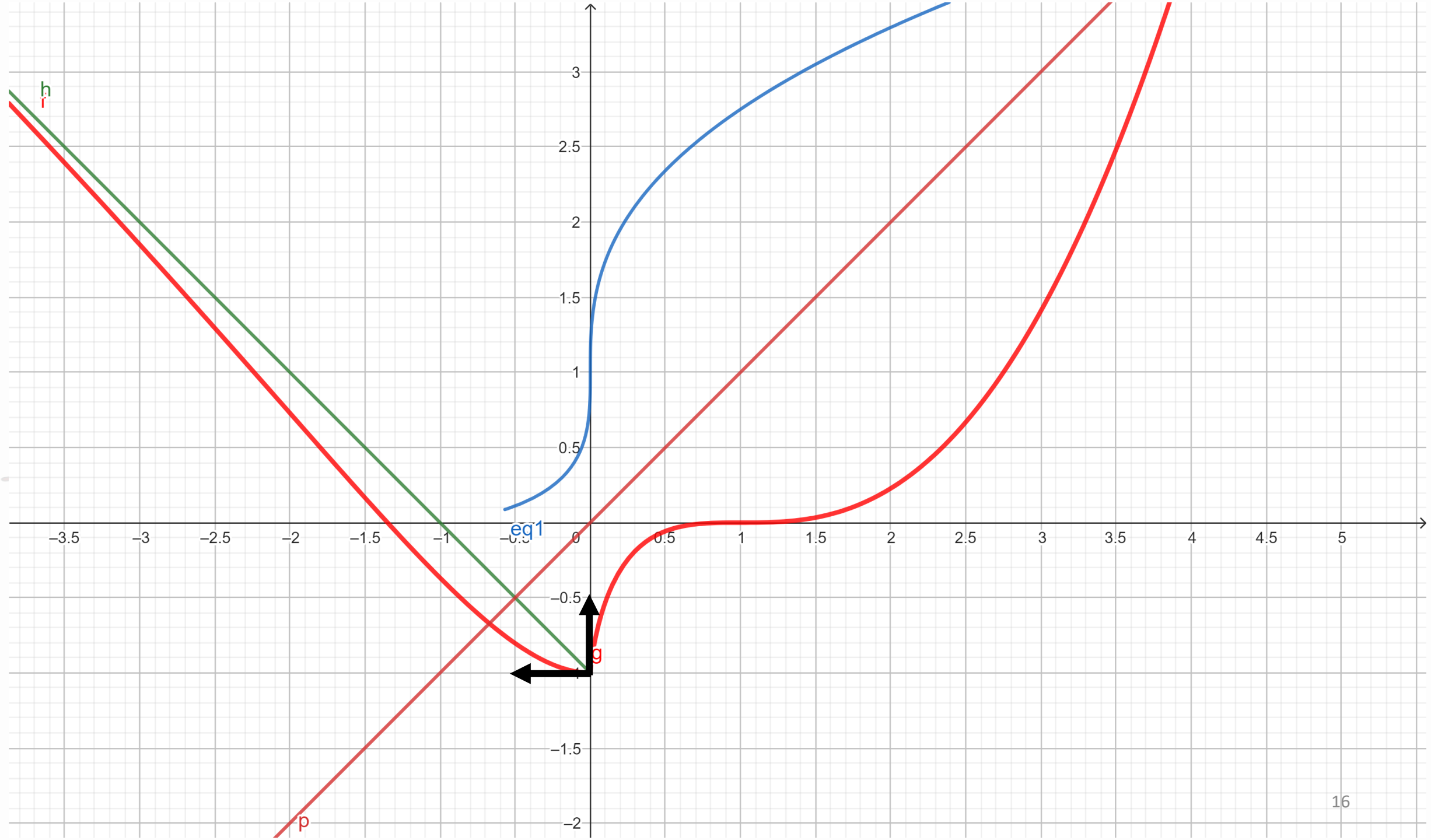
6. Soit λ un réel strictement négatif.

a. Exprimer l'aire $A(\lambda)$ en fonction de λ de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = \lambda$, $x = 0$, $y = -x - 1$ et la courbe (C_f) . (0,5 point)

b. En déduire $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$. (0,25 point)

- On sait que sur $] -\infty; 0[$ C_f est en dessous de (D) d'équation $y = -x - 1$
- $A(\lambda) = - \int_{\lambda}^0 [f(x) - y] dx = - \int_{\lambda}^0 xe^x dx = \int_0^{\lambda} xe^x dx$
- En posant $\begin{cases} U = x \rightarrow U' = 1 \\ V' = e^x \rightarrow V = e^x \end{cases}$
- D'après l'intégration par parties:
- $\int_0^{\lambda} xe^x dx = [xe^x]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} e^x dx$
- $= \lambda e^{\lambda} - e^{\lambda} + 1$
- **$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 1$**





COURS DE RENFORCEMENT & REMISE À NIVEAU

COURS PRÉSENTIEL
COURS EN LIGNE

DE LA 6ÈME À LA TERMINALE

MATHS
PC
SVT



77 106 98 79 - 76 312 52 24

