

Partie A : On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = -2x + 4$.

- ❶ Déterminer la fonction affine p solution de (E) . (0,5 pt)
- ❷ Montrer qu'une fonction h est solution de (E) si et seulement si $h - p$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y'' - 2y' + y = 0$. (0,5 pt)
- ❸ Résoudre (E') . En déduire les solutions de (E) .
- ❹ Déterminer la solution h de (E) vérifiant $h(1) = 0$ et $h'(1) = 0$.

PARTIE B: ANALYSE

Partie B : Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty$ par $g(x) = 3 - x - 2 \ln x$.

- ❶ Dresser le tableau de variations de g . (0,75 pt)
- ❷ (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$. (0,5 pt)
(b) Vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$. (0,25 pt)
- ❸ En déduire le signe de $g(x)$ sur $[1; +\infty[$. (0,25 pt)

Partie C : Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

- ❶ (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
 (b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,25 pt)
 (c) Montrer que $(D) : y = -2x$ est asymptote à $(\mathcal{C}f)$ en $-\infty$. (0,25 pt)
 (d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,25 pt+0,25 pt)
- ❷ (a) Etudier la continuité de f en 1. (0,25 pt)
 (b) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter les résultat obtenus. (0,5 pt+0,5 pt)
- ❸ (a) Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable. (0,25 pt+0,5 pt)
 (b) Dresser le tableau de variations de f . (0,5 pt)
- ❹ Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{2\alpha^2}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près. (0,5 pt+0,25 pt)
- ❺ Tracer $(\mathcal{C}f)$. (0,75 pt)
- ❻ Soit λ un réel strictement supérieur à 1 et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C}f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.
 (a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx$. (0,75 pt)
 (b) Montrer que $\mathcal{A}(\lambda) = \ln \lambda - \frac{\ln \lambda}{\lambda}$. (0,5 pt)
 (c) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$. (0,25 pt)



Partie A : On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = -2x + 4$.

❶ Déterminer la fonction affine p solution de (E).

- Soit p la solution affine de (E):
- $p(x) = ax + b \rightarrow p' = a; p'' = 0$
- On a donc: $0 - 2a + ax + b = ax - 2a + b$
- $= -2x + 4$
- Par identification:
$$\begin{cases} a = -2 \\ -2a + b = 4 \rightarrow b = 0 \end{cases}$$
- **Conclusion:** $p(x) = -2x$

Partie A : On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = -2x + 4$.

② Montrer qu'une fonction h est solution de (E) si et seulement si $h - p$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + y = 0$.

- h solution de (E): $h'' - 2h' + h = -2x + 4$
- On a dans (E') : $(h - p)'' - 2(h - p)' + h - p = 0$
- $h'' - p'' - 2h' + 2p' + h - p = 0$
- $\rightarrow h'' - 2h' + h - (p'' - 2p' + p) = 0$
- Pour que $y'' - 2y' + y = 0$ il faut que
- $h'' - 2h' + h = (p'' - 2p' + p) = -2x + 4$ donc $h - p$ solution de (E')
- **Conclusion:** h est solution de (E) sssi $h - p$ est solution de (E')



Partie A : On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = -2x + 4$.

② Montrer qu'une fonction h est solution de (E) si et seulement si $h - p$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + y = 0$.

③ Résoudre (E'). En déduire les solutions de (E).

④ Déterminer la solution h de (E) vérifiant $h(1) = 0$ et $h'(1) = 0$.

- Équation caractéristique de (E') : $r^2 - 2r + 1 = 0 \rightarrow (r - 1)^2 = 0$
- On a une solution double qui est 1
- Les solutions de (E') sont : $f(x) = (Ax + B)e^x$
- Sachant que les solutions de (E') sont sous la forme $h - p$
- On a : $h - p = (Ax + B)e^x \rightarrow h = (Ax + B)e^x + p = (Ax + B)e^x - 2x$
- Solution particulière vérifiant $h(1)=0$ et $h'(1)=0$
- $$\begin{cases} h(1) = 0 \rightarrow (A + B)e - 2 = 0 \\ h'(x) = Ae^x + (Ax + B)e^x - 2 \rightarrow h'(1) = Ae + (A + B)e - 2 = 0 \end{cases}$$
- On en tire : $Ae = 0 \rightarrow A = 0; B = 2e^{-1}$
- $h_p = 2e^{x-1} - 2x$

Partie B : Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = 3 - x - 2 \ln x$.

- ❶ Dresser le tableau de variations de g .
- ❷ (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.
(b) Vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$.
- ❸ En déduire le signe de $g(x)$ sur $[1; +\infty[$.

