

PROBLÈME (11 points)

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x}$

1. Déterminer le domaine de définition de g et écrire $g(x)$ sans le symbole des valeurs absolues **0,5pt+0,5pt**
2. (a) Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations de g **0,5pt+0,75**
(b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in]0,7; 0,8[$ **0,5pt**
(c) Préciser alors le signe de $g(x)$ sur $] -\infty; 0[\cup]0; 1[$ **0,25pt**

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1) \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2cm.

1. (a) Donner l'ensemble de définition D_f de f . 0,5pt
- (b) Montrer que pour $x \in]-\infty; 0[$ on a $f(x) = (x-1)\ln(1 + \frac{1}{x-1})$. 0,25pt
- (c) Déterminer la limite de f en $-\infty$ 0,5pt
- (d) Montrer que pour $x \in]0; 1[$ on a $f(x) = (x-1)\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$. 0,25pt
- (e) Déterminer la limite de f en 1^- 0,5pt
- (f) Étudier la continuité de f en 1 . 0,5pt
- (g) Étudier la dérivabilité de f en 1 . Interpréter les résultats. 0,5pt+0,5pt
2. (a) Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles où f est dérivable. 0,75pt
- (b) Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f . 0,5pt+0,75
- (c) Tracer (C_f) dans le repère. 0,75pt

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 0[$

1. Montrer que h réalise une bijection de $] -\infty; 0[$ vers un intervalle J à déterminer. 0,5pt
2. Calculer $h(-1)$. 0,25pt
3. h^{-1} est-elle dérivable en $2\ln 2$? Si oui calculer $(h^{-1})'(2\ln 2)$ 0,5pt
4. Tracer $(C_{h^{-1}})$ 0,5pt

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x}$

1. Déterminer le domaine de définition de g et écrire $g(x)$ sans le symbole des valeurs absolues **0,5pt+0,5pt**

- $g \exists$ sssi $\begin{cases} x \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \rightarrow \mathbf{D_g = \mathbb{R} - \{0; 1\}}$

- Écrivons g sans la valeur absolue

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	+		+
$x - 1$	-	-		+
$\frac{x}{x-1}$	+	-		+

- $\mathbf{g(x) = \begin{cases} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) - \frac{1}{x} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\\ \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) - \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0; 1[\end{cases}}$

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x}$

2. (a) Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations de g

- $Dg = \mathbb{R} - \{0; 1\}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) - \frac{1}{x}$

- $$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \\ \text{par composé } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0 \end{array} \right.$$

- Par somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x}$

2. (a) Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations de g

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) - \frac{1}{x}$

- $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x-1} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \text{Par composé : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty \end{array} \right.$

- Par somme on a FI. Levons l'indétermination :

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x}$

2. (a) Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations de g

- On pose : $X = \frac{x}{x-1} \rightarrow Xx - X = x \rightarrow Xx - x = X \rightarrow x(X-1) = X \rightarrow x = \frac{X}{X-1}$: Si $x \rightarrow 0^-$; $X \rightarrow 0^+$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X - \frac{X-1}{X} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{X \ln X - X + 1}{X}$
- $\begin{cases} \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X - X + 1 = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 0^+} X = 0^+ \end{cases} \rightarrow \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{X \ln X - X + 1}{X} = +\infty$
- **$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$**

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln \left| \frac{x}{1-x} \right| - \frac{1}{x}$

2. (a) Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations de g

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) - \frac{1}{x}$

- $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1-x} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \text{par composé } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \end{array} \right.$

- Par somme $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln \left| \frac{x}{1-x} \right| - \frac{1}{x}$

2. (a) Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations de g

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) - \frac{1}{x}$

- $$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0^+ \\ \text{par quotient } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \text{par composé } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{1}{x} = -1 \end{array} \right.$$

- $\rightarrow \text{par somme } \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x}$

2. (a) Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations de g

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) - \frac{1}{x}$

- $$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+ \\ \text{par quotient } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \text{par composé } \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{x} = -1 \end{array} \right. \rightarrow \text{par somme } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$$

