

Exercices d'entraînement

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe : TSE

2025 - 2026

Suites Numériques

Désignation	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Raison	r	q
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Formule explicite	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme	$s_n = \frac{n+1-p}{2}(u_p + u_n)$	$s_n = u_p \frac{1 - q^{n+1-p}}{1 - q}$
si a, b et c sont dans cet ordre en Progression alors	$2b = a + c$	$b^2 = ac$
insérer k nombre entre deux nombres a et b	$r = \frac{b-a}{k+1}$	$q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$
Paramètre	u_p est le terme d'indice p avec $p \in \mathbb{N}$	

Exercice 01

Soit (u_n) une suite arithmétique croissante telle que : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$

- 1) Calcule le premier terme u_0 et la raison r de cette suite, puis exprime le terme général u_n en fonction de n .
- 2) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = 2^{u_n}$.
 - a) Montre que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera v_0 et q .
 - b) Calcule : $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$.

Exercice 2 : Composition RD 2017/2018 (Corrigé dans DONI MATHS TSE)

- I) Soit (U_n) et (V_n) les suites définies pour tout entier n par :

$$U_0 = 9, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \text{ et } V_n = U_n + 6$$
 - 1) a) Montre que (V_n) est une suite géométrique de terme positif.
 - b) Calcule la somme $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ en fonction de n et en déduis la somme $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ en fonction de n
 - c) Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$
- 2) On définit la suite (w_n) par $w_n = \ln V_n$ pour tout n entier.
 - a) Montre que (w_n) est une suite arithmétique
 - b) Calcule $S''_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ en fonction de n et détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} S''_n$
 - c) Calcule le produit $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$ en fonction de n et détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

Exercice 03 : Composition RG 2014/2015 (Corrigé dans DONI MATHS TSE)

- 1) Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2-U_n} \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
 - a) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3

- b) Compare les quatre premiers termes de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aux quatre premiers termes de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $W_n = \frac{n}{n+1}$.
- c) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n = W_n$.
- 2) Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général V_n définie par : $V_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.
- a) Montrer que $V_1 + V_2 + V_3 = -\ln 4$.
- b) Exprimer la somme $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$ en fonction de n .
- c) Déterminer la limite de la suite S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 04 : Composition RG 2016/2017 (Corrigé dans DONI MATHS TSE)

Soit la suite réelle u de première terme $u_0 = 5$ et définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{2u_n+4}{u_n+5}$.

$$\mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{2u_n+4}{u_n+5}.$$

- 1) a) Démontre que pour tout entier $n : u_n > 0$.
b) Démontre que pour tout entier $n : u_n \neq 1$.
- 2) Donne dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ une représentation graphique de la fonction f définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+4}{x+5}$ (unité 2 cm).
Utilise cette représentation graphique et la droite d'équation $y = x$ pour placer $u_0; u_1$ et u_2 sur l'axe des abscisses.
- 3) Soit v la suite réelle de terme générale v_n tel que : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+4}$.
- a) Démontre que v est une suite géométrique et en donnant le première terme et la raison.
b) Démontre que v est convergente et calcule sa limite.
c) En déduis que la suite v converge et calcule sa limite.

Exercice 05 : Composition RG 2015/2016 (Corrigé dans DONI MATHS TSE)

1) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* U_{n+1} = U_n + \frac{1}{10^n} \end{cases}$

- 1) Calculer $U_2; U_3; U_4; U_5$.
- 2) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul, U_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique dont-on précisera le premier terme et la raison.
- 3) En déduire une expression de U_n en fonction de n et démontrer que la suite (U_n) est convergente.
- 4) On désigne par S_n la somme des n premiers termes de cette suite. Démontrer que :
$$S_n = \frac{10n}{9} + \frac{10}{9^2} \left(\frac{1}{10^n} - 1 \right).$$
 Calculer la limite de (S_n)

Exercice 06 : Bac D 2003, RCI

Soit a un nombre réel donné.

On considère les suite U définies respectivement par :

- $U_0 = 3; U_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 \times U_{n+1} + (a-2)U_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}; V_n = U_{n+1} - U_n$

1- On pose : $a = 1$

a- Démontrer que la suite V est constante et donner sa valeur.

- b- En déduire que la suite U est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.
- c- On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$; Exprimer U_n puis S_n en fonction de n
- 2- On pose : $a = -5$
 - a- Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont la raison est 7
 - b- Exprimer V_n en fonction de n .

Exercice 07 : Extrait du bac TSE 2004

Soit (U_n) une suite arithmétique croissante d'entiers naturels.

- 1) Sachant que $U_1 + U_2 + U_3 = 105$, calcule U_2
- 2) On désigne par m et d respectivement le PPCM et le PGCD de U_1 et U_3 . Sachant que $\frac{m}{d} = 12$; détermine U_1 et U_3
- 3) En déduis l'expression de U_n en fonction de n . Calculer $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n . Trouve n pour que S_n soit égale à 525.

Exercice 08 : Extrait du bac TSE 2009

On considère la suite $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 3 \end{cases}$

- 1) Précise le sens de variation de la suite (U_n) .
- 2) Démontre que pour tout entier naturel n , $U_n > n^2$; en déduis la limite de la suite (U_n) .
- 3) Conjecture une expression de U_n en fonction de n puis démontre cette propriété ainsi conjecturée.