- $D_g: [1; +\infty[$
- $g(1) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - x - 2 \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{3}{x} - 1 - \frac{2 \ln x}{x} \right) = -\infty$
- g est dérivable sur $[1; +\infty[$
- $g'(x) = -1 - \frac{2}{x} = -\left(1 + \frac{2}{x}\right) < 0$ sur $[1; +\infty[$ donc g décroissante

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	2	$-\infty$

Partie B : Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = 3 - x - 2 \ln x$.

- ① Dresser le tableau de variations de g .
- ② (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.
(b) Vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$.
- ③ En déduire le signe de $g(x)$ sur $[1; +\infty[$.

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	2	$-\infty$

- 2)a- g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ donc g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers $]-\infty; 2]$ d'où l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.
- b) $\begin{cases} g(1,8) = 0,02 \\ g(1,9) = -0,18 \end{cases} \rightarrow g(1,8) \times g(1,9) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires **$1,8 < \alpha < 1,9$**
- 3) D'après le tableau de variation:
 - **Sur $[1; \alpha]; g(x) \geq 0$**
 - **Sur $[\alpha; +\infty[; g(x) \leq 0$**

Partie C : Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

❶ (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

- On pose:

- $f_1(x) = 2e^{x-1} - 2x$

- $f_1 \exists \text{ sssi } x < 1 \rightarrow D_{f_1} =]-\infty; 1[$

- On pose $f_2(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2}$

- $f_2 \exists \text{ sssi } x \geq 1 \rightarrow D_{f_2} = [1; +\infty[$

- $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = \mathbb{R}$

Partie C : Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

(b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x-1} - 2x$
- $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \text{par composé: } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty \end{array} \right.$
- Par somme **$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$**

Partie C : Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

(c) Montrer que $(D) : y = -2x$ est asymptote à $(\mathcal{C}f)$ en $-\infty$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x-1} - 2x + 2x = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x-1} &= 0 \end{aligned}$$

• **Conclusion: la droite (D) est asymptote oblique à Cf en $-\infty$**



Partie C : Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

(d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

• **Conclusion:** l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}f$ en $+\infty$



Partie C : Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

❷ (a) Etudier la continuité de f en 1.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2e^{x-1} - 2x = 2 - 2 = \mathbf{0}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1+\ln x}{x^2} = \frac{1-1+\ln 1}{1} = \mathbf{0} = \mathbf{f(1)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \mathbf{f(1)}$$

• Conclusion: **f est continue en 1**



Partie C : Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm)

(b) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter les résultats obtenus.

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2e^{x-1} - 2x}{x - 1}$
- On pose $X = x - 1$; si $x \rightarrow 1^-$; $X \rightarrow 0^-$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2e^{x-1} - 2x}{x - 1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{2e^X - 2(X+1)}{X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{2(e^X - X - 1)}{X}$
- $= \lim_{X \rightarrow 0} 2 \left(\frac{e^X - 1}{X} - 1 \right) = 2(1 - 1) = 0$
- Conclusion partielle: **f est dérivable en 1**

Partie C : Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm)

(b) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter les résultats obtenus.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x-1+\ln x}{x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1+\ln x}{(x-1)x^2}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{\ln x}{x-1} \right) = 1(1 + 1) = 2$$

• **Conclusion partielle: f est dérivable en 1^+**

$$\bullet f'_g(1) \neq f'_d(1)$$

• **Conclusion générale: f n'est pas dérivable en 1**

Partie C : Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

(b) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter les résultats obtenus.

- **Interprétation graphique:**

- Cf admet au point d'abscisse 1 un point anguleux formé par:
- Une demi tangente horizontale d'équation $y = 0$ en 1^-
- Une demi tangente oblique d'équation $y = 2x - 2$ en 1^+



Partie C : Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm)

$$g(x) = 3 - x - 2 \ln x.$$

③ (a) Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable.

- f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$

- Sur $] -\infty; 1[$

- $f'(x) = 2e^{x-1} - 2$

- $f'(x) = 2(e^{x-1} - 1)$

- Sur $]1; +\infty[$

- $$f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(x-1+\ln x)}{x^4} = \frac{x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x \ln x}{x^4} =$$

$$\frac{-x^2 + 3x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(3 - x - 2 \ln x)}{x^4}$$

