

# Travaux dirigés de Mathématique

## LES SUITES NUMERIQUES

$$K_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Professeur de Mathématiques & Sciences Physiques au lycée « Soleil d'Afrique »

ANNÉE ACADÉMIQUE 2021-2022

### Exercice 1

1) Etudier la convergence de la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

- $U_n = n - e^n$ ;
- $U_n = \frac{1-n}{n^2+n+2}$ ;
- $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ;
- $U_n = 2n - \ln n$ ;
- $U_n = \frac{e^{u_n}}{1+U_n}$ ;

2) Etudier la limite de la suite  $(u_n)$

- $U_n = \cos n - n$ ;
- $U_n = \ln(n) + (-1)^n$ ;
- $U_n = \frac{n+\sin(n)}{n^2+1}$ ;
- $U_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin(n)$ ;
- $U_n = \left[\frac{1}{2} \sin(n^2 + 1)\right]^n$ ;
- $U_n = \frac{\sin \sqrt{n} - 3n}{2n + \cos \sqrt{n^2-1}}$ ;

### Exercice 2

Montrer que la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$U_n = \frac{2 - \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}} \text{ est bornée.}$$

### Exercice 3

$$U_n = \frac{1}{2^n} \text{ Déterminer } S_n \text{ en fonction de } n, \text{ puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

### Exercice 4

Calculer la somme des premiers 100 termes de la suite  $U_n = n$

### Exercice 5

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

Montrer que la suite  $(V_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $V_n = e^{U_n}$  est une suite géométrique dont-on précisera la raison.

### Exercice 6

$(U_n)$  est la suite définie par :  $U_0 = 2$  et pour entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = -3U_n + 2$ .

On définit la suite  $(V_n)$  par :  $V_n = U_n - \frac{1}{2}$

- Montrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique. Exprimer  $V_n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculer  $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$

### Exercice 7

Déterminer la suite  $(U_n)$  des réels définie par la relation récurrence  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} - U_n = 0$  et les conditions initiales  $U_0 = 1$  et  $U_1 = 0,5$

### Exercice 8

Calculer en fonction de  $n$  dans les cas suivants  $U_0 = 1$

$$U_1 = 1, U_{n+2} = \frac{7}{2} U_{n+1} + 2U_n$$

### Exercice 9

$a$  étant un réel, on définit la suite  $(U_n)$  par son premier termes  $U_0 \in \mathbb{R}$  et la relation de récurrence :  $U_{n+1} = U_n + a \forall n \in \mathbb{N}$ .

1. Exprimer  $U_n$  en fonction de  $a$ ,  $n$  et  $U_0$ .
2. Quelle est la limite de  $(U_n)$
3. Calculer  $U_0 + U_1 + \dots + U_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 10

$(U_n)$  Une suite arithmétique telle que  $U_4 = -1$ ;  $U_9 = 14$

1. Déterminer la raison  $r$ .
2. Calculer  $U_0$  puis  $U_{40}$
3. Ecrire  $U_n$  en fonction de  $n$

### Exercice 11

Soit  $q$  un entier au moins égale à 2. Pour tout  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $U_n = \cos \frac{2\pi n}{q}$

Montrer que  $U_{n+q} = U_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 12

On considère les suites numériques  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$

Par : 
$$\begin{cases} U_0 = e^3 \\ U_{n+1} = e\sqrt{U_n} \text{ et } V_n = \ln(U_n) - 2 \end{cases}$$

1. Calculer  $U_1$  et  $V_1$
2. Démontrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont-on précisera la raison et le premier terme.
3. Ecrire  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction  $n$ .
4. Etudier la convergence des suites  $(V_n)$  et  $(U_n)$

### Exercice 13

Suit nombre complexe  $a = -1 - i$  et  $(Z_n)$  la suite définie par :

Par : 
$$\begin{cases} Z_0 = 0 \text{ et } Z_1 = i \\ Z_{n+1} = (1 - a)Z_n + aZ_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Déterminer  $Z_2$  et  $Z_3$  sous forme algébrique
2. Soit  $(U_n)$  la suite définie par :  $U_n = Z_{n+1} - Z_n \forall n \in \mathbb{N}^*$ 
  - a) Déterminer que  $U_0$  et  $U_1$  sous forme algébrique
  - b) Démontrer que  $(U_n)$  est géométrique de raison  $-a$
  - c) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$  et  $a$ .
3. Soit  $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ . Exprimer  $S_n$  en fonction de  $Z_n$ .  
En déduire que  $Z_n = -1 + (1 + i)^n$ .

