

SÉLECTIONS DU BACCALAURÉAT ALGÉRIEN

Problèmes de Synthèse : Fonctions & Suites

Traduction et adaptation par : **Prof. Sadik Khachnaoui**

« Pour réussir l'épreuve de mathématiques, apprenez à lire l'énoncé dans sa globalité avant de commencer. Chaque question est une étape logique vers la suivante. »

Exercice 1 : (07 points)

Partie I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x + 1)e^x - 1$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
2. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations.
3. Calculer $g(0)$, puis en déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1 - e^{-x})^2$.

On note (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$, puis en déduire que (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) dont on déterminera l'équation.
b) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ) .
3. a) Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = (e^{-x} - 1)g(-x)$.
b) En déduire le sens de variation de f , puis dresser son tableau de variations.
4. a) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
b) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (T) .
c) En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
5. Construire (Δ) , (T) et (C_f) .
6. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = mx$.
7. Calculer S , l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et les droites d'équations $y = x$, $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 2 : (07 points)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
2. Étudier le sens de variation de g sur $]0; +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions, l'une est 1 et l'autre est α telle que : $2.2 < \alpha < 2.3$.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm.

1. Calculer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter graphiquement les résultats.
2. Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$.
3. Étudier le sens de variation de f sur D_f , puis dresser son tableau de variations.
4. a) Vérifier que pour tout $x \in D_f$: $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$.
b) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.
5. Construire (Δ) et (C_f) .
6. a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(1 - \ln x)$, puis en déduire une primitive de f .
b) Vérifier que $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) dx = \ln 2$.
c) Calculer l'aire A (en cm^2) du domaine délimité par (C_f) , (Δ) et les droites $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

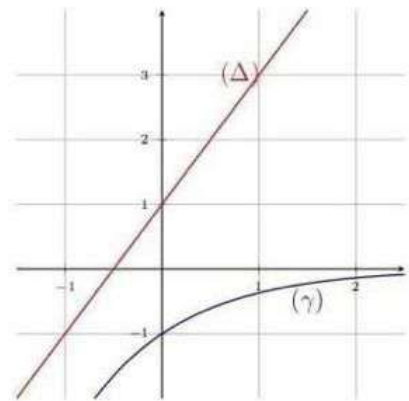
Exercice 3 : (07 points)

Partie I

(γ) est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto -e^{-x}$ et (Δ) est la droite d'équation $y = 2x + 1$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x + 1 + e^{-x}$.
Par lecture graphique :

1. Déterminer la position relative de (γ) par rapport à (Δ) .
2. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.



Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \frac{1}{2} + (1 - 2x)e^x$.

Soit (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm.

- Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(-x + \frac{1}{2} \right) \right]$, puis interpréter graphiquement le résultat.
 - Étudier la position relative de la courbe (C_f) et de la droite (D) d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$.
- Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = -g(x)e^x$.
 - En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
- Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
- Montrer qu'il existe une tangente (T) à (C_f) parallèle à (D) , puis donner son équation.
- Calculer $f(1)$, puis construire (D) , (T) et (C_f) .
- Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = -x + m$.
- Soit S l'aire du domaine délimité par (C_f) , la droite (D) et les droites $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.
Montrer que $S = (8\sqrt{e} - 12) \text{ cm}^2$.

Exercice 4 : (07 points)

Partie I

Soit h la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $h(x) = 2x^2 + 4x + 1 + \ln(x+1)$.

- Étudier les variations de la fonction h , puis dresser son tableau de variations.
- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $-0,3 \leq \alpha \leq -0,2$.
- Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $] -1; +\infty[$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

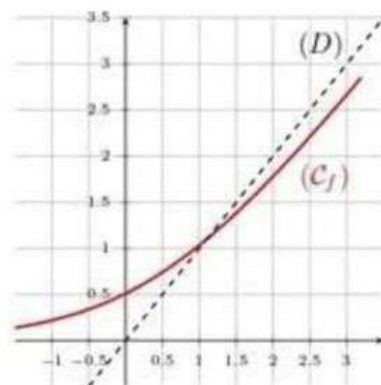
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$, puis déterminer la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) .
- Montrer que pour tout $x > -1$: $f'(x) = \frac{h(x)}{2(x+1)^2}$, puis en déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
- Écrire l'équation de la tangente (d) parallèle à (Δ) .
- Montrer que $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \frac{1}{2(\alpha+1)}$, puis déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.
- Prouver que $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse β tel que : $-0,4 < \beta < -0,3$.
 - Tracer $(\mathcal{C})$, la droite (d) et l'asymptote (Δ) .
- Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x + m$.
- Soit F la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $F(x) = \frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2$.
 - Prouver que F est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ sur $] -1; +\infty[$.
 - Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'asymptote (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e - 1$.

