

Suites numériques

- Exo I** / Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par : $u_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2}$ et $v_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}$
 On pose $d_n = u_n - v_n$ et $w_n = u_n + v_n$, $n \in \mathbb{N}$.
- 1°) montrer que (d_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme. Exprimer d_n en fonction de n .
 - 2°) montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme. Exprimer w_n en fonction de n .
 - 3°) En déduire les sommes $S_n = \sum_{i=0}^n u_i$ et $S'_n = \sum_{i=0}^n v_i$.

Exercice II / Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$

On pose $v_n = u_n - 1$

- 1°) Calculer les 4 premiers termes de (v_n)
- 2°) montrer que (v_n) est une suite géométrique
- 3°) montrer que (v_n) est positive et décroissante
- 4°) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 5°) Calculer $S_{2;4} = v_2 + v_3 + v_4$. Calculer $S_{0;n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{0;n}$

Exercice III / Fanta a reçu d'un parent la somme de 100.000 F. Elle a déposé cette somme dans une banque le 1^{er} jan. 2009 à intérêt composé (intérêt produit s'ajoute au capital) au taux annuel de 5% en vue d'acheter une moto de 300.000 F.
 A partir de quelle année pourra-t-elle acheter la moto sachant qu'elle ne dispose que de cette somme?

- Exercice IV** / Une suite (u) est définie par son premier terme u_0 ($u_0 > 0$) et par la relation de récurrence suivante : $u_{n+1} - u_n = -0,04 u_n$
- 1°) Démontrer que (u) est une suite géométrique de raison q que l'on précisera
 - 2°) Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n
 - 3°) Le 1^{er} janvier 1999 la population d'une commune rurale était de 3000 hts.
 On admet que cette population a diminué de 4% par an.
 - a) Quelle sera la population de cette commune au 1^{er} jan. 2005? au 1^{er} jan. 2010?
 - b) A partir de quelle année la population chetara t-elle à moins de 2000 personnes?

EXERCICE V / (u) est une suite définie par $u_0 = -1$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculer u_1 , u_2 et u_3

b) (v) est une suite définie par $v_n = u_n - 2n + 4$, $n \in \mathbb{N}$.

montrer que (v) est une suite géométrique.

c) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n . Calculer la limite de (u) .

Exercice VI / En jan. 1985, le prix du coton était de 100.000 F CFA la tonne. Durant les 6 premiers mois de 1985, le prix a augmenté de 4,5% par mois.

A partir du 30 juin, le prix se sera accru de 10 chaque mois.

- 1) Quel était le prix maximum du coton ?
- 2) Quel était le prix en jan. 1986 ? ~~en jan.~~
- 3) En quel mois la tonne de coton coûtera-t-elle encore 100.000 F CFA ?
- 4) Faire une représentation graphique des résultats.

EXERCICE VII

Au 1^{er} jan. 2000 la population d'une ville était de 50.000 habitants. Chaque année cette population augmente de 2% et 500 personnes supplémentaires viennent s'installer définitivement dans la ville. On désigne par U_n la population de la ville au 1^{er} jan. de l'année $(2000+n)$.

- 1) Déterminer la population de la ville au 1^{er} jan. 2001; au 1^{er} jan. 2002
- 2) On se propose d'exprimer, pour tout entier naturel n , U_n en fonction de n
 - a) Exprimer, pour tout entier naturel n , U_n en fonction de U_{n-1} puis U_{n+1} en fonction de U_n
 - b) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $V_n = U_n + 2500$. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - c) Exprimer V_n en fonction de n , puis U_n en fonction de n
- 3) Quelle sera la population de la ville au 1^{er} jan. 2010? au 1^{er} jan. 2020?
- 4) Au premier jan. de quelle année la population de la ville dépassera-t-elle 100.000 hts ?

EXERCICE VIII

Une personne loue une maison à partir du 1^{er} jan. 1991. Elle a le choix entre 2 contrats. Dans les 2 cas, le loyer annuel initial est de 240.000 F et le locataire s'engage à occuper la maison pendant 9 années complètes.

Contrat n°1

Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.

- a) Calculer le loyer U_1 payé lors de la 2^e année.
- b) Exprimer U_n (loyer en 1991+n) en fonction de U_0 . Calculer U_9 .
- c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années du contrat.

Contrat n°2

Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 15.000 F de loyer de l'année précédente.

- a) Calculer le loyer V_1 payé lors de la 2^e année.
 - b) Exprimer V_n , loyer payé lors de la $(n+1)^e$ année, en fonction de V_0 . Calculer V_9 .
 - c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années du contrat.
- Quel est le contrat le plus avantageux pour le propriétaire? pour le locataire?