

SUITES

I. Calculs de termes

Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

- $u_n = n^2 - 2n + 3$. Calculer u_0, u_1, u_2 .
- $u_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. Calculer u_0, u_1, u_2 .
- $u_n = \frac{3n-2}{2n+5}$. Calculer les trois premiers termes de la suite.

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par :

- $$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \end{cases}$$
 Calculer u_1, u_2 .
- $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$
 Calculer u_1, u_2 et u_3 .

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases}$$

- Calculer u_1, u_2 et u_3 . (Donner le résultat sous forme de fraction).
- Comparer les quatre premiers termes de la suite (u_n) aux quatre premiers termes de la suite (v_n) définie sur $\mathbf{N}$ par : $v_n = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 4 : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbf{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} u_n \end{cases} \text{ et } v_n = u_n - \frac{4}{23}.$$

Calculer u_2, u_3, v_1, v_2 et v_3 .

Exercice 5 : On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbf{N}$ par :
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases}$$

- Pour $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$, calculer a_1, b_1, a_2 et b_2 .
- Pour $a_0 = 1$ et $b_0 = 7$, calculer a_1, b_1, a_2 et b_2 .

Exercice 6 : Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbf{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = 4 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

et (w_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par : $w_n = u_n - v_n$.

Calculer $u_1, u_2, v_1, v_2, w_0, w_1$ et w_2 .

II. Représentation graphique

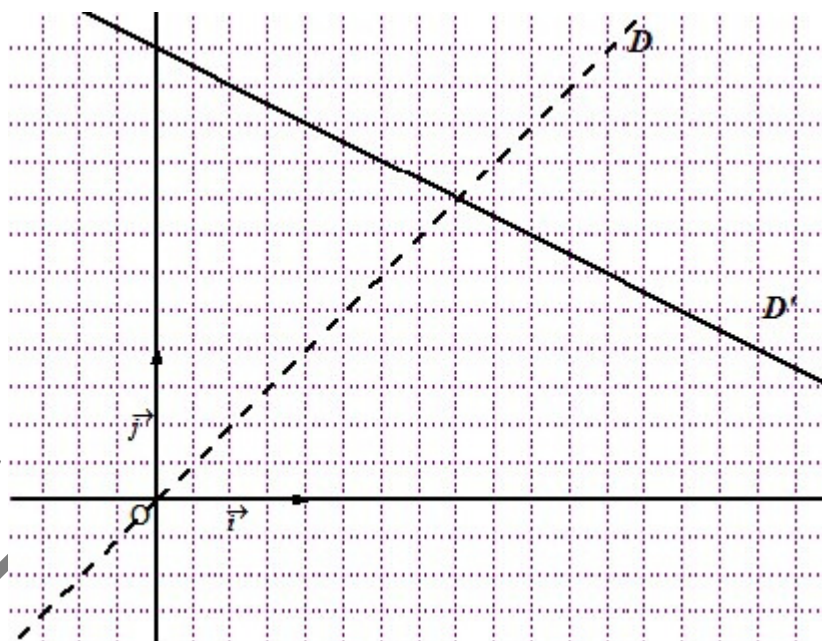
Exercice 7 :

On considère la suite (u_n) définie

sur $\mathbf{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}.$$

- a) Dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm), on a tracé ci-contre la droite D d'équation $y = x$ et la droite D' représentant la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x + 3$. Sans effectuer de calcul, placer sur l'axe des abscisses les termes u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .

- b) La suite (u_n) semble-t-elle monotone ?