Exercice 5 : (04 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $[\ln 3; 2 \ln 2]$ par :

$$f(x) = \ln \left(\frac{2}{3} e^x + 1 \right)$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et (D) la droite d'équation $y = x$.



- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[\ln 3; 2 \ln 2]$, on a : $f(x) \in [\ln 3; 2 \ln 2]$.
- Soit (u_n) la suite numérique définie par son premier terme $u_0 = 2 \ln 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - Représenter sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sans les calculer, en justifiant les traits de construction.
 - Émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) et sa convergence.
- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n > \ln 3$.
 - Montrer que pour tout entier naturel n : $e^{u_n} - e^{u_{n+1}} = \frac{1}{3}(e^{u_n} - 3)$, puis en déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
 - Justifier que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.
- On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = e^{u_n} - 3$.
 - Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 .
 - Écrire l'expression de v_n en fonction de n , puis en déduire que pour tout n : $u_n = \ln \left(3 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$. Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - Calculer en fonction de n la somme S_n définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n 3^k e^{u_k} = e^{u_0} + 3^1 e^{u_1} + 3^2 e^{u_2} + \dots + 3^n e^{u_n}$$

Exercice 6 : (07 points)

- Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $e^x > 1 + x$.
 - En déduire que pour tout réel $x > 0$: $\ln(x) < x$ et $e^x - \ln(x) - 1 > 0$.

Soit g la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} e^x + 1 - x \ln(x) & ; x > 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - 2}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat.
 - Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[0, +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
 - En déduire que pour tout réel $x \geq 0$: $g(x) \geq 2$.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (1 + e^{-x}) \ln(x)$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats.
 b) Montrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x} e^{-x}$, puis dresser le tableau de variations de f .
 c) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
4. Soit (γ) la courbe d'équation $y = \ln(x)$.
 a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x)]$ et interpréter graphiquement le résultat.
 b) Étudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la courbe (γ) .
5. a) Construire avec soin les courbes (C) et (γ) dans le même repère.
 b) Discuter graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des solutions de l'équation : $(1 + e^{-x}) \ln(x) = (x - 1) \ln(m)$.
 c) Montrer que pour tout $x \geq 1$: $\ln(x) \leq f(x) \leq (1 + e^{-x})x$.
 d) En déduire un encadrement de l'aire du domaine délimité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
6. n étant un entier naturel ($n \geq 2$), on considère la suite (φ_n) définie par : $\varphi_n = \frac{f(n)}{\ln(n)}$.
 Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=2}^n \varphi_k$.

Exercice 7 : (07 points)

Partie I

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$.

- Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $]0; +\infty[$, l'une est 1 et l'autre est α telle que : $e < \alpha < e^{1,5}$ (ou selon l'encadrement précisé : $1 < \alpha < e$).
- Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie II

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$.

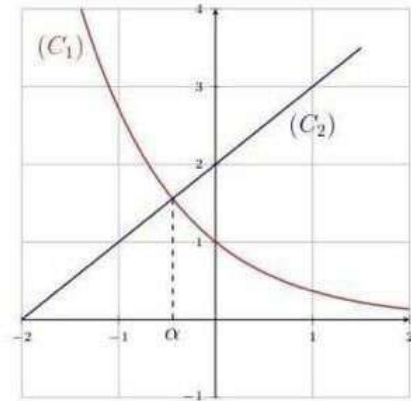
On note (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité de longueur est 2 cm.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x(1 - \ln x) = 0$, puis en déduire que $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$.
- Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition, puis interpréter graphiquement les résultats.
- Montrer que pour tout réel x de D_f : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$.
- Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations.
- Vérifier que pour tout x de D_f : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$.
 - Étudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.
- Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) .
- Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ sur D_f .
 - Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) dx = \ln(2)$. Puis calculer, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par la courbe (C_f) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

Exercice 8 : (07 points)

Partie I

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. (C_1) et (C_2) sont les représentations graphiques respectives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto x+2$. (C_1) et (C_2) se coupent en un point unique d'abscisse α . Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x} - x - 2$.



1. Par une lecture graphique, déterminer selon les valeurs de x , la position relative de (C_1) par rapport à (C_2) .
2. En déduire, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.
3. Vérifier que : $-0,5 < \alpha < -0,4$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + 1 + \frac{x-1}{e^x}$.