### Exercice 14

Soit les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définie

Par : 
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{U_{n+1}} \text{ et } V_n = \frac{1}{U_n} \end{cases}$$

1. Calculer  $U_1$ ;  $U_2$ ;  $V_0$  et  $V_1$
2. Montrer que  $(V_n)$  est une suite arithmétique dont indiquera sa raison et son premier terme.
3. Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ , puis  $V_n$  en fonction de  $n$ .

- Exprimer en fonction de  $n$ ,  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$
- Etudier la convergence des suites  $(U_n)$ ,  $(V_n)$  et  $S_n$ .

### Exercice 15

Soit les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définie

$$\text{Par : } \begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n - 2 \text{ et } V_n = U_n + 3 \end{cases}$$

- Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont-on précisera sa raison et son premier terme.
- Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ , puis  $V_n$  en fonction de  $n$ .
- Déterminer en fonction de  $n$ ,  $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$  et  $S_n' = U_1 + U_2 + \dots + U_n$
- Calculer la limite  $V_n$  ;  $U_n$ ,  $S_n$  et  $S_n'$

### Exercice 16

Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 4$  et  $U_{n+1} = \sqrt{3U_n - 2}$

- Montrer par récurrence que  $U$  est minoré par 2.
- Etudier le monotonie de la suite  $U$ .
- En déduire que  $U$  converge vers  $U_n$  nombre réel dont-on déterminer sa valeur.

### Exercice 17

On considère la suite  $(U_n)$  définie

$$\text{Par : } \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_{n+2}} \end{cases}$$

- Démontrer que la suite  $(V_n)$  définie par :  $V_n = \frac{1}{U_n}$  est une suite arithmétique dont on précisera sa raison et son première terme.
- Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculer  $V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 18

Soit la suite  $(U_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $\begin{cases} U_1 = 6 \\ 3U_{n+1} - 2U_n = 3 \end{cases}$

- Calculer  $U_2$  ;  $U_3$  et  $U_4$
- On appelle  $(V_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $V_n = U_n - 3$ .
  - Calculer  $V_1$  et montrer que l'on a  $3V_{n+1} - 2V_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$
  - Quelle est la nature de la suite  $V_n$  ?
- Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$  et indique la limite de  $V_n$  lors que  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- En déduire l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 19

La suite  $U$  est définie par :  $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n - 1}{U_n + 3} \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$

- Montre que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n \neq 1$ .
- a) on pose  $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$ . Montrer que la suite  $(V_n)$  est une suite arithmétique dont – on précisera la raison et le premier terme.
  - Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
  - Exprimer en suite  $U_n$  en fonction de  $n$ .

3) calculer  $\lim U_n$ .

### Exercice 20

Soit la suite de terme général.  $U_n = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

1. déterminer deux constantes, a et b telles que :  $U_n = \frac{a}{2n+1} + \frac{a}{2n+3}$ .
2. En déduire une expression simple de somme  $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ .
3. Trouve la limite de  $S_n$  lors que n tend vers  $+\infty$

### Exercice 21

Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par :  $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{6U_n}{U_n+6} \end{cases}$

1. Démontrer que la suite  $(V_n)$  définie par :  $V_n = \frac{1}{U_n}$  est une suite arithmétique dont – on précisera la raison et le terme.
2. Etudier la monotonie de la suite  $(V_n)$
3. Exprimer  $V_n$  en fonction de n.
4. Calculer les sommes suivantes :  $S = V_0 + V_1 + \dots + V_n$  et  $S = V_2 + V_3 + \dots + V_{29}$ .