Exercice 09 : Composition RG 2017/2018 (Corrigé dans DONI MATHS TSE)

Sur une droite (D) muni d'un repère $(O; \vec{i})$, A_0 et B_0 sont les points d'abscisses respectives $a_0 = -4$ et $b_0 = 3$. Pour tout entier naturel n , on note : $A_n(a_n)$; $A_{n+1}(a_{n+1})$; $B_n(b_n)$ et $B_{n+1}(b_{n+1})$ avec $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ et $b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$.

- 1) Place les points A_0, B_0, A_1, B_1 .
- 2) Démontre, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $3a_n + 4b_n = 0$. En déduire que : $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$ et $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$.
- 3) a) Exprime a_n et b_n à l'aide de n .
b) Détermine les limites de a_n et b_n .
c) Interprète ce résultat à l'aide des points A_n et B_n .

Exercice 10

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.

- 1) Démontre que la suite (I_n) est positive et décroissante.
- 2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$; détermine la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan^{n+1} x$.
b) Déduis en que :

$$i_1) \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} ; \quad i_2) \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} ; \quad i_3) \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

- c) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = I_{n+4} - I_n$. Utilise $i_1)$ pour démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}.$$

- 3) a) Calcule I_2 .
b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$.

- c) Déduis en que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{\pi}{4}$
- 4) a) Calcule I_1 .
- b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(1) + f(5) + f(9) + \dots + f(4n-3) = I_{4n+1} - I_1$.
- c) Déduis en que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

Exercice 11

- 1) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$.
- a) A l'aide d'une intégration par parties, calcule I_1 .
- b) Prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- c) Montre, en utilisant une intégration par parties, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$

- 2) On considère la suite réelle (a_n) , définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$a_1 = 0 \text{ et } a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- a) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$.
- b) Déduis-en $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Exercice 12 : Bac TSE 2010 Mali

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx) dx$

1°/ Montrer que pour tout entier naturel n , $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$. (0,5pt)

2°/ À l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi-1}}{1+n^2}$. (1pt)

3°/ Montrer que, pour tout entier naturel n , $|I_n| \leq \frac{e^{\pi+1}}{1+n^2}$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,5pt). $|In|$ désigne la valeur absolue de In .

Exercice 13

L'objet de l'exercice est d'étudier la suite de terme général $U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ où $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$ on convient que $x^0 = 1$.

- Calculer U_0 et U_1 .
- Comparer x^n à x^{n+1} lorsque $x \in [0; 1]$. En déduire que la suite (U_n) est décroissante.
- En observant que $U_{n-1} + U_n = \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1+x} dx$, établir que $U_{n-1} + U_n < \frac{\sqrt{2}}{n}$.
- A l'aide des résultats précédents, établir que : $\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$.
- En déduire la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

- Calcul de u_0

Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- a. Calcule la dérivée f' de f
- b. Déduis-en u_0 .
2. Calcule u_1 .
3. Etude de la convergence de (u_n) :
 - a. Prouve que (u_n) est décroissante.
 - b. Déduis-en que (u_n) est convergente.
 - c. Montre que $\forall x \in [0; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)}$
 - d. Déduis-en la limite de u_n .
4. Pour tout $n \geq 3$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{x^2 + 1} dx$
 - a. Vérifie que $\forall n \geq 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$.
 - b. En intégrant I_n par parties, montre que $\forall n \geq 3$, $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.

Exercice 15

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^1 (1-u)^n \sqrt{u} du$.

1. a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.
- b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_1^0 (1-u)^n u^{3/2} du$ et en déduire le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite (I_n) est convergente.
3. a) Vérifier que la dérivée de la fonction $u \rightarrow u^{3/2}$ sur $[0; 1]$ est la fonction $u \rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{u}$.
- b) Calculer I_0 et I_1 .
- c) En utilisant la question 1.b, démontrer à l'aide d'une intégration par partie, que $I_n = \frac{2n+5}{2n+2} I_{n+1}$.
4. a) En déduire l'expression de I_n en fonction de I_0 et de n .
- b) Calculer I_4 .

Exercice 16

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos(x) dx.$$

1. Calcule I_0 et J_0 .
2. Soit n un entier naturel non nul ;
- a. En intégrant par parties I_n puis J_n , montre que I_n et J_n vérifient le système :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$
- b. Déduis-en, pour tout entier naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de n .

Problème 1 : Extrait de compos de Bamako Rive Gauche

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$$
 - a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n .

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0 ; +\infty[$.

On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1 ; e]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On note (C) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien $(\ln x)$.

a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point $A(0 ; 1)$ et le point $B_n(n ; 0)$.

b. Faire un croquis représentant la courbe (C) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 .

c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (C) avec Δ_n .

d. Précisez la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n) . (on pourra Utiliser le croquis et la question 2.c.)

3. a. Exprimer $\ln \alpha_n$ en fonction de n et de α_n .

b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c. Dédire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n) .

d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note λ sa limite. Etablir que $\ln \lambda = 1$ et en déduire la valeur de λ .

4. On désigne par D_n le domaine délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = e$.

Calculer l'aire du domaine D_n en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\frac{\alpha_n^2}{n}$.

Problème 2 : Extrait de compos 2013/2014 de Bamako Rive Gauche

Le problème comporte deux parties : I et II

Partie A : n étant un entier naturel non nul, on note f_n la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0; \infty[$ par : $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln(x)$,

1. Dresser le tableau de variation de f_n . En-dédire l'existence d'un réel unique a_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

2. Démontrer que $1 \leq a_n \leq e^2$ et que $\ln(a_n) = 2 - \frac{2}{n} a_n$.

3. Exprimer $f_{n+1}(a_n)$ en fonction de a_n et de n , puis en-dédire le sens de variation de la suite de terme général a_n .

