

### Problème 5

On se propose d'étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2} \end{cases}$$

Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0; 1]$  par  $g(x) = \frac{e^x}{x+2}$

- 1) Calcule  $g'$  et  $g''$ . (0,5 pt)
- 2) Etudie le sens de variation de  $g$  et déduis-en l'image par  $g$  de  $[0; 1]$ . (0,5 pt)
- 3) Démontre que  $\forall x \in [0; 1]; \frac{1}{4} \leq g'(x) \leq \frac{2}{3}$ . (0,25 pt)
- 4) Démontre que l'équation  $g(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha \in [0; 1]$ . (0,5 pt)
- 5) Montre par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$  (0,5 pt)
- 6) Démontre que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$ . (0,5 pt)
- 7) Déduis-en que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . (0,25 pt)
- 8) Déduis en la limite de la suite  $(u_n)$ . (0,25 pt)
- 9) Détermine un entier  $p$  tel que  $u_p$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près. Déduis-en alors une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près. (0,5 pt)