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x}$

2. (a) Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations de g

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \\ \text{par composé } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0 \rightarrow \text{par somme} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \end{array} \right. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x}$

2. (a) Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations de g

- g est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0; 1\}$:

- Pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

- $$g'(x) = \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\frac{x}{x-1}} + \frac{1}{x^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x(x-1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{-x+x-1}{x(x-1)} \right)$$

- $\rightarrow \mathbf{g'(x) = \frac{-1}{x^2(x-1)}}$

- Signe de la dérivée :

- Comme $-1 < 0$ et $x^2 > 0$, le signe dépend de $x - 1$

- Sur $] -\infty ; 0[; (x - 1) < 0 \rightarrow \mathbf{g'(x) > 0 \text{ et } g \text{ croissante}}$

- Sur $] 1 ; +\infty[; (x - 1) > 0 \rightarrow \mathbf{g'(x) < 0 \text{ et } g \text{ décroissante}}$

- Pour tout $x \in]0; 1[$:

- $g'(x) = \frac{\left(\frac{x}{1-x}\right)'}{\frac{x}{1-x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{x} + \frac{1}{x^2}$

- $\rightarrow g'(x) = \frac{1}{x(1-x)} + \frac{1}{x^2}$

- On voit que sur $]0; 1[$ **$g'(x) > 0$ et g croissante**

Tableau de variation de $g(x)$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+	-
$g(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$	0

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x}$

(b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in]0, 7; 0, 8[$

- Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution
- g est continu et strictement croissante sur $] -\infty; 0[$ donc g est une bijection de $] -\infty; 0[$ vers $] 0; +\infty[$ or $0 \notin] 0; +\infty[$ donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solutions sur $] -\infty; 0[$
- g est continu et strictement croissante sur $] 0; 1[$ donc g est une bijection de $] 0; 1[$ vers $\mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution sur $] 0; 1[$
- g est continu et strictement décroissante sur $] 1; +\infty[$ donc g est une bijection de $] 1; +\infty[$ vers $] 0; +\infty[$ or $0 \notin] 0; +\infty[$ donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solutions sur $] 1; +\infty[$
- **Conclusion:** l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x}$

(b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in]0,7; 0,8[$

- Vérifions que $\alpha \in]0,7; 0,8[$
- $\begin{cases} g(0,7) = -0,58 \\ g(0,8) = 0,14 \end{cases} \rightarrow g(0,7) \times g(0,8) < 0$
- Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha \in]0,7; 0,8[$

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x}$

(c) Préciser alors le signe de $g(x)$ sur $] -\infty; 0[\cup] 0; 1[$

x	$-\infty$	0	α	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+	-	
$g(x)$	$0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$ 0	$+\infty$	$+\infty \searrow 0$

D'après le tableau de variation :

- Sur $] -\infty ; 0[\cup] \alpha ; 1[; g(x) \geq 0$
- Sur $] 0 ; \alpha] ; g(x) \leq 0$

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. (a) Donner l'ensemble de définition D_f de f .

- soit $f_1(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} \rightarrow f_1 \exists \text{ sssi } x \geq 1 \rightarrow D_{f_1} = [1; +\infty[$

- Soit $f_2(x) = (x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| \rightarrow f_2 \exists \text{ sssi } \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

- $\rightarrow D_{f_2} =]-\infty; 0[\cup]0; 1[$

- **$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = \mathbb{R}^*$**

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1) \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

(b) Montrer que pour $x \in]-\infty; 0[$ on a $f(x) = (x-1) \ln \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)$.