4. Démontrer que la suite de terme général a_n est convergente. On note l sa limite.

5. En utilisant les résultats de la deuxième question, calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a_n)$. En-dédire l

Partie B : soit G la fonction définie $]0; \infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}} \text{ et la fonction } h \text{ définie par : } h(x) = \sqrt{x}$$

(C) et (C') désignent les représentations graphique de g et h respectivement dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. (Unité : 2cm).

1. Calculer les limites de g lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Vérifier que : $g'(x) = \frac{f_1(x)}{2x\sqrt{x}}$

En-dédire le tableau de variation de g .

3. Préciser les positions relatives de deux courbes (C) et (C') et calculer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $[g(x) - h(x)]$.

4. Tracer les courbes (C) et (C') .

5. On pose : $I = \int_1^2 g(x) dx$

a. Calculer $J = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b. En déduire la valeur de I .

6. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} g\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

a. En utilisant les variations de g sur $[1; +\infty[$, montre que :

$$\frac{1}{n} g\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{\left(1+\frac{k}{n}\right)}^{\left(1+\frac{k+1}{n}\right)} g(x) dx \leq \frac{1}{n} g\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \text{ où } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 0 \leq k \leq n-1$$

b. Dédus-en que :

$$u_n - \frac{g(2)}{n} \leq I \leq u_n - \frac{g(1)}{n} \quad \text{puis que} \quad I + \frac{g(1)}{n} \leq u_n \leq I + \frac{g(2)}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

Problème 3 : Extrait de compos 2015/2016 de Bamako Rive Gauche

(Corrigé dans DONI MATHS TSE)

Le but du problème est de montrer que le nombre e base de logarithme népériens, n'est pas un nombre rationnel.

A) Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x) = xe^{1-x}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le plan P rapporté à une repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique.

1) Etudier les variations de f ; on précisera les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ et les différentes asymptotes.

2) Construire la courbe C_f dans le plan P

3) Utiliser les intégrations par parties pour calculer $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$

B) Pour tout entier naturel $n \geq 1$. On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

1) a) Montrer que $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$ pour tout $x \in [0; 1]$

b) Exprimer J_n en fonction $n, J_n = \int_0^1 x^n dx$

c) Dédus de 1-a) et 1-b) que l'on a : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

2) Par une intégrations par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

3) Pour tout $n \geq 1$; on pose $K_n = n! e - I_n$ (ou $n! = 1 \times 2 \times 3 \dots \dots \times n$)

a) Exprimer K_{n+1} en fonction de K_n

b) Calculer K_1 (On pourra utiliser A-3)

c) En déduire en procédant par récurrence sur n ; que K_n est un entier pour tout $n \geq 1$

C) Soit $h(x)$ la fonction définie par $h(x) = x^2 e^{-x}$; on pose $K = \int_0^1 h(x) dx$

1) Montrer que $K = 2 - \frac{5}{e}$ (on pourra utiliser la méthode d'intégrations par parties ou chercher une primitive H sous la forme $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ d'où $a; b; c$ sont des réels à déterminer)

- 2) Soit f la fonction définie par ; $f(x) = \frac{1}{1+xe^{-x}}$; on pose $I = \int_0^1 f(x)dx$ (on ne cherchera pas à calculer I)
- a) Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$ $0 \leq x^2 e^{-x} \leq 1$
- b) Vérifier que pour tout $\mu \in [0; 1]$, $\mu - 1 \leq \frac{1}{1+\mu} \leq 1 - \frac{\mu}{2}$
- c) En déduire que : $1 - K \leq I \leq 1 - \frac{K}{2}$

Problème 4

PARTIE A : Etude d'une fonction f et construction de sa courbe.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 1cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées.

- 1) a) on rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Détermine la limite de f en $-\infty$.
- b) Vérifie que pour tout réel x ; $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^x)$. Détermine la limite de f en $+\infty$.
- c) En déduis que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes que l'on précisera.
- 2) On considère la fonction g définie sur $] -1; +\infty[$ par $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1 + t)$
- a) Démontre que la fonction g est décroissante sur $[0; +\infty[$.
- b) En déduis le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$
- 3) a) Calcule $f'(x)$ et l'exprime en fonction de $g(e^x)$.
- b) En déduis le sens de variation de la fonction f puis dresse son tableau de variation.
- 4) Trace la courbe $(\mathcal{C})$.

PARTIE B : Comportements asymptotiques d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- 1) Etudie le sens de variation de la fonction F .
- 2) a) Vérifie que, pour nombre réel t , $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ et calcule $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$.
- b) En déduis, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.
- c) Vérifie que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :
- $$F(x) = x - \ln(1 + e^x) - f(x) + 2 \ln 2 ; F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2 \ln 2$$
- 3) Détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.
- 4) Détermine $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) - x$. Donne une interprétation graphique de ce résultat.

PARTIE C : Etude d'une suite

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^n e^{-k} \ln(1 + e^k)$

- 1) Détermine le sens de variation de la suite (U_n) .
- 2) a) Justifie que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ on a : $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$.
- b) Compare U_n et $F(n)$.
- 3) La suite U_n est-elle convergente ?