- $f'(x) = \frac{xg(x)}{x^4}$

Partie C : Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

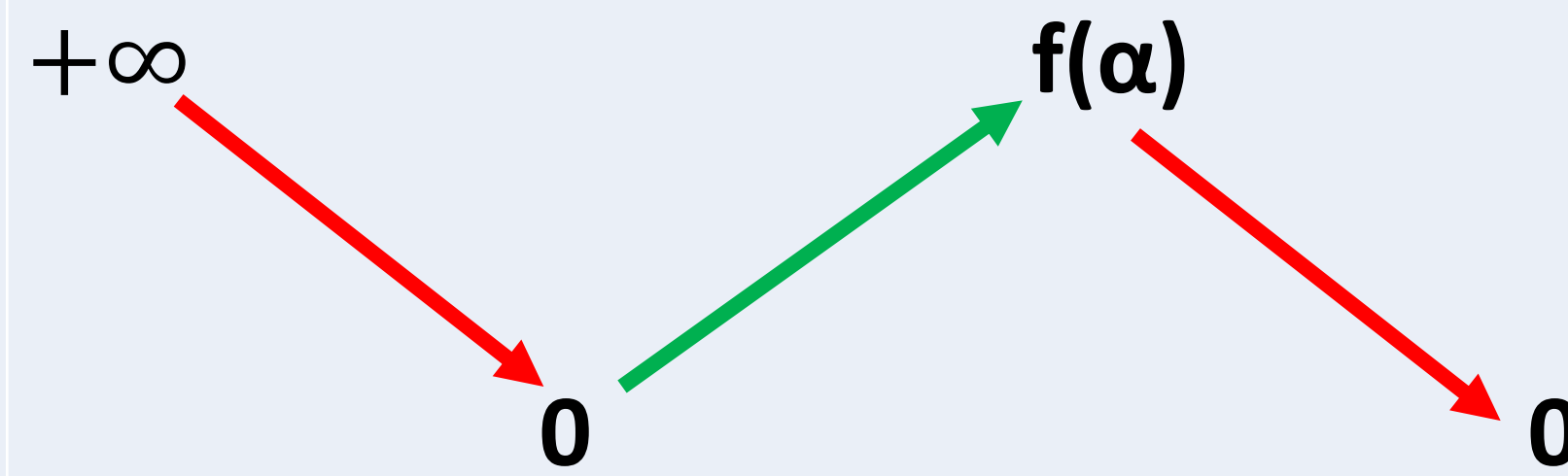
On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

(b) Dresser le tableau de variations de f .

- Sur $]-\infty; 1[$
- $f'(x) = 2(e^{x-1} - 1)$
- On pose: $f'(x)=0$; $e^{x-1} - 1 = 0 \rightarrow e^{x-1} = 1 = e^0$
- $\rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$
- Pour tout $x < 1$; $e^{x-1} - 1 < 0 \rightarrow f'(x) < 0$ et f décroissante
- Sur $]1; +\infty[$; $f'(x) = \frac{xg(x)}{x^4}$
- x et x^4 étant positifs le signe dépend de g :
- Sur $[1; \alpha]$; $g(x) \geq 0 \rightarrow f'(x) \geq 0$ et f croissante
- Sur $[\alpha; +\infty[$; $g(x) \leq 0 \rightarrow f'(x) \leq 0$ et f décroissante

TABEAU DE VARIATION DE f

	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	
$f(x)$	$+\infty$	0	$f(\alpha)$	0



$$g(x) = 3 - x - 2 \ln x.$$

Partie C : Soit f la fonction numérique définie par

$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm)

④ Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha+1}{2\alpha^2}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.

$$\bullet g(\alpha) = 3 - \alpha - 2 \ln \alpha = 0 \rightarrow \ln \alpha = \frac{3-\alpha}{2}$$

$$\bullet f(\alpha) = \frac{\alpha-1+\frac{3-\alpha}{2}}{\alpha^2} = \frac{2\alpha-2+3-\alpha}{2\alpha^2} \rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha+1}{2\alpha^2}$$

• Déduisons-en un encadrement de $f(\alpha)$

$$\bullet 1,8 < \alpha < 1,9 \rightarrow \begin{cases} 2,8 < \alpha + 1 < 2,9 \\ 6,48 < 2\alpha^2 < 7,22 \\ 0,13 < \frac{1}{2\alpha^2} < 0,15 \end{cases} \rightarrow 0,364 < f(\alpha) < 0,435$$

$$\bullet 0,3 < f(\alpha) < 0,4$$

⑥ Soit λ un réel strictement supérieur à 1 et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C}f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

(a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx$. (0,75 pt)

• On pose:
$$\begin{cases} U' = \frac{1}{x^2}; U = -\frac{1}{x} \\ V = \ln x; V' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

•
$$\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^\lambda - \int_1^\lambda -\frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^\lambda - \left[\frac{1}{x} \right]_1^\lambda$$

•
$$\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + 1$$

Partie C : Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - 2x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

⑥ Soit λ un réel strictement supérieur à 1 et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C}f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

(b) Montrer que $\mathcal{A}(\lambda) = \ln \lambda - \frac{\ln \lambda}{\lambda}$.