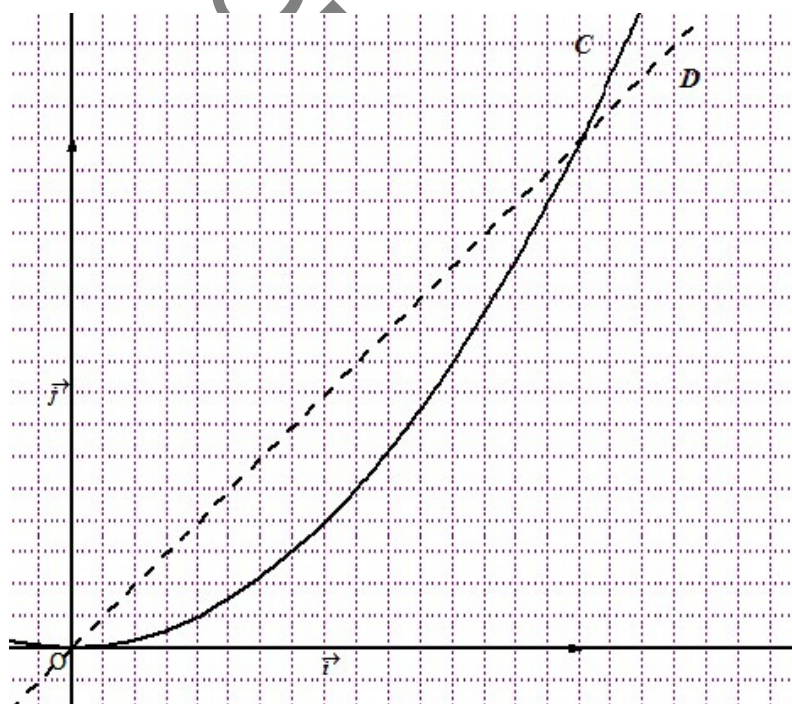


Exercice 8 :

On considère la suite (u_n) définie

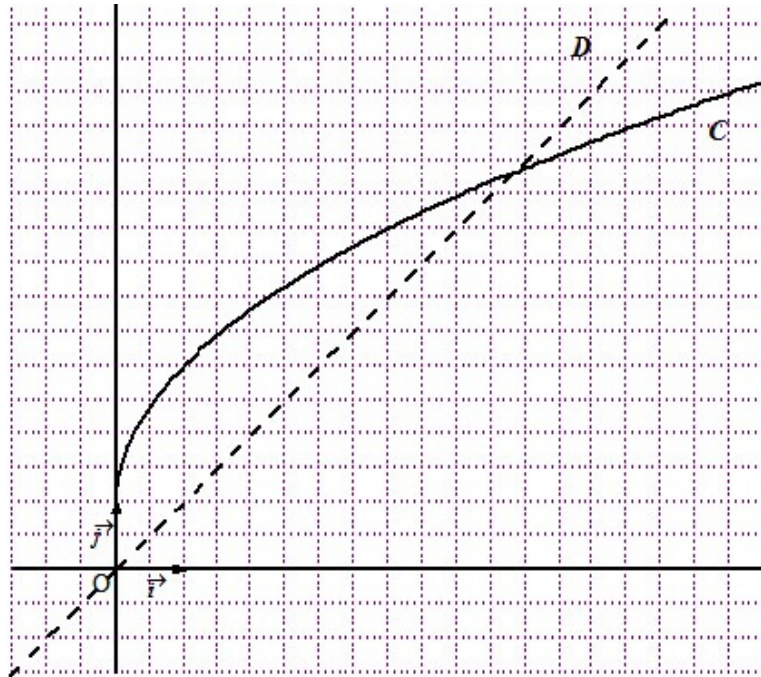
sur $\mathbf{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{4} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}.$$

- a) Dans un repère orthonormé (unité graphique : 8 cm), on a tracé ci-contre la droite D d'équation $y = x$ et la courbe C représentant la fonction $f : x \mapsto x^2$. Sans effectuer de calcul, placer sur l'axe des abscisses les termes u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
- b) Émettre des conjectures sur le comportement de la suite (u_n) (variation et convergence).



Exercice 9 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 1 \end{cases}.$$

- a) Dans un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm), on a tracé ci-dessous la droite D d'équation $y = x$ et la courbe C représentant la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 1$.
 Sans effectuer de calcul, placer sur l'axe des abscisses les termes u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
- b) Émettre des conjectures sur le comportement de la suite (u_n) (sens de variation et convergence).



III. Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques

Exercice 10 : u est une suite arithmétique de raison r .

Montrer que la suite v définie pour tout entier naturel n par $v_n = 3u_n - 1$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Exercice 11 : La suite u est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$.

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ et on définit la suite v pour tout entier naturel n ,

par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

- a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
- b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

Exercice 12 : La suite u est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n \neq 1$, et on pose, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

- Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
- Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

Suites géométriques

Exercice 13 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_n \end{cases}$$

- Justifier que (u_n) est une suite géométrique.

- Établir que $u_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$.

Exercice 14 : Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par
$$\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n \end{cases} \text{ et } v_n = p_n - \frac{4}{23}.$$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$; préciser son premier terme.

Exercice 15 : On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 7 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases}$$

et la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = b_n - a_n$.

- Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ dont on précisera le premier terme.
- Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 16 : Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par
$$\begin{cases} p_1 \\ p_{n+1} = 0,5 p_n + 0,2 \end{cases} \text{ et } v_n = p_n - \frac{2}{5}.$$

- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
- En déduire une expression de p_n en fonction de n et p_1 .