Problème 5

Soit la fonction f définie sur $[1 ; 3]$ par : $f(x) = \sqrt{x+2}$

- 1°) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout x de $[1 ; 3]$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[1 ; 3]$ que l'on déterminera. En déduire que pour tout x de $[1 ; 3]$ on a : $|\sqrt{x+2} - 2| \leq \frac{1}{2}|x - 2|$

3°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer que $\forall n \geq 0$ on a : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$

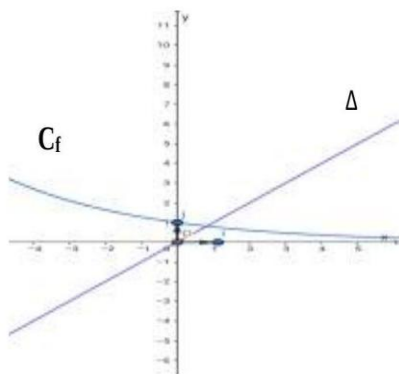
b) Démontrer que $\forall n \geq 0$ on a : $|u_n - 2| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) En déduire la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite.

d) Détermine un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près. Déduis-en alors une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Problème 6

Dans la figure ci-dessous on a représenté dans un repère orthonormé la courbe C_f de la fonction $f: x \mapsto e^{-\frac{4}{x}}$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1. a) Utilise le graphique pour justifier que l'équation $e^{-\frac{4}{x}} = x$ admet une solution unique α dans $J = [0; 1]$

b) Vérifie que $0,8 < \alpha < 0,9$.

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a. Montre que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 1$.

b. Montre que pour tout réel $x \in J$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

c. Montre que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

d. Déduis - en que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

e. Montre que la suite (u_n) est convergente vers α .

3. a) Détermine un entier naturel n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $|u_n - \alpha| < 10^{-3}$.

b) Déduis - en une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Problème 7 : Extrait du Bac malien TSE 2017

A// Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.

On appelle (C) la courbe représentative de f .

1. a) Calcule la fonction dérivée de f .

b) Dresse le tableau de variation de f' sur $]0; +\infty[$ puis en déduis le signe de f' sur $[0; +\infty[$.

- c) Dresse le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- d) Montre que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote $(\mathcal{D})$ que l'on déterminera.
2. a) Etablis que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution et une seule notée α .
- b) Justifie l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.
- c) Construis $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$ sur un même graphique.
- B// Soit la fonction g définie sur l'intervalle $J = [1; +\infty[$ par : $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.
3. Etudie les variations de g sur J puis en déduis que pour tout $x \in J$, $g(x) \in J$.
4. Montre que pour tout $x \in J$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

En déduis que pour tout $x \in J$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |x - \alpha|$.

3) Soit (U_n) la suite d'éléments de J définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier n positif ou nul.

a) Montre que pour tout entier n , positif ou nul on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |U_n - \alpha|$.

b) En déduis que pour tout entier n , positif ou nul on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

c) Détermine la limite de la suite (U_n) .

d) Détermine un entier p pour lequel on est sûr d'avoir $|U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$. Calcule U_p à 10^{-3} près.

Problème 8 : Extrait de compos Bamako Rie Droite

Soit f_m la fonction définie sur par $f_m(x) = \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}}$, où $m \in \mathbb{R}^*$ et (c_m) la courbe de f_m

A) Etude de la fonction f_m .

1) a) Etudie le sens de variation de f_1 .

b) Détermine les limites de f_1 en $+\infty$ et $-\infty$.

2) Soit $A\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}\right)$, prouve que A est un centre de symétrie pour (c_1) .

3) a) Détermine une équation de la tangente T à (c_1) au point A .

b) Précise la position de (c_1) par rapport à (T) .

(On pourra étudier la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - f_1(x)$ en prouvant que

$$\varphi'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{4(e^x + 1)^2}$$

4) Trace (c_1) (unité graphique 4cm)

5) Soit λ un nombre réel.

a) Calcule $I_m(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} f_m(x) dx$.

b) Prouve que $I_m(\lambda)$ est indépendant de m .

B) Etude l'équation $f_1(x) = x$.

1) Soit $g(x) = x - f_1(x)$

a) Dresse le tableau de variation de g .

b) Déduis en que $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

2) a) Prouve que $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]; f_1(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

b) Calcule $f_1''(x)$. Déduis en que $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]; 0 \leq f_1'(x) \leq k$, où $k = \frac{\sqrt{e}}{(1+\sqrt{e})^2}$.

c) Déduis en que $|f_1(x) - \alpha| \leq k|x - \alpha|$.

d) Vérifie que $k \leq \frac{1}{4}$.

3) Soit $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ définie par : $u_{n+1} = f_1(u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

a) Montre que $\forall n \geq 0, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^n$

b) Déduis en la limite de la suite (u_n) .

c) Détermine un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près. Déduis-en alors une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Problème 9 : Composition RG 2017/2018 (Corrigé dans DONI MATHS TSE)

Partie A

Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

1. Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2. Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \ln x + x + 1$. Etudie les variations de φ et démontre que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que : $0,27 \leq \beta \leq 0,28$

3. a) Exprime $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$. En déduis les variations de f .

b) Vérifie que $f(\beta) = -\beta$.

4. Place les points d'abscisses $1; 3; 4; e^2; 12$ puis trace la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie B

1. a) Démontre que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[3; 4]$.

b) Démontre que les équations $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.

2. Soit g la fonction définie pour tout réel strictement positif x par : $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$.

a) Etudie les variations de g pour x élément de $[3; 4]$ et démontre que pour tout x élément de $[3; 4]$, $g(x)$ est un élément de $[3; 4]$.

b) Démontre que : $\forall x \in [3; 4], |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Démontrer que pour tout entier positif ou nul n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

En déduis que : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

b) Démontre que la suite (u_n) est convergente et calcule sa limite.

c) Trouve les valeurs de n , pour les quelles u_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

Partie C

1. Soit n un entier naturel non nul.

a. Demontre que l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique α_n .

b. Place α_1 et α_2 dans le même repère que précédemment.