- Pour tout $x \in]-\infty; 0[$ $f(x) = (x-1) \ln \left| \frac{x}{x-1} \right|$
- D'après la partie A on sait que pour tout $x \in]-\infty; 0[$; $\left| \frac{x}{x-1} \right| = \frac{x}{x-1}$
- or $1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$
- Alors pour **tout** $x \in]-\infty; 0[$ **$f(x) = (x-1) \ln \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)$**



Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1) \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

(c) Déterminer la limite de f en $-\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) \ln \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)$

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \end{cases} \rightarrow \text{par produit on a FI}$
 $\text{par composé } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = 0$

- Levons l'indétermination :

- On pose $t = \frac{1}{x-1} \rightarrow x - 1 = \frac{1}{t} \rightarrow x = \frac{1}{t} + 1 \rightarrow \begin{cases} \text{si } x \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) \ln \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(1 + t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$
- **$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$**



Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1) \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

(d) Montrer que pour $x \in]0; 1[$ on a $f(x) = (x-1) \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)$.

- Pour tout $x \in]0; 1[$ $f(x) = (x-1) \ln \left| \frac{x}{x-1} \right|$
- D'après la partie A on sait que tout $x \in]0; 1[$, $\left| \frac{x}{x-1} \right| = \frac{x}{1-x}$
- $\rightarrow f(x) = (x-1) \ln \left(\frac{x}{1-x} \right) = (x-1) \ln x - (x-1) \ln(1-x)$
- **$f(x) = (x-1) \ln x + (1-x) \ln(1-x)$**



Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

(e) Déterminer la limite de f en 1^-

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)\ln x + (1-x)\ln(1-x)$

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)\ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)\ln(1-x) \rightarrow (\text{on pose } X = 1-x) \rightarrow \lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0 \end{cases}$

- Par somme **$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$**



Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1) \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

(f) Étudier la continuité de f en 1.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} - x}{e^x} = \frac{e^0 - 1}{e} = 0 = f(1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

• Conclusion : f est continue en 1.



Partie B

(g) Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter les résultats.

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)\ln x + (1-x)\ln(1-x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x - \ln(1-x)$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 1-x = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty \\ \text{par composé } \lim_{x \rightarrow 1^-} -\ln(1-x) = +\infty \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = +\infty$$

• f n'est pas dérivable à gauche de 1.

Partie B

(g) Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter les résultats.

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1) \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{e^{x-1} - x}{e^x}}{x - 1} = \frac{1}{e^x} \left(\frac{e^{x-1} - x}{x - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e}$: Pour $\frac{e^{x-1} - x}{x - 1}$ on pose $X = x - 1 \rightarrow x = X + 1$; si $x \rightarrow 1^+$; $X \rightarrow 0^+$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} - x}{x - 1} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{e^X - X - 1}{X} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{e^X - 1 - X}{X}$
- $= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{e^X - 1}{X} - \frac{X}{X} = 1 - 1 = 0$
- **f est dérivable en 1^+**

- **Conclusion:** f n'est pas dérivable en 1.
- **Interprétation graphique :** Cf admet au point d'abscisse 1 un point anguleux formé par :
 - Une demi tangente verticale dirigée vers le bas en 1^-
 - Une demi tangente horizontale d'équation $y=0$ en 1^+



Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

2. (a) Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles où f est dérivable.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$

• **Sur $] -\infty; 0[$:** $f(x) = (x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\frac{x}{x-1}} (x-1) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{x-1-x}{(x-1)^2} \times \frac{(x-1)^2}{x} \\ &= \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{(x-1)^2}{x} = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x} = g(x) \end{aligned}$$

• **$f'(x) = g(x)$**

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

2. (a) Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles où f est dérivable.

- Sur $]0; 1[$: $f(x) = (x-1)\ln x + (1-x)\ln(1-x)$

• $f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} - \ln(1-x) + \frac{-1}{1-x}(1-x)$

• $= \ln x - \ln(1-x) + \frac{x-1}{x} - 1 = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{x-1-x}{x}$

• $= \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{1}{x} = g(x)$

• $f'(x) = g(x)$

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

2. (a) Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles où f est dérivable.