Exercice 17 :

- Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{1}{3}$.

- Calculer en fonction de n :

$$\text{a) } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{b) } T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}.$$

III. Monotonie

Suites définies par $u_n = f(n)$

Exercice 18 : On considère la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2 - 4}$ pour n entier supérieur ou égal à 3.

- Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n et montrer que : pour tout $n \geq 3$, $u_{n+1} - u_n < 0$.
- En déduire les variations de la suite (u_n) .

Exercice 19 : On considère la suite u définie sur $\mathbf{N}$ par $u_n = n^2 - 6n + 1$.

- Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6x + 1$.
- En déduire que la suite u est croissante à partir du rang 3.

Exercice 20 : On considère la suite définie par $u_n = \frac{n^2}{1 + n^2}$.

- Cette suite est-elle minorée ? est-elle majorée ?
 - Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire les variations de la suite.
- Déterminer une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que $u_n = f(n)$ et retrouver les réponses aux questions précédentes.

Suites définies par récurrence

Exercice 21 : Étudier les variations de la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$.

Exercice 22 : Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbf{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = 4 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

et (t_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par : $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

Démontrer que (t_n) est une suite constante.

Exercice 23 : On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbf{N}$ par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 7 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases}$$

- Sachant que, pour tout entier n , $a_n \leq b_n$, étudier les variations des suites (a_n) et (b_n) .
- Montrer que la suite $(a_n + b_n)$ est constante.

IV. Limites

Exercice 24 : Étudier la limite des suites définies sur $\mathbf{N}$ par :

$$\text{a) } u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{b) } v_n = -2 \left(\frac{11}{5}\right)^n \quad \text{c) } w_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$d) t_n = \left(-\frac{5}{7}\right)^n$$

$$e) p_n = \frac{4}{23} - \frac{3}{20} \left(-\frac{3}{20}\right)^n$$

Exercice 25 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{\sin n}{n}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $-\frac{1}{n} < \frac{\sin n}{n} < \frac{1}{n}$.

b) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 26 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $u_n = -n + \cos n$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n < -n + 1$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 27 : On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$.

On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ et que (u_n) est convergente.

Déterminer sa limite l (on admet que $l > 0$).

Exercice 28 : On considère la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n^2$.

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 < u_n < 1$.

b) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

VI. Raisonnement par récurrence

Exercice 29 : À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

pour tout entier naturel non nul n , $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 30 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq \frac{23}{18}$.

Exercice 31 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Montrer que pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.

V. Algorithmes

Exercice 32 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout

entier naturel n : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 1}$

On considère l'algorithme ci-contre.

- Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsqu'on choisit $n = 3$.

Pour cela vous complétez le tableau suivant :

n	3	3	3	3
i	1			
u	0			

- Que permet de calculer cet algorithme ?
- En utilisant votre calculatrice, compléter le tableau suivant :

n	1	5	10	20	100
Valeur affichée					

- Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

Exercice 33

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$ et, pour tout entier

naturel n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 2}$.

Pour calculer le terme u_9 on propose l'algorithme ci-contre :

- Compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des pointillés.
- Modifier cet algorithme pour qu'il affiche tous les termes de la suite de u_2 à u_9 .

Variables :

n est un nombre entier naturel

u est un réel

Initialisation :

Demander la valeur de n

Affecter à u la valeur 0

Traitement :

Pour i variant de 1 à n :

Affecter à u la valeur $2\sqrt{u+1}$

Sortie :

Afficher u

Variables :

n est un nombre entier naturel

u est un réel

Initialisation :

Affecter à n la valeur 1

Affecter à u la valeur 2

Traitement :

Tant que $n < 9$:

Affecter à u la valeur

Affecter à n la valeur

Sortie :

Afficher u

Exercice 34

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 3(u_n + 2)$.

Ecrire un algorithme qui permet de calculer et d'afficher le terme u_n lorsqu'on fournit la valeur de n .

Exercice 35

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{4}$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n^2$.

On admet que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 0.

Ecrire un algorithme permettant de calculer et d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0,0001$.

Exercice 36

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 2 \times 3^n + 1$.

On admet que (u_n) est croissante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- 1) Ecrire un algorithme qui, un nombre A étant donné, permet de trouver et d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n > A$.
- 2) Utiliser votre calculatrice pour obtenir la plus petite valeur de n tel que $u_n > 10^6$.