2. a. Demontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\alpha_n \geq e^n$.

b. Demontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a : $f(\alpha_n) = n$ est équivalent à $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$.

c. Déduis-en des questions 2.a et 2.b que la suite $\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calcule sa limite.

Problème 10

PARTIE A : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x \ln x - x + 1$

1) Dresse le tableau de variation de g . En déduis le signe de $g(x)$.

2) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction g et $(\mathcal{C}')$ celle de $x \mapsto \ln x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

a) Détermine les points d'intersections de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

b) Montre que $\forall x \in [1; e] \quad x \ln x - x + 1 \leq \ln x$.

3) a) A l'aide d'une intégration par parties calcule $J = \int_1^e (x-1) \ln x \, dx$.

b) Calcule en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D} = \{M(x; y) \mid 1 \leq x \leq e \text{ et } g(x) \leq y \leq \ln x\}$. (On donnera une valeur décimale approchée à 10^{-2} près).

PARTIE B : Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln x$

1) Etudie les limites de f en 1 et en $+\infty$.

2) Dresse le tableau de variation de f (on pourra utiliser la Partie A).

3) Trace la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) a) Montre que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α comprise entre 3,5 et 3,6.

b) Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $h(x) = \ln x + \frac{1}{2}(x+1)$

■ Montre que $h(\alpha) = \alpha$

■ Etudie le sens de variation de h .

■ Soit $I = [3; 4]$. Montre que $h(I) \subset I$.

c) Montre que $\forall x \in I \quad |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$.

d) Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = h(U_n)$.

Justifie successivement les propriétés suivantes :

■ $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3 \leq U_n \leq 4$

■ $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$

■ $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

■ la suite (U_n) converge vers α .

e) Détermine un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

PARTIE C :

Soit f_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$ et $I_n = \int_1^e f_n(x) dx \quad n \in \mathbb{N}^*$

1) Soit $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Calcule $F'(x)$; en déduis I_1 .

2) Montre que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

3) Montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$.

4) En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1; e]$ montre que $0 \leq I_n \leq 1$. En déduis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \dots + \frac{1}{n!}.$$

Problème 11 : Bac malien TSE 2009

A-//

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x} \ln x$

1°/ Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ a même signe que

$$g(x) = -\ln x + \frac{1}{x} \quad (0,75\text{pt})$$

2°/ a). Étudier les variations de g et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2. (1pt)

b). Quel est le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles : $]0; \alpha[$ et $]\alpha; +\infty[$ (0,5pt)

3°/ Vérifier que $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire de l'inégalité $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ un encadrement de $f(\alpha)$ (0,75pt)

4°/ Achever l'étude de la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (1pt)

B-//

1°/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$ (0,5pt)

2°/ a.) Calculer $h'(x)$ et vérifier que $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ on a : $-\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$

En déduire qu'il existe un réel $k \in [0; 1]$ tel que $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, $|h'(x)| \leq k$ (1pt)

b.) Prouver que pour tout couple de réels (x, y) choisis dans $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ on a :

$$|h(x) - h(y)| \leq k |x - y| \quad (0,5\text{pt})$$

3°/ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$ a.) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ (0,5pt)

b.) En appliquant à $(u_n; \alpha)$ l'inégalité établie dans 2°/ b.), prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha| \quad (0,5\text{pt})$$

c.) En déduire par un raisonnement par récurrence l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha| \text{ et montrer que la suite } (u_n) \text{ est convergente.}$$

Quelle est sa limite ? (0,5pt)

4°/ Montrer en utilisant les variations de h que $u_{n+1} - \alpha$ et $u_n - \alpha$ sont de signe contraire.

En déduire que α est compris entre u_n et u_{n+1} (1pt)

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} . (0,5pt)

C-//

On se propose de déterminer toutes les fonctions définies et deux fois dérivables sur $]0; +\infty[$ solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$$

1°/ a.) Vérifier que la fonction f définie dans la partie A-// est une solution de (E) (0,5pt)

b.) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y'' + 3y' + 2y = 0$ (0,75pt)

2°/ a.) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$. Montrer que g est une solution de (E) si et seulement si $g - f$ est une solution de (E') . (0,75pt)

b.) En déduire toutes les solutions de (E) (0,5pt)

2°/ a.) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$. Montrer que g est une solution de (E) si et seulement si $g - f$ est une solution de (E') . (0,75pt)

b.) En déduire toutes les solutions de (E) (0,5pt)

Problème 12

- 1) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(E_1) : y'' + 4y' + 4y = 0$ (0,5pt)
- 2) On considère l'équation différentielle : $(E_2) : y'' + 4y' + 4y = 8x$
 - a) Détermine les réels a et b tels que la fonction t définie par $t(x) = ax + b$ soit solution de l'équation (E_2) . (0,5pt)
 - b) Montre qu'une fonction u est solution de l'équation (E_2) si et seulement si la fonction $(u - t)$ est solution de l'équation (E_1) . (0,5pt)
 - c) En déduis l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_2) . (0,5pt)
 - d) Détermine la fonction f solution de (E_2) qui vérifie : $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$. (0,5pt)

II.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité 2cm. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -(2x + 1)e^{-2x} + 2$.