Sur $]1; +\infty[$: $f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x}$

• On pose :
$$\begin{cases} U = e^{x-1} - x \rightarrow U' = e^{x-1} - 1 \\ V = e^x \rightarrow V' = e^x \end{cases}$$

•
$$f'(x) = \frac{e^x(e^{x-1} - 1) - e^x(e^{x-1} - x)}{e^{2x}} = \frac{e^x e^{x-1} - e^x - e^x e^{x-1} + x e^x}{e^{2x}}$$

•
$$= \frac{x e^x - e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(x-1)}{e^{2x}}$$

•
$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{e^{2x}}$$

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

(b) Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f .

- Sur $]-\infty; 0[; f'(x) = g(x)$
- Or sur $]-\infty; 0[; g(x) > 0; f'(x) > 0$ et f croissante
- Sur $]0; 1[; f'(x) = g(x)$
- Or :
 - Sur $]0; \alpha]; g(x) \leq 0; f'(x) \leq 0$ et f décroissante
 - sur $[\alpha; 1[; g(x) \geq 0; f'(x) \geq 0$ et f croissante

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x-1} - x}{e^x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

(b) Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f .

Sur $]1; +\infty[; f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{e^{2x}}$

• On sait que pour tout $x \in]1; +\infty[$

• $\rightarrow \begin{cases} e^x > 0 \\ x - 1 > 0 \\ e^{2x} > 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) > 0 \text{ et } f \text{ croissante}$

• Calculons les limites en 0^- et 0^+ :

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$

• $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x-1} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \rightarrow \text{par produit } \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = +\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

$\begin{cases} \text{par composé } \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = -\infty \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) \ln x + (1 - x) \ln(1 - x)$

• $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) \ln(1 - x) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{par somme } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) \ln x + (1 - x) \ln(1 - x) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

TABEAU DE VARIATION DE f

x	$-\infty$	0	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+	+
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$		$+\infty \searrow f(\alpha)$	$f(\alpha) \nearrow 1$	

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $] - \infty; 0[$

1. Montrer que h réalise une bijection de $] - \infty; 0[$ vers un intervalle J à déterminer.
2. Calculer $h(-1)$.
3. h^{-1} est-elle dérivable en $2\ln 2$? Si oui calculer $(h^{-1})'(2\ln 2)$
4. Tracer $(C_{h^{-1}})$

0,5pt

0,25pt

0,5pt

0,5pt

• h est continue et strictement croissante sur $] - \infty; 0[$ donc h est une bijection de $] - \infty; 0[$ vers $h(] - \infty; 0[) =]1; +\infty[$

• $J =]1; +\infty[$



Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $] - \infty; 0[$

1. Montrer que h réalise une bijection de $] - \infty; 0[$ vers un intervalle J à déterminer.
2. Calculer $h(-1)$.
3. h^{-1} est-elle dérivable en $2\ln 2$? Si oui calculer $(h^{-1})'(2\ln 2)$
4. Tracer $(C_{h^{-1}})$

0,5pt

0,25pt

0,5pt

0,5pt

$$\bullet h(x) = (x - 1) \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

$$\bullet h(-1) = -2 \ln \left(\frac{-1}{-2} \right) = -2(-\ln 2) = 2\ln 2$$

$$\bullet h(-1) = 2\ln 2$$



Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 0[$

1. Montrer que h réalise une bijection de $] -\infty; 0[$ vers un intervalle J à déterminer.
2. Calculer $h(-1)$.
3. h^{-1} est-elle dérivable en $2\ln 2$? Si oui calculer $(h^{-1})'(2\ln 2)$
4. Tracer $(C_{h^{-1}})$