### Exercice 22

Soit  $(U_n)$  la suite définie par :  $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = -1 \\ U_{n+2} = 4U_{n+1} - 4U_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1. Calculer  $U_2$  et  $U_3$
2. Montrer qu'il existe un nombre réel a tel que la suite  $(V_n)$  définie par  $V = U_{n+1} - aU_n$ , suit géométrique.
3. En déduire  $(V_n)$  en fonction de n.
4. Montrer que la suite  $(W_n)$  définie pour tout entier naturel n par  $W_n = \frac{U_n}{2^n}$  est arithmétique.
5. En déduire  $W_n$  puis  $U_n$  en fonction de n.

### Exercice 23

Soit la suite numérique V est définie par :  $\begin{cases} V_1 = 6 \\ 5V_{n+1} = V_{n+16} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

1. Démontrer que la suite V est minorée par 4 et décroissante
2. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose  $W_n = V_n - a$ , a étant un nombre réel donné.
  - a) Déterminer le nombre réel a tel que la suite W de terme général  $W_n$  soit géométrique dont-on précisera la raison et le premier terme.
  - b) On pose a = 4, Calculer  $W_n$  puis  $V_n$  en fonction de n
  - c) Sachant que  $S_n = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n$  et  $T_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$  Calculer  $S_n$  puis  $T_n$  en fonction de n.

### Exercice 24

La Suite  $(U_n)$  est définie par  $U_0 = 2$  et pour tout n de  $\mathbb{N}$ ;  $U_{n+1} = \frac{5U_n - 1}{U_n + 3}$ .

- 1) Montrer que, pour tout n de  $\mathbb{N}$   $U_n \neq 1$ .

- 2) a) On pose  $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$ . Montrer que  $(V_n)$  est une suite arithmétique dont – on précisera la raison et le premier terme  $V_n$ .  
b) En déduire  $V_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) a) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $V_n$ .  
b) En déduire  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 4) Calculer la limite de  $U_n$ .

### Exercice 25

On définit la suite  $(U_n)$  par  $U_0 = 1$  et pour tout  $n$  entier naturel :  $U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 2$ .

1. Calculer  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$ .
2. Déterminer un réel  $a$  tel que la suite  $(V_n)$  définie par :  $V_n = U_n + a$  soit une suite géométrique.
3. Dans tout la suite, on pose  $V_n = U_n - 5$ .  
a) Calculer  $V_0$ , puis donner l'expression de  $V_n$  en fonction de  $n$ .  
b) En déduire l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$ .
4. On pose  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$  et  $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ .  
a) Quelle est l'expression de  $S_n$  en fonction ? Etudier la limite de la suite  $(S_n)$ .  
b) Quelle est l'expression de  $T_n$  en fonction de  $n$ .  
Etudier la limite de la suite  $(T_n)$ .

### Exercice 26

On considère la suite des nombres réels  $(U_n)$  pour tout  $n$  entier naturel, définie par :  $U_0 = \frac{2}{3}$  et pour tout  $n$  entier naturel,  $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{6}n + \frac{1}{3}$ .

- 1) Calculer  $U_1$  et  $U_2$ .
- 2) Soit la suite  $(V_n)$  pour tout  $n$  entier naturel définie par :  $V_n = 2U_n - \frac{2}{3}n$ .  
a) Calculer  $V_0$ ,  $V_1$  et  $V_2$ .  
b) Montrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique dont – on précisera la raison.
- 3) Calculer en fonction de  $n$   $V_n$  puis  $U_n$ .
- 4) Etudier la convergence de la suite  $(U_n)$ .