- 1) a) Calcule $h'(x)$; étudie le sens de variation de h . (0,5pt)
- b) Calcule $h(0)$ et détermine le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$. (0,5pt)
- 2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (x + 1)e^{-2x} + 2x - 2$. On appelle (C_f) la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 - a) Détermine les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (0,5pt)
 - b) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau des variations de f . (0,75pt)
 - c) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que : $0 < \alpha < 1$. (0,5pt)
- 3) a) Montre que la courbe (C_f) admet une asymptote (Δ) en $+\infty$ dont on déterminera une équation cartésienne. Etudie les positions relatives de (C_f) et de (Δ) . (0,5pt)
- b) Détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse nulle. (0,5pt)
- c) Construis (Δ) , (T) et (C_f) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (0,75pt)
- 4) Soit λ un réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ puis la courbe (C_f) et la droite (Δ) . (0,75pt)
 - a) Calcule $A(\lambda)$. (0,5pt)
 - b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\lambda)$. (0,5pt)

III.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{2}(x + 1)e^{-2x}$.

- 1) Montre que l'unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$ est solution de l'équation définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = x$. (0,5pt)
- 2) a) Calcule $\varphi'(x)$; étudier le sens de variation de φ' sur $\mathbb{R}$. (0,5pt)
- b) En déduis que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$. (0,5pt)
- c) Montre que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, $\varphi(x)$ appartient encore à l'intervalle $[0; 1]$. (0,5pt)

3) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \end{cases}$$

a) Montre que pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$. (0,5pt)

b) En déduis que pour tout entier naturel n : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (0,5pt)

c) Montre que la suite (U_n) est convergente et donne sa limite (0,5pt)

d) Détermine un entier p pour lequel on a $|U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$.

(0,25pt)

e) déduis-en une valeur approchée de α à 10^{-3} (0,25pt)

Problème 13

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_n(x) = x^n \left(e^{-x} - \frac{1}{2} \right)$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni de repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

Partie A

1-a) Etudie la limite de f_n en $+\infty$. (0,5 pt)

b) Etudie, suivant la parité de n , la limite de f_n en $-\infty$. (0,5 pt)

2-Calculer la fonction dérivée de f_n , puis prouve que pour tout x réel, $f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$ avec $g_n(x) = (n-x)e^{-x} - \frac{n}{2}$ (0,5 pt)

3-a) Etudie les variations de g_n (0,5 pt)

b) Déduis -en que l'équation $g_n(x) = 0$, admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}$ et que α_n est strictement positif. (0,5 pt)

c) Détermine le signe de g_n sur $\mathbb{R}$, Déduis-en le signe de f'_n sur $\mathbb{R}$ (on distinguera le cas n pair et n impair). (0,75 pt)

d) Dresse le tableau de variation de f_n . (0,75 pt)

Partie B

Dans cette partie, on prend $n = 1$. Donc $f_1(x) = xe^{-x} - \frac{x}{2}$ et $g_1(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}$

4-a) Démontre que : $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$ (0,25 pt)

b) En utilisant g_1 , prouve que : $e^{-\alpha_1} = \frac{1}{2(1-\alpha_1)}$. Déduis -en l'expression de $f_1(\alpha_1)$ ne contenant pas $e^{-\alpha_1}$. (0,5 pt)

c) Déduis de la partie A), 3) et d), le tableau de variation de f_1 . (0,5 pt)

5-Démontre que la courbe (C_1) possède une asymptote (D) en $+\infty$ dont on précisera une équation. (0,25 pt)

6-Soit la fonction φ définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par $\varphi(x) = 1 - \frac{e^x}{2}$.

a) Démontre que α_1 est l'unique solution de l'équation : $\varphi(x) = x$ (0,25 pt)

b) Démontre que pour tout x élément de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$; $\varphi(x)$ est aussi élément de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ (0,25 pt)

c) Démontre que pour tout x élément de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on a $|\varphi'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$ (0,25 pt)

7- On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

a) Démontre que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ (0,25 pt)

b) Démontre que pour tout entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |u_n - \alpha_1|$. (0,25 pt)

c) Démontre par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n$. Déduis-en que la suite (u_n) est convergente et précise sa limite. (0,5 pt)

8-a) Etudie le signe de f_1 sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

b) On donne $\alpha_1 = 0,315$. Construis (C_1) et (D) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (0, 5 pt)

9-a) Détermine les nombres réels a et b tels que, la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = (ax + b)e^{-x} \text{ soit une primitive de la fonction : } x \mapsto xe^{-x} \text{ (0,5 pt)}$$

b) Calcule l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. (0,5 pt)

Exercice 14

Bac Gabon Session normale de 1998 Séries C et E.

Le Problème a pour objet l'étude d'une suite de fonctions, d'une suite d'intégrales, puis la recherche d'une valeur approchée d'une équation du type : $f(x) = k$.

Partie A

On note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $] -\infty; -2[\cup] -2; +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n} \text{ pour } n \text{ tout entier naturel non nul.}$$

(C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'unité graphique étant égale à 2cm.

1) a) Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$. (Pour la limite en $+\infty$, on posera : $X = x + 2$)

b) Etudier suivant la parité de n , la limite de f_n en -2 .

2) a) Calculer $f'_n(x)$, étudier son signe suivant la parité de n .

b) Dresse le tableau de variations de f_n .

3) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A .

Déterminer une équation de la tangente (T_n) à (C_n) en A .

4) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

b) Démontrer que pour tout entier non nul, et pour tout nombre réel x différent de -2 , on a :

$$f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$$

c) En déduire les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2) .

Représente graphiquement (C_1) et (C_2) .