0,5pt

0,25pt

0,5pt

0,5pt

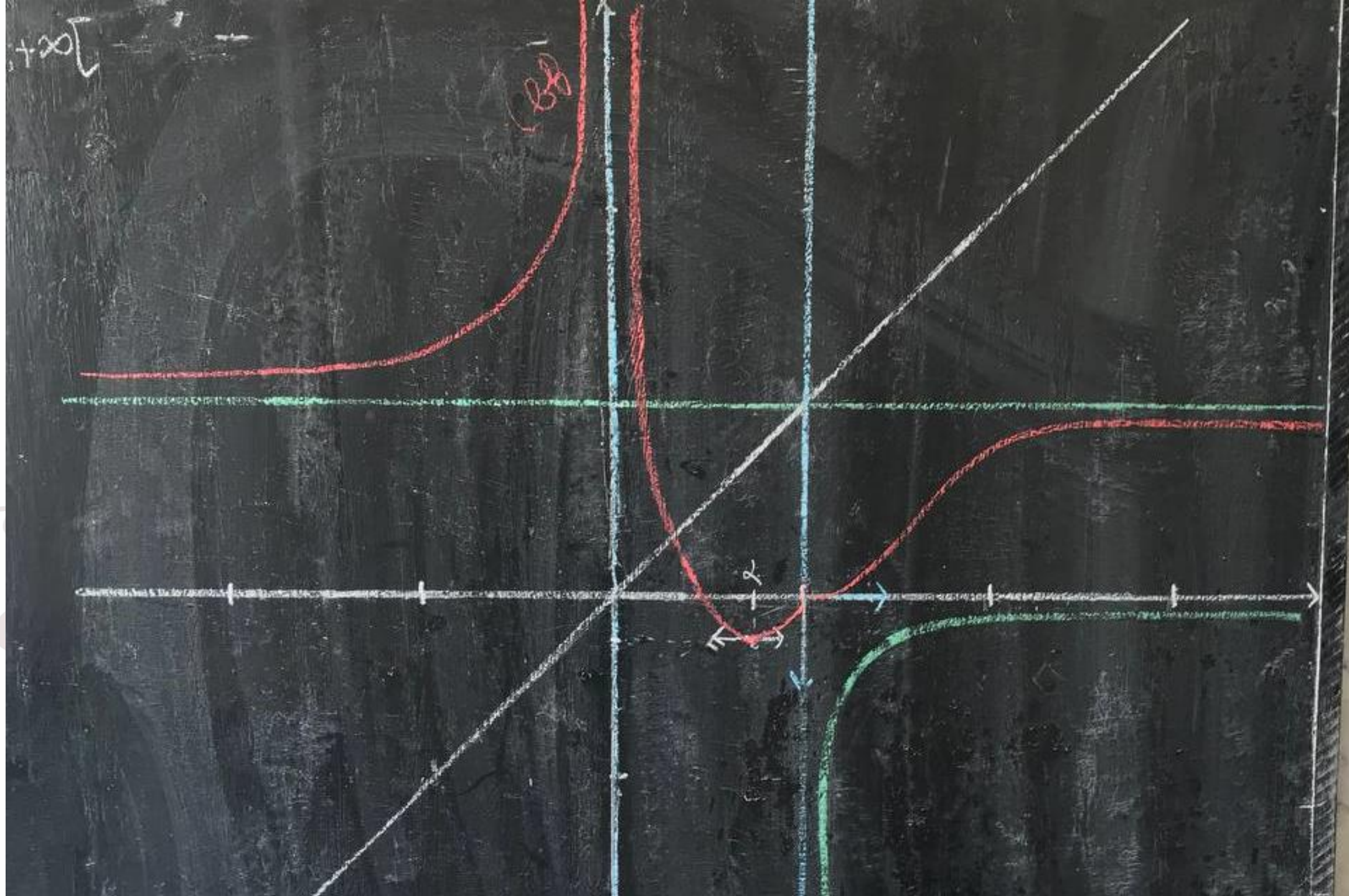
$$\bullet h'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x}$$

$$\bullet h'(-1) = -\ln 2 + 1 \neq 0$$

• Donc h^{-1} est dérivable en $2\ln 2$ et :

$$\bullet (h^{-1})'(2\ln 2) = \frac{1}{h'(-1)} = \frac{1}{1-\ln 2}$$





COURS DE RENFORCEMENT & REMISE À NIVEAU

COURS PRÉSENTIEL
COURS EN LIGNE

DE LA 6ÈME À LA TERMINALE

MATHS
PC
SVT



77 106 98 79 - 76 312 52 24

