

Suites Numériques

1) On définit la suite (U_n) par :

- son terme initial $U_0 = 1$
- la relation de récurrence $U_{n+1} = \frac{U_n + 8}{2U_n + 1}$

a) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .

b) Soit la fonction h définie sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$ par $h(x) = \frac{x+8}{2x+1}$ et (C_h) sa courbe représentative.

a) Tracer (C_h) et la droite (d) d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

b) Construire à l'aide de (C_h) et (d) les points de l'axe $(O, \vec{i})$ d'abscisses respectives U_0 , U_1 , U_2 et U_3 .

c) Que peut-on prévoir quant à la convergence de la suite (U_n) ?

2) (V_n) est la suite définie pour tout n par $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$

a) Calculer V_0 , V_1 , et V_2

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.

c) Exprimer V_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (V_n) quand n tend vers $+\infty$

d) Exprimer U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$

3) Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + n \end{cases}$$

On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ ①

a) Exprimer V_n en fonction de n et montrer que (V_n) est arithmétique dont on déterminera la raison et le 1^{er} terme.

b) Calculer $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

c) Utiliser la relation ① pour trouver une autre expression de S_n

d) Encadrer U_n en fonction de n et calculer la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$

le but de cette Partie est d'étudier la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{x} + x$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique 1cm)

1) Etude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

a) Etudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

2a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (Δ) .

d) Déterminer les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangente T parallèle à (Δ)

e) Tracer (C) , (Δ) et T dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par (Δ) , la courbe (C) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 .
Prouver que $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$

Partie B

le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de x_0
On désigne par h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^{-x^2/2}$

1) Montrer que x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$

2) On note I l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$

Montrer que pour tout x appartenant à I , $h(x)$ appartient aussi à I

1a) Calculer la dérivée h' de h et la dérivée seconde h'' de h

2) Etudier les variations de h' sur I

3) En déduire que, pour tout x de I , on a $|h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$.

- Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$
 - En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_{n+1} - u_0| \leq e^{-1/2} |u_n - u_0|$
 - En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_n - u_0| \leq \frac{1}{2} e^{-n/2}$
 - Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on ait $\frac{1}{2} e^{-n/2} < 10^{-2}$
 - Montrer que : $|u_n - u_0| < 10^{-2}$
- Que représente u_{n_0} relativement à u_0 ? Calculer u_{n_0} à 10^{-2} près par défaut.

IV
L'objet de la Partie I est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3 + 3e^{-1/3 x}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique cm.

L'objet de la partie II est d'étudier une méthode d'approximation de l'unique solution non nulle α de l'équation $f(x) = 0$ à l'aide d'une suite.

Partie I

- Étude de la fonction f .
 - Sens de variation de f .
 - Calculer la dérivée f' de f .
 - Étudier le sens de variation de f' et calculer la limite de f' quand x tend vers $+\infty$.
 - Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$ et montrer que $0,4 \leq \alpha \leq 0,5$.
 - Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$.
- Comportement asymptotique de f en $+\infty$.
 - Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - Déterminer le signe de $[f(x) - (x^2 - 3)]$ et sa limite en $+\infty$.

• Interpréter graphiquement ce résultat, On note P la courbe d'équation $y = x^2 - 3$.

3) signe de f

- Dresser le tableau de variation de f .
- Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution non nulle α , et une seule appartenant à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ et montrer que $0,8 \leq \alpha \leq 0,9$.
- Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$.
- Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (P) et (C) . On précisera la tangente à (C) au point d'abscisse 0.
- a) Calculer l'intégrale $I(\lambda) = \int_0^1 [f(x) - (x^2 - 3)] dx$ où λ désigne un nombre réel strictement positif.
- b) Interpréter graphiquement ce résultat.
- c) Déterminer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Partie II

• Approximation de la solution α de l'équation $f(x) = 0$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I = [0,8; 0,9]$ par

$$g(x) = x - f(x) = x + 3 - x^2 - 3e^{-\frac{1}{3}x}$$

Ainsi, la solution α de l'équation $f(x) = 0$ est aussi l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

1) Étude de la fonction g'

a) Calculer $g'(x)$

Étudier le sens de variation de g' (On pourra utiliser les résultats de I. 1) b).

b) Calculer $g'(0,8)$ et $g'(0,9)$. En déduire qu'il existe un nombre β et un seul de l'intervalle I , tel que $g'(\beta) = 0$.

Montrer que, pour tout $x \in [\beta, 0,9]$, $|g'(x)| \leq 6 \cdot 10^{-2}$, puis que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{5}$.

Étude de la fonction g .
Étudier les variations de g sur I

b) Calculer $g(0,8)$ et $g(0,9)$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, prouver que $|g(0,9) - g(\beta)| \leq 6 \times 10^{-2}$
En déduire que $g(\beta) \in I$.

c) prouver que, pour tout $x \in I$, $g(x)$ appartient aussi à I

d) Montrer que, pour tout $x \in I$, $|g(x) - a| \leq \frac{1}{5} |x - a|$

3) Étude d'une suite d'approximation de a .

Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 0,8$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{5} |u_n - a|$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq \frac{1}{10} \times \frac{1}{5^n}$

c) En déduire la limite de la suite (u_n) .