Partie B

Soit la suite (U_n) définie par $u_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$ pour tout entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout entier n non nul, on a $U_n \geq 0$.

Que peut-on en déduire ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\frac{1-2^{-n+1}}{n-1} \leq u_n \leq \left(\frac{1-2^{-n+1}}{n-1}\right) \times e$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .

3. a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $nu_{n+1} = 1 + u_n - \frac{e}{2^n}$.
- b) Retrouver ce résultat en utilisant la relation de la question 4. b) de la partie A.
- c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^0 \frac{ne^{1+x}}{(x+2)^{n+1}} dx = 1$.

Partie C

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = f_1(x - 1)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Construire la courbe (Γ) à partir de la courbe (C_1) . Justifier la construction.
2. On note φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
 $\varphi(x) = 1 + \ln(1 + x)$.
 - a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $I = [2; 3]$.
 - b) Démontrer que pour tout x positif, l'équation $\varphi(x) = x$ est équivalente à l'équation $g(x) = e$.
 - c) Démontrer que pour tout x de I , $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{3}$.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \varphi(v_n)$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est croissante et majorée par α . Conclure.
 - b) Démontrer que $\varphi(I) \subset I$.
 - c) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , v_n appartient à l'intervalle I .
4. a) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $|v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |v_n - \alpha|$ puis que :
 $\alpha - v_{n+1} = \frac{1}{3}(\alpha - v_n)$
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n - \alpha \leq \frac{1}{3^n}$ et que la suite (v_n) converge vers α .
 - c) Déterminer l'entier naturel p pour lequel v_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
 Calculer cette valeur approchée.

Problème 15

Partie A : (2 points)

Soit φ une application dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, et soit g l'application numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \varphi(x)e^x$.

1. Résous l'équation différentielle : $y' + y = 0$. (0,25 pt)
2. a. Vérifie que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et démontre que, pour que φ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) + \varphi(x) = -\frac{1}{x} - \ln x \quad (1)$$

il faut et il suffit que g soit une primitive de l'application $x \mapsto -e^x \ln x - \frac{e^x}{x}$ (0,75 pt)

b. Quel est l'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto -e^x \ln x - \frac{e^x}{x}$? (0,5 pt)

3. Déduis-en que l'ensemble des applications dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) est l'ensemble des applications $x \mapsto ae^{-x} - \ln x$ où a désigne une constante réelle. (0,5 pt)

Partie B : (5,25 points)

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = e^{1-x} - \ln x$

- a. Etudie les variations de f et montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution c et que $c \in]1; 2[$. (0,75+0,5 pts)
- b. Construis sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$. (0,5 pt)
- c. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x)$. (0,25 pt)
- d. Soit x un élément de l'intervalle $]0; 1]$

Calcule l'intégrale $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$ en fonction de x et montre que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = e$. (0,75 pt)

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

- a. Montre que, pour tout entier k tel que : $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout réel t tel que

$$\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}; \quad \text{on a : } f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (0,25 \text{ pt})$$

- b. Montre alors que : $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (0,5 pt)

- c. Déduis – en que $F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq w_n \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ (0,25 pt)

- d. Déduis-en que la suite (w_n) est convergente et calcule sa limite. (0,5 pt)

3. a. Etablis les égalités :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{(1-\frac{k}{n})} = (e-1) \frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} \quad (0,25 \text{ pt}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \quad (0,25 \text{ pt})$$

- b. Utilise les résultats précédents pour démontrer que les deux suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

sont convergentes et calcule leur limite. (2 × 0,25 pt)

Partie C : (2,75 points)

Soit P l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, P(x) = x - \frac{f(x)}{f'(1)}$

1. a. Détermine le sens de variation de f' dans l'intervalle $[1; 2]$. (0,5 pt)
- b. Etudie les variations de P dans l'intervalle $[1; 2]$. Montre que P réalise une bijection de $[1; c]$ sur un intervalle J contenu dans $[1; c]$. (0,75 pt)
- c. Montre par récurrence que l'on définit bien une suite (c_n) d'éléments de $[1; c]$ en posant $c_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $c_{n+1} = P(c_n)$. (0,25 pt)
2. a. Montre que pour tout $x \in [1; 2]$, $0 \leq P'(x) \leq P'(2) \leq \frac{7}{12}$. (0,25 pt)
- b. En utilisant le théorème des accroissements finis, vérifie que pour tout entier n ,

$$|c_{n+1} - c_n| \leq \frac{7}{12} |c_n - c| \quad (0,5 \text{ pt})$$

Déduis-en que la suite (c_n) est convergente et détermine sa limite (0,25 pt)

- c. Quelle valeur suffit-il de donner à n pour que c_n soit une valeur approchée de c à 10^{-2}

près ? (0,25 pt)

Problème 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est le centimètre.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions f_n et F_n continues sur $\mathbb{R}$ et définies par :

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction F_n dans le repère (O, I, J) .

On se propose dans ce problème de donner, pour tout entier naturel n non nul, l'allure de la courbe (C_n) .

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère (O, I, J) .

- Démontre que f est une fonction impaire.
- Calcule la limite de $f(x)$ puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
 - Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.
- On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
 - Détermine le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
 - Dresse le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- Détermine une équation de la tangente (Δ) à (C) au point d'abscisse 0.
- On note g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = -x + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
 - Détermine le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
 - Détermine les positions relatives de (C) et (Δ) . (On pourra calculer $g(0)$).
- Construis la courbe (C) et la droite (Δ) dans le plan muni du repère (O, I, J) .
- On note A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Calcule A à l'aide d'une intégration par parties.