### Exercice 27

On donne la suite numérique  $U$  définie par : 
$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1+3U_n}{5} \end{cases}$$

1. Soit  $V$  la suite de terme général  $V_n = 5U_n - \frac{5}{2}$   
a. Montrer que  $V$  est une suite géométrique dont – on précisera la raison et le premier terme.  
b. Calculer  $V_n$  en fonction de  $n$ .  
c. Trouver l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$ .  
d. Calculer limite de  $V_n$  lors que tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 28

La suite numérique  $(U_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 0$  et la relation  $U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4}$ .

1. a) montrer par récurrence que  $\forall n \geq 1; 0 < U_n < 1$ .  
b) Montrer que la suite  $(U_n)$  est croissance (on pourra considérer  $U_{n+1} - U_n$ ).

2. on considère la suite  $(V_n)$  définie par : pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 4}$ 
  - a) Montrer que la suite  $(V_n)$  est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
  - b) En déduire la limite de la suite  $(V_n)$ .
3. Exprimer  $U_n$  en fonction de  $V_n$
4. En déduire le comportement à l'infini de la suite  $(U_n)$

#### Exercice 29

Soit  $(U_n)$  une suite définie par :  $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{U_n + 3} \end{cases}$

- 1) Déterminer  $U_1$  et  $U_2$
- 2) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq -1$
- 3) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = \frac{1}{U_n + 1}$  est une suite arithmétique dont-on précisera la raison et le premier terme
- 4) Exprimer en fonction de  $n$ ,  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

#### Exercice 30

- I. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , On pose  $U_n = -2n + 3$ ;  $U_0 = 3$ .
  - a) Montrer que  $(U_n)$  est une suite arithmétique dont-on précisera la raison.
  - b) On pose  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ . Calculer  $S_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) On pose  $V_n = e^{U_n}$ . Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique
  - d) On pose  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ . Calculer  $S_n$  en fonction de  $n$ .
- II. la suite  $(V_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} U_0 = 2 \\ 5U_{n+1} = 2U_n + 5 \end{cases}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 
  - a) démontrer que la suite  $(U_n)$   $n \in \mathbb{N}$  définie par :  $V_n = U_n - \frac{5}{3}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , est une géométrique.
  - b) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ ,
  - c) Calculer en fonction de  $n$  les sommes :  
 $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$  et  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
- III. la suite  $(V_n)$  est définie par :  $\begin{cases} V_0 = -1 \\ V_{n+1} = \frac{4}{4 - V_n} \end{cases}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 
  1. en supposant que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n \neq 2$ , On définit la suite  $(W_n)$  par :  $W_n = \frac{5}{V_n - 2}$ .  
Montrer que  $(W_n)$  est suite arithmétique
  2. en déduire  $W_n$  puis  $V_n$  en fonction de  $n$ .

#### Exercice 31

On considère que la suite  $(U_n)$   $n \in \mathbb{N}$  définie par :  $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5} \end{cases}$

- 1) Calculer  $U_1$  et  $U_2$
- 2) Démontrer que la suite  $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 1}$  est une suite géométrique
- 3) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $V_n$

- 4) exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$
- 5) en déduire limite de  $U_n$
- 6) Calculer  $S_n = V_1 + V_2 \dots + V_n$
- 7) Calculer  $S_4 \quad S_{10}$

### Exercice 32

Soit la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $U_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$

- 1) Déterminer  $U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$
- 2) Démontrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique
- 3) Déterminer la limite de  $U_n$  et en déduire sa variation
- 4) exprimer en fonction de  $n$  de la somme suivante :  $S_n = U_0 + U_1 \dots + U_{n+1}$
- 5) déterminer  $S_4 \quad S_5$

### Exercice 33

Pour tout entier naturel, on pose  $U_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$  et  $V_n = \ln(U_n)$

- 1) .a- Calculer  $U_0, U_1, V_0$  et  $V_1$
- a. Montrer que  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{3}{4}$
- b. Calculer en fonction de  $n$ , la somme suivante :  $S_n = U_0 + U_1 \dots + U_n$
- 2) .a) Vérifier que  $(V_n)$  est suite arithmétique dont-on précisera sa raison. .b) En déduire la variation de la suite  $(V_n)$
- 3) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$