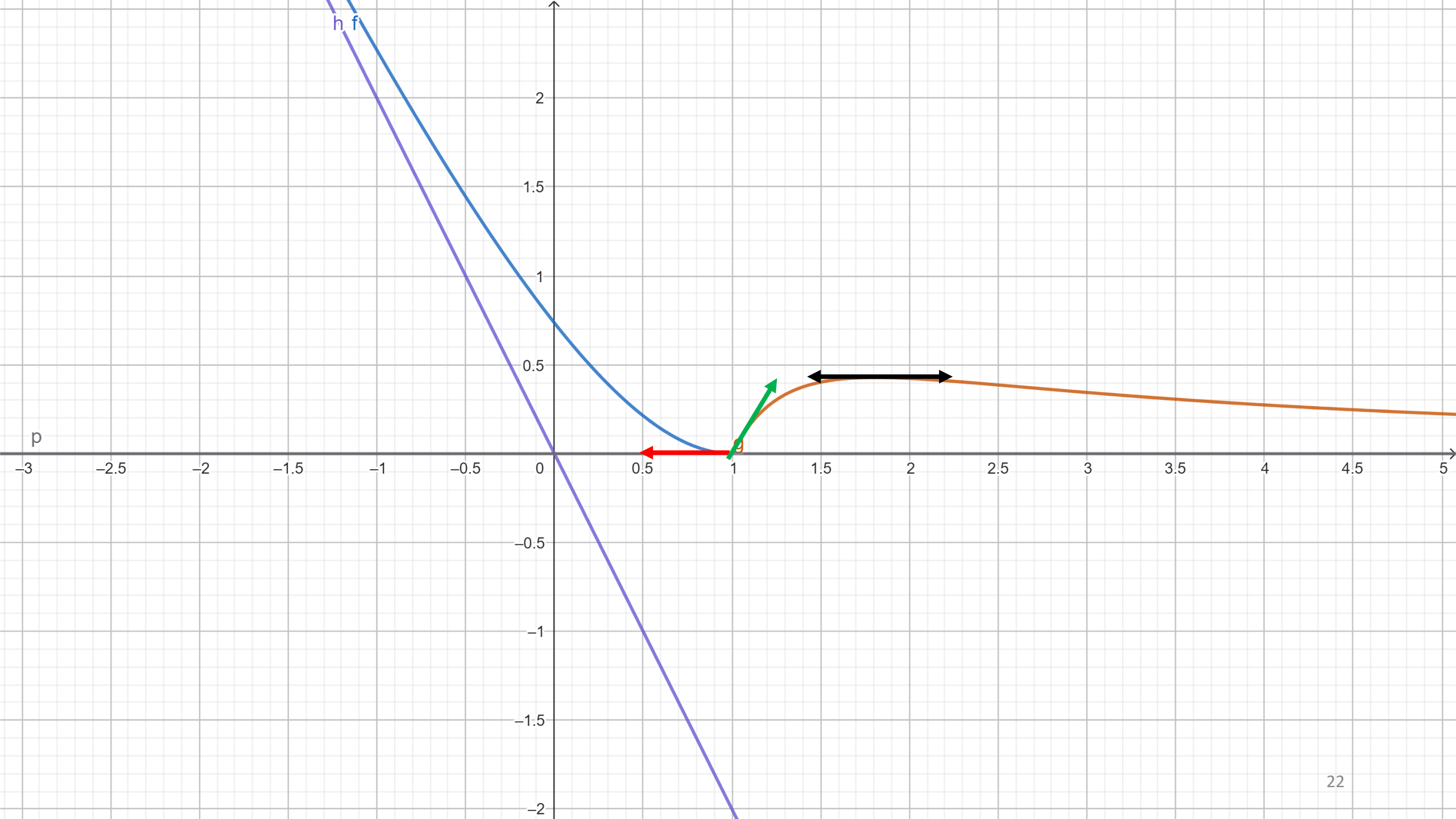
(c) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

$$\bullet A(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{x-1+\ln x}{x^2} dx = \int_1^\lambda \frac{1}{x} dx - \int_1^\lambda \frac{1}{x^2} dx + \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\bullet = [\ln x]_1^\lambda - \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\lambda - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + 1$$

$$\bullet = \ln \lambda + \frac{1}{\lambda} - 1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + 1 \rightarrow A(\lambda) = \ln \lambda - \frac{\ln \lambda}{\lambda}$$

$$\bullet \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$$



COURS DE RENFORCEMENT & REMISE À NIVEAU



COURS PRÉSENTIEL
COURS EN LIGNE

DE LA 6ÈME À LA TERMINALE

MATHS
PC
SVT



77 106 98 79 - 76 312 52 24