Partie B

- Justifie que F_n est définie sur $\mathbb{R}$.
 - Démontre que F_n est une fonction impaire.
 - Étudie le sens de variation de F_n sur $[0; +\infty[$.
- Soit (I_n) la suite numérique définie par :

$$I_0 = \ln(1 + \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

- Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.
- Démontre que la suite (I_n) est décroissante.
- Démontre que la suite (I_n) est convergente. (On ne demande pas de calculer la limite de (I_n)).

d) Vérifie que pour tout entier naturel n non nul et pour tout nombre réel t positif, on a :

$$t^{2n} \sqrt{1+t^2} = \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}$$

e) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

On remarquera que pour tout nombre réel t , $\frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}} = t^{2n+1} \times \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$$\text{On admettra que : } I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} I_0.$$

f) Calcule I_1 et I_2 .

3. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = I_n + \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

b) Démontre que :

$$\forall t \geq 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \geq 1, \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{n} (x^{2n} - 1) \leq \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

c) Dédus-en la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d) Démontre que, pour tout entier naturel non nul n , (C_n) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$.

e) Construis la courbe (C_2) dans le plan muni du repère (O, I, J) .

Problème 17

Dans cette activité, n un entier naturel non nul et on considère la famille de fonctions f_n

$$\text{définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } \begin{cases} f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}}, x \neq -1 \\ f_n(-1) = 0 \end{cases}$$

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique $2cm$, et on note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n .

Partie A

Pour tout entier n différent de zéro, on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = (-2n + x + 1)e^{x+1} + 2n.$$

1. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$.

b) Donne le sens de variation de g_n puis dresse son tableau de variation.

2. a) Calcule $g_n(-1)$ et déduis-en que : $2n - e^{2n-1} < 0$ pour tout n différent de zéro.

b) Démontre que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n appartenant à l'intervalle $]2n - 2; +\infty[$.

c) Démontre que l'équation α_n admet une solution unique α_n appartenant à l'intervalle $]2n - 2; 2n - 1[$ puis déduis-en que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

3. a) Détermine le signe de g_n suivant les valeurs de x .

b) Détermine les coordonnées du point M_n où la courbe représentative de la fonction g_n admet un extremum et déduis-en que le point M_n appartient à une courbe dont on donnera une équation.

Partie B

1) a) Etudie la continuité de f_n en -1 .

- b) Etudie la dérivabilité de f_n en -1 . (On distinguera deux cas : $n = 1$ et $n > 1$).
- 2) a) Calcule les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b) Calcule la dérivée de f_n et vérifie que pour tout réel x différent de -1 , on a :
- $$f'_n(x) = \left[\frac{(x+1)^{n-1}}{1-e^{x+1}} \right]^2 \times (x+1)g_n(x)$$
- c) Donne le sens de variations de f_n puis dresse son tableau de variation pour $n > 1$.
- 3) a) Démontre que les courbes (C_2) et (C_3) ont trois points communs A, B et C que l'on déterminera.
- b) Etudie les positions relatives des courbes (C_2) et (C_3) puis les construis sur un même graphique.

Partie C

p est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 1.

Soit h_p la fonction définie sur l'intervalle $I_p = [2p-2; 2p-1]$ par :

$$h_p(x) = 2p-1 - \frac{2p}{e^{x+1}}$$

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2p-2 \\ u_{n+1} = h_p(u_n) \end{cases} \text{ pour tout entier } n \text{ et on pose pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } v_n = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x) dx.$$

- 1.) Démontre que pour tout x de I_p , les équation $g_p(x) = 0$ et $h_p(x) = x$ sont équivalentes.
- 2.) En utilisant la partie A, 2.a), montre que pour tout $x \in I_p$, on a :
- $$h_p(x) \in I_p \text{ et } |h'_p(x)| \leq \frac{2p}{e^{2p-1}} < 1.$$
- 3.) On pose : $k_p = \frac{2p}{e^{2p-1}}$
- a) Démontre que pour tout $n, u_n \in I_p$.
- b) Démontre que tout n , on a :
- $$|u_{n+1} - \alpha_p| \leq k_p |u_n - \alpha_p|.$$
- Puis déduis-en que $|u_n - \alpha_p| \leq (k_p)^n$ et que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?
- 4.) a) Justifie l'existence de (v_n) .
- b) Montre que pour tout $n \geq 1, v_n \leq 0$.
- c) Montre que (v_n) est croissante ; que peut-on en déduire ?
- 5.) a) En utilisant les variations de f_n sur l'intervalle $[-1; 0]$, montre que : $\frac{1}{1-e} \leq f_n(x) \leq 0$.
- b) Déduis-en que pour tout $n \geq 1, \frac{1}{1-e} \times \frac{1}{n} \leq v_n \leq 0$.
- c) Etudie la convergence de (v_n) .

Problème 18

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.

En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.

Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité de déchets qu'elle rejette par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.

Pour tout entier naturel n , on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2007 + n)$. On a alors $r_0 = 40\,000$.

1. Calcule r_1 et r_2 .
2. Justifie que pour tout entier naturel n , on a : $r_{n+1} = 0,95 r_n + 200$.
3. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = r_n - 4\,000$
 - a. Démontre que la suite (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b. Pour tout entier naturel n , exprime (S_n) en fonction de n . Déduis en que, pour tout entier naturel n , on a : $r_n = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.
 - c. La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifie.
 - d. Détermine la limite de la suite (r_n) quand n tend vers l'infini.
 - e. Calcule une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2011.