On note (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b) Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = -\frac{g(-x)}{e^x}$.
c) Étudier le sens de variation de la fonction f , puis dresser son tableau de variations.
2. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
b) Étudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D) .
3. Montrer que $f(-\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha + 2}$, puis en déduire un encadrement de $f(-\alpha)$.
4. Montrer que la courbe (C_f) admet une tangente (T) dont le coefficient directeur est -1 , puis donner son équation.
5. Construire (C_f) , (D) et (T) .
6. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = -x + 2m$.
7. En utilisant une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe (C_f) , la droite (D) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 8 : (07 points)

Partie I

Soit g_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = n(x+1) + e^x$$

où n est un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Étudier le sens de variation de la fonction g_n , puis dresser son tableau de variations.
2. a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}$.
b) Vérifier que : $-2 < \alpha_n < -1$.
3. En déduire, selon les valeurs du nombre réel x , le signe de $g_n(x)$.

Partie II

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{xe^x}{n + e^x}$$

Soit (C_n) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (Unité : 2 cm).

1. Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par l'origine du repère O .
2. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$.
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat.
3. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_n(x) - x]$. Que peut-on conclure ?
b) Étudier la position relative de la courbe (C_n) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.
4. a) Montrer que pour tout réel x : $f'_n(x) = \frac{e^x \cdot g_n(x)}{(n + e^x)^2}$.
b) En déduire le sens de variation de la fonction f_n , puis dresser son tableau de variations.
5. Montrer que $f_n(\alpha_n) = \alpha_n + 1$.
6. Étudier la position relative des deux courbes (C_n) et (C_{n+1}) .
7. Construire les droites (Δ) et les courbes (C_1) , (C_2) et (C_3) .

Partie III

On pose $u_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $I = \int_{-1}^0 xe^x dx$.

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I .
2. a) Montrer que pour tout $x \in [-1; 0]$:
$$\frac{xe^x}{n} \leq \frac{xe^x}{n + e^x} \leq \frac{xe^x}{n + 1}$$

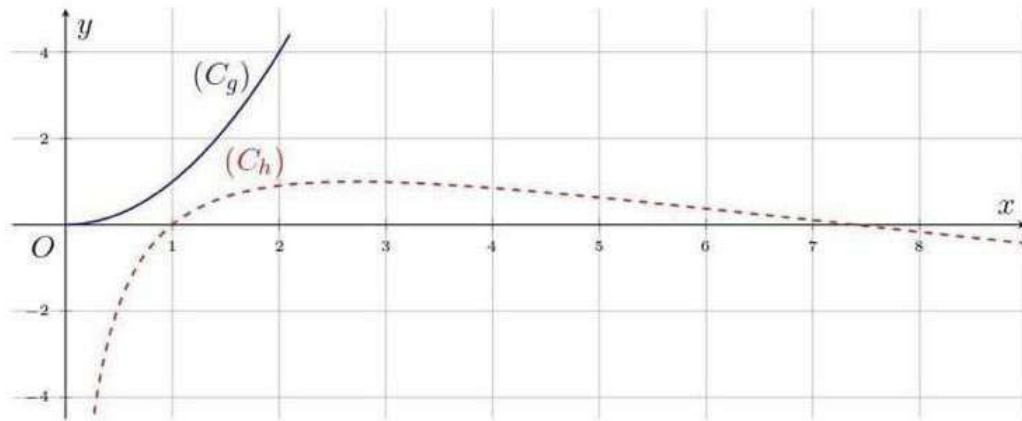
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $v_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
 - a) Montrer que pour tout entier naturel k non nul : $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1}$.
 - b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \geq \ln(n+2) - \ln 2$.
 - c) En déduire la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 : (07 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie I

1. Soient g et h les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2$ et $h(x) = 2 \ln x - (\ln x)^2$.



- a) Justifier graphiquement que $g(x) - h(x) > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
- b) En déduire que $1 > \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
2. a) Vérifier que $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$. En déduire que $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.
- b) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^{e^2} (\ln x)^2 \, dx = 2e^2 - 2$.
- c) Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $h(x) = 0$, puis en déduire les coordonnées des points d'intersection de (C_h) avec l'axe des abscisses.
- d) Calculer l'aire du domaine plan délimité par (C_h) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$.

1. a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat.
- b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c) Déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
2. a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$.
- b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$.
- b) Vérifier que $e^{-1} < \alpha < 1$ et que $\ln \alpha = -\alpha$.
- c) Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
- d) Montrer que la droite (T) d'équation $y = x$ est la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.
- e) Montrer qu'il existe une autre tangente (T') à (C_f) parallèle à (T) , puis donner son équation.
4. Tracer (T) , (T') et (C_f) .
5. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation : $(\ln x)^2 = e^{m+\ln x}$.

Partie III

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .